

MECANICĂ CLASICĂ

Dumitru Luca
Universitatea *Al. I. Cuza* Iași

Cristina Stan
Universitatea *Politehnica* București

8 ianuarie 2007

Prefață

Mecanică clasică este una din primele ramuri ale fizicii, atât în sens istoric, cât și ca importanță științifică. Ea a fost fundamentată ca știință de către Galileo Galilei și Isaac Newton în sec. XVII, prin formularea unui set redus de *principii ale dinamicii* corpurilor. Principiile sunt adevăruri unanim recunoscute, verificabile prin consecințe într-o multitudine de situații din viața reală. Împreună cu *observația* și *experimentul*, ele servesc la formularea *legilor fizice*, care reprezintă legături cantitative de tip cauză-efect între mărimile relevante într-un proces fizic. Structura matematică a mecanicii clasice a fost întregită ulterior prin lucrările lui Lagrange, în secolul al XVIII-le și Hamilton în sec. al XIX-lea.

Considerată, timp de peste 200 de ani, ca o știință "închisă", mecanica clasică a revenit în atenția fizicienilor în ultimele decenii, pe măsură ce matematica i-a furnizat un set de instrumente noi pentru analiza dinamicii sistemelor a căror evoluție este descrisă de ecuații neliniare, iar tehnica de calcul i-a pus la dispoziție mijloace tot mai performante. Nu este întâmplător că un număr în creștere de colective de cercetare din universități își focalizează astăzi chiar *în domeniul mecanicii* interesul pentru studierea unor aspecte calitative de dinamică neliniară, cum ar fi, de exemplu, tranziția de la comportamentul liniar la cel turbulent sau haotic.

Atât prin obiectul de studiu (abordat în primele semestre ale programei universitare), cât și metodele de abordare, cursul de Mecanica fizică îl introduce pe proaspătul student într-un domeniu fundamental al cunoașterii intuitive și raționale. Cunoștințele acumulate la curs, aplicațiile dezvoltate la seminar și experimentele din laborator, *coroborate cu studiul individual*, îi oferă studentului un set de principii și legi fizice, precum și instrumentele de studiu, bazate pe calculul diferențial și integral. Cunoștințele acumulate în cadrul acestei discipline vor servi ca punct de plecare pentru abordarea Mecanicii analitice, Teoriei relativității, Mecanicii cuantice etc. Pe lângă rolul informativ, aceste cunoștințe au impact formativ esențial, întrucât ele servesc la înțelegerea lumii înconjurătoare, fiind instrumente necesare pentru rezolvarea a nenumărate probleme din viața reală.

Cartea de față reprezintă un manual destinat studenților de la facultățile tehnice și de fizică, în care Mecanica fizică este prezentă în planul de învățământ al anului I, fie sub acest nume, fie ca o parte a unui curs de Fizică generală. Ea poate fi utilă, în egală măsură, elevilor din cursul superior al liceului, cât și profesorilor de fizică, pentru pregătirea examenelor de definitivat, gradul II și gradul I, sau oricărei persoane interesate în domeniu.

Având în vedere că, de regulă, cursul de mecanică se audiază în semestrul I, *în paralel*

cu cursul de analiză matematică, iar cel de algebră apare în semestrul al II-lea, am recurs la un bagaj minimal de cunoștințe din domeniul calculului vectorial și al analizei matematice. În aceeași idee, am introdus, pe lângă Anexa I, dedicată calculului vectorial, o a II-a Anexă cuprinzând câteva informații succinte despre ecuații diferențiale de tipul celor întâlnite în carte, însoțite de exemple și, în unele cazuri, de probleme.

Am încercat, din modul de prezentare, să nu facem să se înțeleagă că mecanica fizică este doar matematică aplicată. Studentul este invitat să înțeleagă foarte de timpuriu că o atitudine pasivă, bazată pe simpla memorare a unor formule și demonstrații, conduce - pe termen lung - la insucces. Ca și în celelalte științe ale naturii, înțelegerea fenomenelor analizate, *bazată pe atitudinea activă și critică* a celor studiate și pe *capacitatea de a stabili corelații între fenomene aparent disparate* constituie cheia succesului.

Am evitat folosirea unui material discursiv sau cu caracter istoric; acolo unde am considerat necesare astfel de informații, ele au fost menționate ca note de subsol, împreună cu trimiteri la adrese de internet pentru documentare suplimentară. Fiecare capitol este împărțit în secțiuni și se încheie cu un număr de probleme aferente acestor secțiuni. Este indicat ca, înainte de a se trece la capitolul următor, să se rezolve problemele capitolului curent.

În Capitolul 1, dedicat cinematicii punctului material, după introducerea noțiunilor fundamentale (modelul de punct material, mișcare, sistem de referință, traiectorie) sunt prezentate mărimile principale (viteză medie, viteză instantanee, accelerație instantanee). Am acordat un spațiu important prezentării sistemelor de coordonate (carteziene, cilindrice, sferice, naturale), precum și calculului vitezei și accelerației în raport cu aceste sisteme de coordonate.

Capitolul 2, dedicat dinamicii punctului material constituie centrul de greutate al cărții, având în vedere ca aici sunt introduse principiile dinamicii, precum și o serie de mărimi fizice importante pentru mecanică (impuls, moment cinetic, lucru mecanic, energie). Tot aici se studiază mișcarea punctului material sub acțiunea unor tipuri diferite de forțe, se introduce noțiunea de câmp conservativ și se demonstrează legea conservării energiei în cazul forțelor dependente de poziție. În ultima parte este prezentată succint integrarea numerică a ecuației diferențiale, în cazul unor forțe cu expresii complicate.

Capitolul 3 este dedicat mișcării sub acțiunea unei forțe centrale. Acesta este un subiect esențial pentru întreaga fizică, având în vedere că toate forțele fundamentale sunt de tip central. Accentul este pus aici pe efectul forțelor de natură gravitațională, făcându-se legătura cu legile lui Kepler din astronomie și cu raționamentele lui I. Newton, privitoare la legea atracției universale. Se discută apoi problema celor două corpuri, iar în final, se face o prezentare de principiu a problemei celor trei corpuri. Problemele de la sfârșitul capitolului sunt destinate aprofundării temei.

Capitolul 4, dedicat sistemelor discrete de puncte materiale, este introdus în ideea pregătirii abordării mecanicii corpurilor cu distribuție continuă de masă, subiectul central al părții a II-a a cursului de Mecanică fizică. În acest capitol se indică modul de calcul al mărimilor specifice sistemelor discrete, plecându-se de la cele introduse în modelul de punct material. De asemenea, se discută legile de conservare a impulsului, energiei și momentului unghiular, valabile în cazul sistemelor izolate. Sunt prezentate fenomenele de ciocnire, prin contact și prin intermediul câmpului, în sistemul laboratorului și al centrului de masă.

În Capitolul 5 sunt trecute în revistă mărimile specifice sistemelor fizice cu distribuție continuă de masă/sarcină, precum și tehnici de calcul ale expresiilor unor astfel de mărimi

(masă, impuls, forțe interne/externe, intensitate a câmpului, moment cinetic etc.). Prezentarea acestor subiecte va permite studentului extrapolarea și generalizarea rezultatelor pentru diverse alte sisteme întâlnite în alte domenii ale fizicii și/sau tehnicii.

Principalele modele idealizate cu care se operează în acest context, *solidul rigid și fluidul ideal*, sunt prezentate în Capitolele 6, respectiv 8. Extensii ale acestor modele sunt prezentate în Capitolul 7, *solidul deformabil*, respectiv în ultima parte a Capitolului 8, dedicată unei scurte analize a curgerii fluidelor vâscoase.

Noțiunile acumulate prin studiul mecanicii mediilor continue, alături de aplicațiile dezvoltate la seminar și experimentele de laborator consolidează cunoștințele studentului care se inițiază în tainele fizicii. Aceste cunoștințe au un evident caracter fundamental, ele oferind mijloace și căi pentru înțelegerea naturii. Ele oferă, de asemenea, instrumente de lucru pentru abordarea celorlalte domenii ale fizicii (electricitate și electrodinamică, mecanică analitică și mecanică cuantică, fizica atomului și moleculei).

Abordarea newtoniană în mecanica clasică este legată, în anumite cazuri, de o serie de dificultăți matematice importante, care pot fi ocolite prin utilizarea a două tehnici de abordare noi – *ecuațiile lui Lagrange*, respectiv *ecuațiile lui Hamilton*. Acestea pleacă de la dinamica newtoniană, însă folosesc ca noțiune cheie *energia*, recurgând la așa-numitele *coordonate generalizate*, respectiv *impulsuri generalizate*. Folosind ecuațiile lui Lagrange sau Hamilton, așa cum este prezentat în Capitolul 9, putem găsi mai rapid ecuațiile de mișcare, precum și valorile și orientarea forțelor de reacțiune sau de legătură, prin integrarea unor ecuații diferențiale de ordinul I.

Capitolul 10 este dedicat prezentării principalelor noțiuni care permit trecerea de la mecanica clasică la *mecanica relativistă*. După cum se știe, rezultatele prezise de mecanica clasică în cazul mișcării cu viteze comparabile cu viteza luminii sunt contrazise de realitate.

Mecanica relativistă, ale cărei baze au fost puse de către Albert Einstein în anul 1905, reprezintă, de fapt, o extensie a mecanicii clasice. În așa numita *teorie a relativității restrânse*, care este parțial acoperită în Capitolul 2, se studiază mișcarea corpurilor *în raport cu sisteme de referință inerțiale*. Relativitatea restrânsă se bazează pe două postulate introduse de Einstein: (a) echivalența tuturor sistemelor de referință inerțiale și (b) constanța vitezei luminii în raport cu orice sistem de referință inerțial. O abordare a problemei într-un cadru mai larg o reprezintă *teoria a relativității generale*, în care mișcarea este analizată *în raport cu sisteme de referință neinertiale*.

Am considerat necesar, în cadrul spațiului limitat al acestui volum, să introducem câteva aspectele de interes din teoria relativității restrânse, ca un minim necesar pentru studiul mecanicii clasice. Urmează ca o analiză mai detaliată a teoriei relativității restrânse, împreună cu problematica relativității generale să fie studiate mai în detaliu în cadrul disciplinei *Teoria relativității*.

Deși fizica clasică folosește modele liniare, lumea fizică înconjurătoare este în mod preponderent neliniară. În acest sens am prezentat succint, în Capitolul 11, ideile fundamentale și tehnicile de abordare modernă a evoluției unor sisteme mecanice descrise de dinamici neliniare, așa cum apar ele în *teoria haosului*. Sunt trecute în revistă noțiuni în legătură cu sistemele disipative, atractori, analiza în spațiul fazelor, bifurcații, coeficienți Lyapunov, analiza fractală, etc. Aceste instrumente descriu comportarea haotică a sistemelor fizice guvernate de legi deterministe, pentru care ecuațiile de mișcare și condițiile inițiale permit, în principiu,

determinarea evoluției sistemului la orice moment de timp. Noțiunile sunt aici exemplificate folosind un model de oscilator neliniar.

În funcție de valoarea neliniarității sistemelor, dinamica acestora este foarte variată, ea apărând nu doar sub forma unor evoluții simple, previzibile, ci – uneori – în forme deosebit de complicate, chiar haotice. Cu titlu de exemplu, extinderea analizei curgerii turbulente a unui fluid, care fusese parțial prezentată în volumul de *Mecanica mediilor continui*, este prezentată aici din punct de vedere al teoriei haosului. În finalul Capitolului 3 se prezintă câteva noțiuni esențiale legate de apariția haosului în sistemele hamiltoniene, caracterizate de sensibilitate ridicată la condițiile inițiale.

În Anexa I se face o trecere în revistă a modurilor de reprezentare a vectorilor și a operațiilor cu aceștia. Operațiile algebrice cu vectori sunt cunoscute din materia de liceu, însă elementele de analiză vectorială și, în special, partea dedicată operatorilor vectoriali diferențiali constituie un subiect ceva mai dificil pentru studenți. Din experiența noastră, aceștia întâmpină aici probleme nu numai din cauza dificultății subiectului în sine, ci mai ales deoarece la cursul de analiză matematică, introducerea operatorilor diferențiali se face adesea în mod formal, fără un suport fizic intuitiv. Am afectat, de aceea, un spațiu mai larg acestui subiect, comparativ cu cel dedicat algebrei vectoriale.

În Anexa II sunt prezentate succint principalele tipuri de ecuații diferențiale de ordinul I și II, întâlnite în cuprinsul cărții. În cele mai multe cazuri, considerațiile privind integrarea acestor ecuații diferențiale sunt însoțite de exemple ilustrative.

Suntem recunoscători referenților științifici, Prof. dr. Ioan Mercheș, de la Facultatea de Fizică a Universității "Alexandru Ioan Cuza" din Iași și Prof. dr. Radu Chișleag, de la Departamentul de Fizică a Universității Politehnica București, pentru discuțiile avute cu ocazia redactării manuscrisului și pentru sugestiile făcute cu ocazia citirii acestuia.

Ne exprimăm, de asemenea, gratitudinea tuturor celor care, prin observații și sugestii, ne vor putea ajuta la îmbunătățirea și completarea acestui manual, într-o ediție viitoare.

Iași, București, decembrie 2003.

Cuprins

1	Cinematica punctului material	1
1.1	Obiectul cinematicii. Modelul de punct material	1
1.2	Traectoria și ecuațiile cinematice	2
1.3	Vectorul deplasare, viteza și accelerația	4
1.3.1	Viteza medie și viteza instantanee	4
1.3.2	Accelerația medie și accelerația instantanee	7
1.4	Coordonate carteziene	9
1.5	Coordonate polare plane	12
1.5.1	Viteza unghiulară	15
1.6	Coordonate naturale	16
1.7	Coordonate cilindrice	17
1.8	Coordonate sferice	19
1.9	Probleme	24
2	Dinamica punctului material	27
2.1	Principiile dinamicii newtoniene	27
2.1.1	Noțiuni introductive	27
2.1.2	Enunțul principiilor dinamicii	28
2.2	Integrarea ecuației diferențiale a mișcării	31
2.2.1	Impulsul. Conservarea impulsului.	32
2.2.2	Momentul unghiular. Conservarea momentului unghiular.	34
2.2.3	Lucrul mecanic și puterea	36
2.2.4	Energia cinetică	37
2.2.5	Energia potențială. Forțe conservative	38
2.2.6	Legea conservării energiei mecanice. Forțe conservative	40
2.3	Mișcarea punctului material sub acțiunea a diferite tipuri de forțe	41
2.3.1	Forță constantă, $F = F_0$	41
2.3.2	Forță dependentă de timp $F = F(t)$	42
2.3.3	Forță dependentă de viteză $F = F(v)$	42
2.3.4	Forță dependentă de poziție	45

2.3.5	Forțe cu expresii complicate. Integrare numerică	49
2.4	Probleme	50
3	Forțe de tip central	53
3.1	Conservarea momentului unghiular	54
3.2	Ecuția lui Binet	55
3.3	Forțe de tipul $1/r^2$	56
3.4	Legile lui Kepler și atracția universală	60
3.5	Problema celor două corpuri	62
3.6	Problema celor trei corpuri	66
3.7	Probleme	68
4	Dinamica sistemelor discrete de particule	71
4.1	Mărimi caracteristice sistemelor de particule	71
4.2	Centrul de masă. Legi de conservare	73
4.3	Legea conservării impulsului	74
4.4	Legea conservării energiei	75
4.5	Legea conservării momentului unghiular	76
4.6	Ciocniri. Definiții și clasificări	78
4.6.1	Impulsul forței și variația impulsului în decursul ciocnirii	79
4.6.2	Ciocniri uni-dimensionale	82
4.6.3	Ciocniri oblice (bi-dimensionale)	86
4.7	Analiza proceselor de ciocnire în sistemul centrului de masă	90
4.7.1	Un exemplu de ciocnire elastică intermediată de câmp: împrăștierea Rutherford	93
4.8	Probleme	97
5	Modelul de mediu continuu	99
5.1	Masa unui sistem continuu	101
5.2	Impulsul unui sistem continuu	101
5.3	Câmpul gravitațional și potențialul gravitațional creat de o distribuție continuă de masă	102
5.3.1	Câmpul și potențialul gravitațional pe axa unui inel	102
5.3.2	Calculul câmpului și al potențialului gravitațional create de o distribuție sferică de masă	104
5.4	Legea (teorema) lui Gauss	112
5.5	Momentul cinetic al unei distribuții sferice de masă	116
5.6	Probleme	118
6	Solidul rigid	121
6.1	Modelul de solid rigid	121
6.2	Mișcarea de translație a solidului rigid	123
6.3	rotația rigidului în jurul unei axe fixe	125
6.4	Câteva exemple de calcul al momentelor de inerție	127

6.4.1	Teorema axelor paralele	128
6.4.2	Teorema axelor perpendiculare	130
6.5	Rotatorul liniar	136
6.6	rotația rigidului în jurul unui punct fix	139
6.7	Elipsoidul de inerție	142
6.8	Ecuțiile lui Euler	144
6.9	Stabilitatea rotației solidului rigid	145
6.10	Giroscopul. Mișcarea giroscopului în câmp gravitațional	146
6.11	Probleme	151
7	Solidul deformabil	155
7.1	Introducere	155
7.2	Deformația de alungire/compresiune	155
7.3	Deformația de forfecare	158
7.4	Deformația de torsiune (răsucire)	159
7.5	Deformația de încovoiere (flexiune)	161
7.6	Probleme	162
8	Fluide	165
8.1	Statica fluidelor. Ecuția fundamentală a hidrostatiei	167
8.1.1	Presiunea hidrostatică	170
8.1.2	Formula barometrică	172
8.1.3	Legea lui Arhimede	172
8.2	Dinamica fluidelor	173
8.2.1	Derivata substanțială a unei mărimi fizice	174
8.2.2	Ecuția de curgere a unui fluid	175
8.2.3	Ecuția de continuitate	176
8.2.4	Ecuția (legea) lui Bernoulli	180
8.2.5	Aplicațiile legii lui Bernoulli	182
8.3	Fluide vâscoase	185
8.3.1	Introducere	185
8.3.2	Curgerea fluidelor vâscoase prin conducte cilindrice. Ecuția lui Poisseuille-Hagen	186
8.3.3	Forțe de frecare vâscoasă la interfața solid-lichid. Legea lui Stokes	188
8.3.4	Efectul Magnus	189
8.3.5	Formarea vârtejurilor. Curgerea turbulentă	190
8.4	Probleme	192
9	Elemente de mecanică analitică	195
9.1	Mărimi caracteristice	196
9.1.1	Legături	196
9.1.2	Coordonate generalizate și viteze generalizate	198
9.1.3	Forțe generalizate	199
9.1.4	Spațiul configurațiilor	200

9.2	Formalismul lui Lagrange	201
9.2.1	Principiul lucrului mecanic virtual	201
9.2.2	Ecuatiile lui Lagrange	202
9.2.3	Cazul legăturilor neolonome. Metoda multiplicatorilor Lagrange	204
9.3	Formalismul lui Hamilton	205
9.3.1	Principiul lui Hamilton	205
9.3.2	Ecuatiile canonice	207
9.3.3	Semnificația funcției Hamilton	210
9.3.4	Spațiul fazelor	210
9.3.5	Teorema lui Liouville	211
9.3.6	Parantezele lui Poisson	213
9.4	Teoria Hamilton-Jacobi	214
9.4.1	Transformările canonice	214
9.4.2	Ecuția Hamilton-Jacobi	216
9.5	Teoreme de conservare în mecanica analitică	217
9.5.1	Conservarea energiei	217
9.5.2	Conservarea impulsului total	218
9.5.3	Conservarea momentului cinetic	219
9.6	Probleme	220
10	Noțiuni de relativitate restrânsă	223
10.1	Relativitatea în mecanica clasică	223
10.1.1	Transformările lui Galilei	224
10.2	Principiile relativității restrânse	227
10.3	Transformările Lorentz	228
10.4	Consecințe ale transformărilor Lorentz	230
10.4.1	Dilatarea duratelor	230
10.4.2	Contractia lungimilor	232
10.4.3	Dependența masei de viteză	233
10.4.4	Transformarea vitezelor în teoria relativității	234
10.4.5	Transformarea masei în teoria relativității	235
10.5	Forța în teoria relativității	236
10.6	Energia în mecanica relativistă	237
10.6.1	Relația lui Einstein	237
10.6.2	Legătura dintre energie și impuls	240
10.7	Universul Minkowski	240
10.7.1	Cuadrivectori de poziție	244
10.7.2	Cuadrivectorul interval	245
10.7.3	Cuadrivectorul viteză	246
10.7.4	Cuadrivectorul accelerație	247
10.7.5	Cuadrivectorul impuls-energie	247
10.7.6	Cuadrivectorul forță - putere	248
10.8	Probleme	248

11	Noțiuni de dinamică neliniară și haos clasic	251
11.1	Neliniaritate și sensibilitate la condițiile inițiale	251
11.2	Sisteme dinamice	253
11.2.1	Sisteme disipative și atractori	254
11.3	Echilibru și stabilitate	256
11.3.1	Analiza liniară de stabilitate a sistemelor bidimensionale	258
11.4	Cicluri limită	263
11.5	Reprezentări (secțiuni) Poincaré	265
11.6	Bifurcații	269
11.7	Exponenți Lyapunov	274
11.8	Fractali. Auto-asemănare. Dimensiune fractală și dimensiune topologică	275
11.9	Sistem cu dinamică haotică	277
11.9.1	Oscilatorul van der Pol în regim forțat	277
11.9.2	Haos în cazul curgerii turbulente	280
11.10	Haos în sisteme hamiltoniene	282
11.10.1	Sisteme integrabile	286
11.10.2	Sisteme nonintegrabile	290
11.10.3	Exemplu: Hamiltonianul Henon-Heiles	291
11.11	Probleme	295
A	Vectori	297
A.1	Reprezentarea unui vector	297
A.1.1	Reprezentarea geometrică	298
A.1.2	Reprezentarea analitică	298
A.1.3	Reprezentarea matriceală	299
A.2	Operații algebrice cu vectori	299
A.2.1	Adunarea și scăderea vectorilor	299
A.2.2	Înmulțirea vectorilor	301
A.3	Elemente de analiză vectorială	306
A.3.1	Derivarea vectorilor	306
A.3.2	Integrarea vectorilor	307
A.3.3	Operatori vectoriali diferențiali	307
A.4	Probleme	317
B	Noțiuni introductive despre ecuații diferențiale ordinare	321
B.1	Ecuații diferențiale de ordinul I cu variabile separabile	322
B.2	Ecuații diferențiale liniare de ordinul I	323
B.3	Ecuația de tip Bernoulli	325
B.4	Ecuații diferențiale liniare de ordinul II	326
B.5	Ecuații diferențiale liniare de ordinul II cu coeficienți constanți	327
C	Constante fizice și unități de măsură	329
	Bibliografie	333

Cinematica punctului material

1.1 Obiectul cinematicii. Modelul de punct material

Mișcarea este o proprietate *intrinsecă* a materiei, în sensul că nu există materie în repaus absolut, după cum nu poate fi concepută mișcare fără suportul material. Modificarea stării de mișcare a unui sistem fizic este, de regulă, studiată ca o consecință a acțiunii corpurilor înconjurătoare, sau ca rezultat al interacțiunilor unor părți din interiorul sistemului. Modificarea stării de mișcare poate fi studiată, pentru început, doar pur descriptiv, *fără a lua în considerare cauzele care o determină*. O astfel de abordare *geometrică* a mișcării este cunoscută drept *abordarea cinematică*, iar capitolul corespunzător din mecanică poartă numele de *Cinematică*. Deoarece un astfel de demers este mai simplu, el este ales în primă instanță, atât pe considerente didactice¹, cât și în ideea introducerii unor noțiuni și mărimi fizice strict necesare ulterior în studiul mecanicii. Cinematica precede, așadar, *Dinamica* – partea mecanicii în care sunt luate în considerare efectele unor factori-cauză și anume *forțele* cu care corpurile exterioare sau interioare acționează asupra sistemului studiat.

Descrierea completă a mișcării unui sistem fizic real este adesea o problemă fie prea complexă, fie nerelevantă. În practică, într-un anumit context, se pot ignora anumite amănunte, ne-esențiale pentru problema studiată. O reprezentare simplificată a unui sistem sau a unui proces fizic se numește *model fizic*. Modelele fizice și modelarea sunt instrumente esențiale, nu numai în fizică, ci în întreg procesul cunoașterii lumii înconjurătoare.

Descrierea matematică asociată unui model fizic simplu este, de asemenea, simplă. Din păcate, cu cât recurgem la modele tot mai simple, cu atât ne îndepărtăm mai mult de realitate. Cum lumea reală este întotdeauna mult mai complicată decât modelele cu care se operează în fizică, trebuie să fim conștienți că și rezultatele obținute sunt, într-un anumit sens, incomplete. Recurgerea la modele simple este necesară în faza incipientă a cunoașterii naturii, inclusiv în școală. Pe măsura luării în considerare a aspectelor considerate inițial ne-esențiale, ne apropiem mai mult de realitate, cu prețul utilizării unui instrument matematic mai sofisticat și mai dificil.

¹În condițiile în care este necesară o abordare a unei teme de studiat, pornind de la simplu, spre complex – și complet!

În fizică sunt cunoscute multe exemple de modele care au evoluat, în procesul cunoașterii, într-o succesiune cuprinzând mai multe etape. Exemplele cele mai cunoscute sunt modelul atomului și/sau al nucleului, modelul de fluid sau cel de solid rigid, diferite modele de unde etc.

Cel mai simplu model din mecanică este cel al *punctului material*. El poate fi folosit ori de câte ori se studiază mișcarea de translație a unui obiect sau sistem de obiecte, de dimensiuni mult mai mici decât distanțele parcurse. Un corp este astfel asimilat unui punct material², în care se consideră a fi concentrată întreaga sa masă. Se înțelege că un corp nu trebuie să fie neapărat "mic" în accepțiunea proprie a cuvântului, pentru a fi tratat ca punct material. În măsura în care un astfel de punct material este în mișcare, el se denumește și *mobil*, adică punct material în mișcare.

Modelul punctului material se aplică cu același succes, atât pentru studierea mișcării unor corpuri de dimensiuni și mase gigantice (cum ar fi corpurile din interiorul sistemului solar), cât și unor corpuri de dimensiuni nanoscopice (atomi, nuclee, electroni, etc.).

Abordarea care pleacă de la modelul de punct material este utilă în pașii ulteriori, când se trece la studiul mecanicii corpurilor de dimensiuni ce nu mai pot fi reduse la un punct. Dacă un corp este prea mare pentru a mai putea fi considerat particulă, el poate fi gândit ca o "colecție" (un sistem) de puncte materiale. Rezultatele găsite în mecanica punctului material se extrapolează pentru sistemele de puncte, cu precauțiile necesare unei astfel de operații.

Mărimile fizice cele mai importante în cinematică sunt *viteza și accelerația*. Vom începe prin a defini aceste mărimi, urmând a le găsi expresiile în raport cu diferite sisteme de coordonate.

1.2 Traiectoria și ecuațiile cinematice

Pentru a studia modul în care se modifică în timp poziția unui punct material în raport cu un altul, este nevoie de a defini un sistem de referință (denumit adesea și reper), considerat fix în contextul problemei de studiat. Poziția în raport cu reperul a punctului material a cărui mișcare o studiem este precizată prin așa-numitul *vector de poziție*. Acesta, notat cel mai adesea cu \vec{r} , are originea în originea reperului, iar vârful – în punctul material studiat. Proiecțiile lui \vec{r} pe axele sistemului de referință utilizat (notat prescurtat cu **SR**) determină, de asemenea, în mod univoc, poziția unui punct din spațiu.

Într-un spațiu tridimensional, poziția mobilului, notată cu P în Fig.1.1, este determinată de un triplet de *numere*, numite *coordonate*, care reprezintă distanțe și/sau unghiuri. Utilizarea reprezentării vectoriale are avantajul că expresiile mărimilor cinematice nu depind de tipul de coordonate ales.

Distanța dintre două puncte din spațiu se numește *metrică*. Mecanica newtoniană folosește metrica euclidiană, denumită adesea și metrica galileeană, în memoria lui Galileo Galilei³. Dis-

²Uneori, un punct material se denumește și *particulă*.

³Galileo Galilei (1564-1642), fizician italian, este considerat primul om de știință al epocii moderne. Principalele sale contribuții în fizică sunt legate de descoperirea legilor mișcării pendulului, ale căderii libere a corpurilor, precum și unele dispozitive tehnice (luneta astronomică, un nou model de pompa hidraulică, balanța hidrostatică). A susținut ipoteza heliocentrică a lui Copernicus. Cartea sa cea mai importantă este *Dialoguri despre principalele două sisteme ale lumii*, publicată la Florența în 1632 și dedicată analizei critice a sistemului geocentric al lui Ptolemeu și, respectiv, heliocentric al lui Copernicus. Printr-o coincidență, 1642

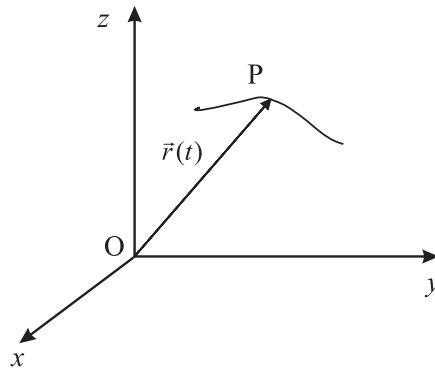


Figura 1.1: Reprezentarea traectoriei unui punct material. La momentul t punctul mobil se află în P , descris de vectorul de poziție \vec{r} .

tanța dintre două puncte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ și $P_2(x_2, y_2, z_2)$, exprimată într-un sistem de coordonate carteziene⁴, este dată de relația:

$$d = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (1.1)$$

Traectoria unui corp este curba descrisă de acesta în decursul mișcării, adică locul geometric al pozițiilor succesive ocupate de mobil în decursul mișcării. În mecanica clasică se consideră că traectoria corpului este bine determinată⁵, iar mulțimea pozițiilor succesive ocupate de acesta în decursul mișcării este *continuă*.

Să descriem, așadar, poziția unui punct material care se deplasează pe o curbă oarecare, cu ajutorul unui *vector de poziție*, notat \vec{r} (Fig.1.1). Legea de mișcare a mobilului este exprimată generic prin ecuația vectorială:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (1.2)$$

care este echivalentă cu trei ecuații scalare, ce descriu variațiile în timp ale coordonatelor mobilului. De exemplu, în cazul unui sistem de coordonate cartezian tridimensional:

$$x = x(t), \quad (1.3)$$

$$y = y(t), \quad (1.4)$$

$$z = z(t). \quad (1.5)$$

Ecuațiile (1.3), (1.4), (1.5) se numesc *ecuații parametrice* ale mișcării (parametrul este timpul t). Prin eliminarea timpului din ecuațiile parametrice sus-menționate, se obține ecuația traectoriei.

este anul morții lui Galilei și nașterii lui Newton. Informații suplimentare despre viața și opera lui Galilei pot fi găsite și la adresa de web: <http://galileo.imss.firenze.it/museo/b/egalilg.html>

⁴Așa cum vom vedea în continuare, în funcție de simetria problemei de studiat, pot fi folosite și repere de tip sferic sau cilindric.

⁵În mecanica cuantică, specifică sistemelor microscopice, se consideră ca poziția unei micro-particule (și deci și traectoria acesteia) nu pot fi determinate cu orice precizie, de aceea se vorbește doar de o anumită *probabilitate* ca particula să se găsească, la un moment dat, într-o anumită zonă din spațiu. Particula însăși este "de-localizată", iar traectoria ei se specifică print-un *nor de probabilitate*, care, în anumite cazuri se numește și *orbital*.

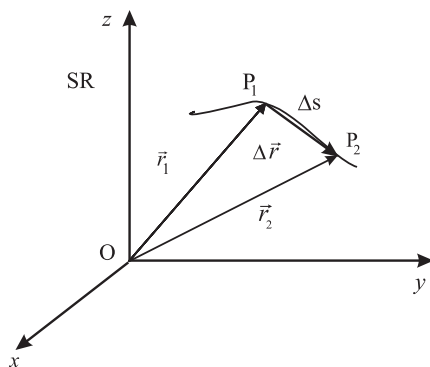


Figura 1.2: Vectorul deplasare, în intervalul $t_2 - t_1$, notat cu $\Delta\vec{r}$, reprezintă diferența vectorilor de poziție ai punctelor P_1 și P_2 : $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

1.3 Vectorul deplasare, viteza și accelerația

Să considerăm că, în decursul mișcării sale, un mobil se află la momentul t_1 într-un punct P_1 , descris de vectorul de poziție \vec{r}_1 și că la momentul t_2 el a ajuns în punctul P_2 , descris de vectorul de poziție \vec{r}_2 , situație reprezentată în Fig.1.2. Distanța dintre punctele P_1 și P_2 între care s-a deplasat mobilul poate fi interpretată ca fiind modulul unui vector, $\Delta\vec{r}$, denumit *vector deplasare*:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (1.6)$$

1.3.1 Viteza medie și viteza instantanee

Se definește *viteza medie* pe o porțiune Δs de traiectorie ca fiind raportul:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (1.7)$$

unde s este coordonata curbilinie, măsurată *de-a lungul traiectoriei*.

Întrucât măsurarea distanțelor de-a lungul traiectoriei este mai puțin convenabilă, se preferă exprimarea vitezei mobilului în funcție de coordonate sau de vectorii de poziție ale acestuia. După cum rezultă din Fig.1.3, lungimea traiectoriei Δs parcursă de mobil într-un interval de timp finit, Δt , diferă semnificativ de mărimea vectorului deplasare, $\Delta\vec{r}$. Așa cum vom vedea imediat, $\Delta\vec{r}$ ar fi o mărime mult mai convenabil de folosit pentru calcularea vitezei punctului material. Dacă considerăm $t_1 = t$ și $t_2 = t + \Delta t$, atunci, în condițiile în care $\Delta t \rightarrow 0$, vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ devine, la limită, egal cu distanța curbilinie Δs . În plus, $\Delta\vec{r}$ devine tangent la curba-traietorie (Fig.1.3).

În aceste circumstanțe, se poate defini *viteza instantanee* a mobilului:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

Constatăm, pe de altă parte, că viteza instantanee (sau momentană) este chiar derivata vec-

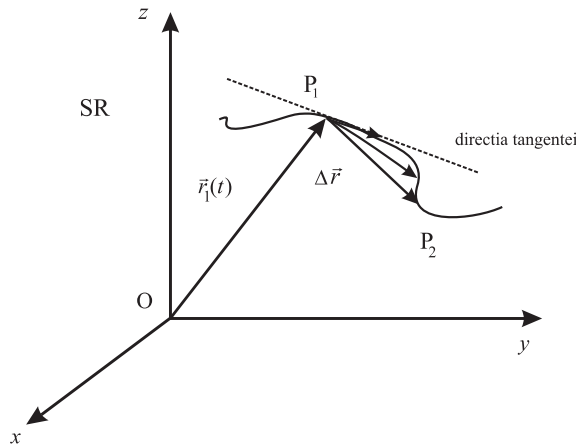


Figura 1.3: Pe măsură ce scade intervalul Δt , punctul P_2 se apropie din ce în ce mai mult de P_1 , iar vectorul deplasare tinde să ajungă pe direcția tangentei la traiectorie.

torului de poziție în raport cu timpul:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.9)$$

Ca urmare, *viteza instantanee (momentană)*, adică viteza mobilului într-un punct este un vector tangent la traiectorie; *mărimea sa este dată de derivata în raport cu timpul a vectorului său de poziție*. Vectorul viteza instantanee este tangent la traiectorie, în timp ce vectorul viteza medie are direcția secantei.

Pe de altă parte, pentru a calcula viteza medie a mobilului într-un interval de timp Δt , acesta se împarte în n subintervale $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ atât de mici, încât pe durata fiecărui subinterval viteza instantanee să rămână practic constantă⁶. Viteza medie se definește ca:

$$v_m = \frac{v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2 + \dots + v_n\Delta t_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^n v_i\Delta t_i. \quad (1.10)$$

Dacă aceste intervale de timp devin din ce în ce mai mici, vitezele medii pe fiecare interval de timp Δt_i se apropie de valorile instantanee și, ca urmare, suma din relația anterioară devine o integrală:

$$v_m = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n v_i\Delta t_i}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} v dt. \quad (1.11)$$

⁶Prin urmare, viteza instantanee poate să varieze prin salt doar la trecerea între intervalele Δt_i și Δt_{i+1} , $i = 1 \dots n$

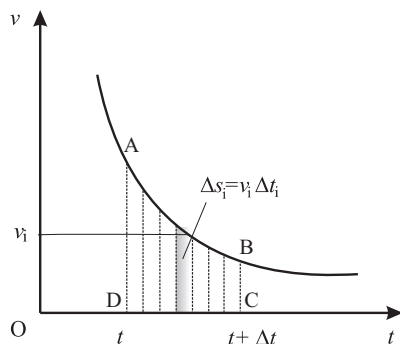


Figura 1.4: Pe durata fiecărui subinterval Δt_i , viteza rămâne practic constantă, v_i . Distanța parcursă în subintervalul i este $\Delta s = v_i \Delta t_i$

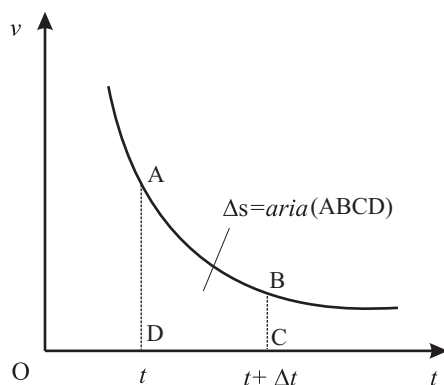


Figura 1.5: Spațiul total parcurs de mobil în intervalul de timp specificat reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor elementare.

Având în vedere cele două definiții ale vitezei medii, date de (1.10) și (1.11), rezultă:

$$\Delta s = v_m \Delta t = \int_t^{t+\Delta t} v dt = \text{aria}(ABCD). \quad (1.12)$$

Ca urmare, spațiul parcurs de mobil într-un interval oarecare de timp reprezintă, din punct de vedere geometric, aria de sub curba vitezei, delimitată de dreptele $t = \text{const.}$ și $t + \Delta t = \text{const.}$

Considerând momentul inițial $t = 0$, spațiul parcurs devine:

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t) dt, \quad (1.13)$$

unde s_0 este coordonata curbilinie inițială a corpului.

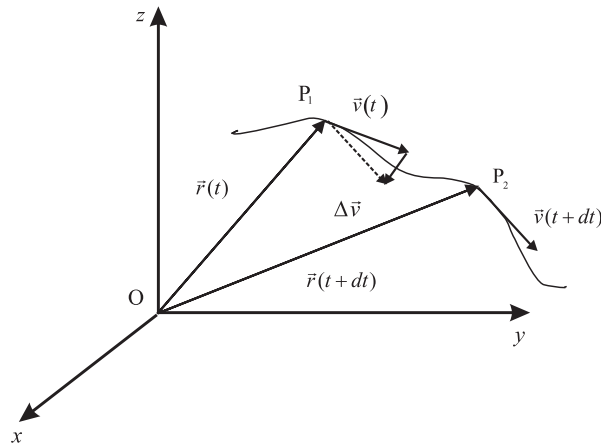


Figura 1.6: Determinarea variației vitezei $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)$ în intervalul de timp dt .

În termeni vectoriali, se poate scrie pentru vectorul de poziție la momentul t :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt, \quad (1.14)$$

unde \vec{r}_0 reprezintă vectorul de poziție la momentul inițial.

Dimensiunea și unitatea de măsură a vitezei sunt, respectiv:

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = LT^{-1}; \quad (1.15)$$

$$\langle v \rangle_{SI} = 1m \cdot s^{-1}. \quad (1.16)$$

1.3.2 Accelerația medie și accelerația instantanee

Pentru a caracteriza variația în timp a vectorului viteză, se definește o nouă mărime fizică, denumită *accelerație*. Ca și în cazul vitezei, se poate defini o *accelerație medie* și o *accelerație instantanee*. Accelerația medie este definită prin relația:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.17)$$

Mărimea accelerației medii a unui mobil care se deplasează între două puncte, de exemplu, P_1 și P_2 (Fig.1.6) depinde de variația netă a vitezei în intervalul considerat.

Pentru precizarea ratei de variație în timp a vitezei instantanee se introduce noțiunea de *accelerația instantanee*, definită prin relația:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.18)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.19)$$

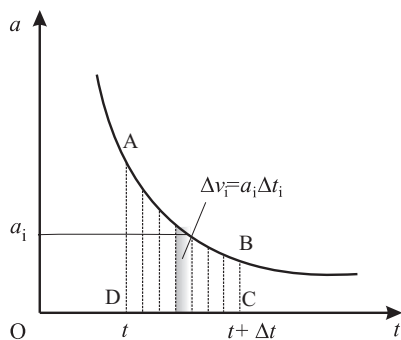


Figura 1.7: Variația vitezei în subintervalul i este $\Delta v_i = a_i \Delta t_i$, adică aria unui dreptunghi.

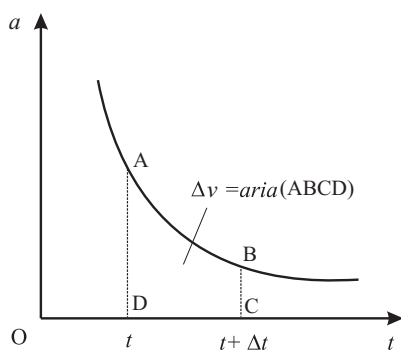


Figura 1.8: Sumarea după toate dreptunghiurile elementare determină aria de sub curbă accelerației

Accelerația este un vector care are orientarea lui $\Delta \vec{v}$. Ea reprezintă derivata de ordinul întâi a vitezei în raport cu timpul, prin urmare, derivata de ordinul doi a vectorului de poziție, $\vec{r}(t)$ în raport cu același parametru.

Având în vedere definițiile accelerației medii și ale accelerației instantanee, (1.17) și (1.20), se poate exprima accelerația medie și sub forma:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{a}_i \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \vec{a} dt. \quad (1.20)$$

Se poate introduce, ca și în cazul vitezei, o interpretare grafică. Pentru a determina variația de viteză a mobilului, în condițiile în care accelerația nu este constantă, împărțim intervalul de timp în subintervale pe care accelerația își păstrează valoarea constantă. Aria fiecărui dreptunghi cu înălțimea a și lățimea Δt_i reprezintă chiar variația de viteză mobilului în acest interval de timp.

Sumând acum ariile tuturor dreptunghiurilor elementare, se obține aria de sub curbă vitezei (analog cu situația prezentată în Fig.1.5).

$$\Delta v = \int_t^{t+\Delta t} a dt = \text{aria}(ABCD). \quad (1.21)$$

Ca urmare, variația de viteză are semnificația ariei de sub curba $a = a(t)$, în intervalul de timp finit considerat. Considerând momentul inițial $t = 0$, la un moment final oarecare, relația de mai sus se poate scrie, în cazul general:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt, \quad (1.22)$$

unde \vec{v}_0 reprezintă viteza inițială a corpului. În cazul particular, în care accelerația este constantă, iar mișcarea - unidimensională, relația (1.22) devine:

$$v(t) = v_0 + at, \quad (1.23)$$

iar (1.14):

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.24)$$

Dimensiunea și unitatea de măsură pentru accelerație sunt, respectiv:

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = LT^{-2}, \quad (1.25)$$

$$\langle a \rangle_{SI} = 1m \cdot s^{-2}. \quad (1.26)$$

1.4 Coordonate carteziene

În sistemul de *coordonate carteziene*, vectorul de poziție al unui , P , este descris prin coordonatele sale x, y, z , obținute prin proiecția lui P pe cele trei plane reciproc perpendiculare:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z). \quad (1.27)$$

Denumirea de coordonate carteziene vine de la numele lui René Descartes⁷.

În Fig.1.9, punctul P se găsește la intersecția a trei plane imaginare, reciproc perpendiculare, $x = x_1, y = y_1, z = z_1$. Fiecare dintre acestea sunt paralele cu planele triedrului drept $Oxyz$. Vom atribui apoi fiecăreia din axele triedrului $Oxyz$ câte un vector-unitate, orientat în sensul creșterii lui x, y , și, respectiv, z . Acești vectori-unitate, pe care noi îi vom nota cu $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ⁸, se numesc *versori* (Fig.1.9).

⁷René Descartes (1595-1650), matematician, fizician și filosof francez, cunoscut și sub numele său latinizat – Cartesius. Dintre contribuțiile sale cel mai importante în domeniul cunoașterii, pot fi amintite introducerea sistemului de coordonate carteziene și a geometriei analitice. Ca filosof, a marcat ruperea de scolastici, introducând principiile cunoașterii raționale. În două din cele mai importante cărți ale sale, *Discurs asupra metodei* (1637) și *Meditații* (1641), a încercat să extindă metodele cunoașterii matematice în toate domeniile cunoașterii. Este autorul celebrei aserțiuni *Cogito, ergo sum* (*Cuget, deci exist*). O scurtă biografie a lui R. Descartes poate fi găsită la adresa de web: <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Descartes.html>.

⁸Uneori ei se notează cu \hat{i}, \hat{j} și \hat{k} , sau \hat{e}_x, \hat{e}_y și \hat{e}_z

Deoarece orice vector poate fi exprimat ca o combinație liniară de acești trei versori, ei formează *baza sistemului*. Baza sistemului respectă regula burghiului drept, adică:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}. \quad (1.28)$$

De exemplu, vectorul de poziție se poate exprima prin relația:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}. \quad (1.29)$$

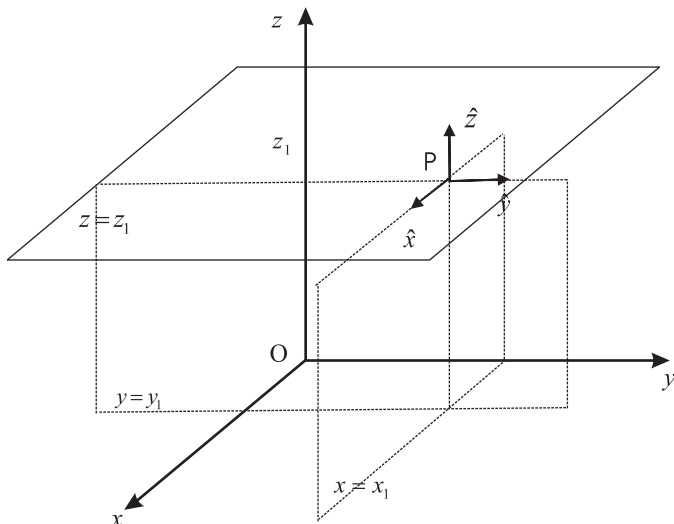


Figura 1.9: Sistemul de coordonate cartezian ($Oxyz$) și versorii ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$)

Vom găsi expresiile vitezei și accelerației, pornind de la expresia unei deplasări elementare, $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{x} + (y_2 - y_1)\hat{y} + (z_2 - z_1)\hat{z} = \Delta x \cdot \hat{x} + \Delta y \cdot \hat{y} + \Delta z \cdot \hat{z}. \quad (1.30)$$

Această expresie se poate găsi pe cale geometrică, considerând că orice deplasare reală reprezintă suma a trei deplasări succesive independente, în decursul cărora se modifică doar una din coordonate. Conform (Fig.1.10), se observă că:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y + \Delta\vec{r}_z, \quad (1.31)$$

unde $\Delta\vec{r}_x, \Delta\vec{r}_y, \Delta\vec{r}_z$ reprezintă deplasări "virtuale", efectuate pe direcțiile x, y , și z . Trecând la limita timpilor de observație foarte mici, $\Delta t \rightarrow 0$, expresia devine:

$$d\vec{r} = dx \cdot \hat{x} + dy \cdot \hat{y} + dz \cdot \hat{z}. \quad (1.32)$$

Făcând raportul dintre elementul de deplasare infinitezimală și intervalul de timp corespunzător acestuia, se obține expresia vitezei:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}. \quad (1.33)$$

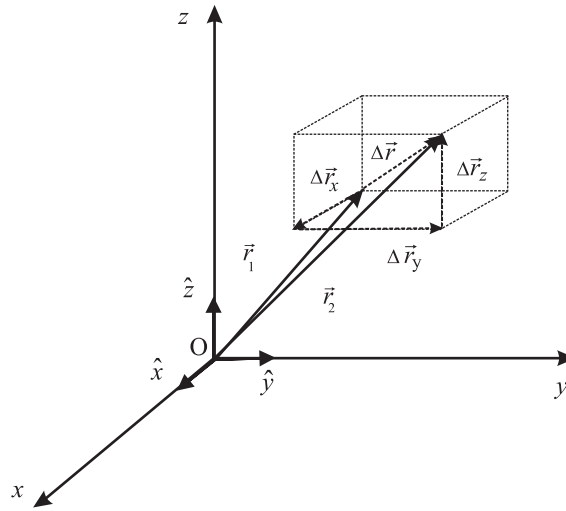


Figura 1.10: Descompunerea vectorului deplasare $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ după cele trei direcții independente

Mărimea vectorului viteză este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.34)$$

În mod similar se procedează pentru accelerație:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z} = \dot{v}_x\hat{x} + \dot{v}_y\hat{y} + \dot{v}_z\hat{z} \quad (1.35)$$

$$= \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}. \quad (1.36)$$

Mărimea vectorului accelerație este:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.37)$$

Un volum elementar dV în coordonate carteziene poate fi scris ca un produs de trei deplasări infinitezimale reciproc perpendiculare (Fig.1.10):

$$\Delta V = dx \cdot dy \cdot dz, \quad (1.38)$$

iar un element de suprafață în coordonate carteziene va avea expresia:

$$dA_z = dx \cdot dy; \quad dA_x = dy \cdot dz; \quad dA_y = dz \cdot dx. \quad (1.39)$$

Folosirea coordonatelor carteziene este preferată din motive de simplitate matematică. Aceasta se datorează și faptului că, fiind mereu orientați de-a lungul axelor triedrului drept, versorii \hat{x} , \hat{y} și \hat{z} rămân constanți în orientare și, ca urmare, derivatele lor în raport cu timpul sunt nule. În funcție de simetria mișcării și de datele concrete ale problemei de studiat, putem recurge și la alte tipuri de sisteme de coordonate. Dintre acestea, în cele ce urmează, ne vom referi la coordonatele *legate de mobilul în mișcare*.

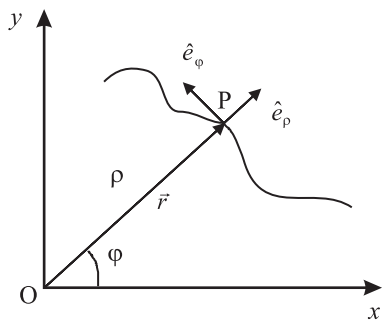


Figura 1.11: Sistemul de coordonate polare plane

1.5 Coordonate polare plane

Variabilele care descriu poziția mobilului în sistemul de *coordonate polare* plane sunt distanța până la origine, notată ρ și unghiul φ , măsurat în raport cu o axă de referință arbitrar aleasă (în cazul nostru Ox - Fig.1.11).

Legătura dintre coordonatele polare plane și cele carteziene se exprimă sub forma:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi; \\ y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Versorii sistemului de coordonate polare plane sunt \hat{e}_ρ și \hat{e}_φ .

Să considerăm, în cele ce urmează, o deplasare infinitesimală a mobilului din punctul P_1 în punctul P_2 (Fig.1.12). Vectorul deplasare corespunzător intervalului de timp dt este notat în cu $d\vec{r} = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1$. Această deplasare infinitesimală reală $d\vec{r}$ poate fi considerată ca o rezultanta unei succesiuni de deplasări virtuale după două direcții perpendiculare, $d\vec{r}_\varphi$ și $d\vec{r}_\rho$, în decursul cărora variază, pe rând, doar una dintre coordonate. Ca urmare, vectorul deplasare

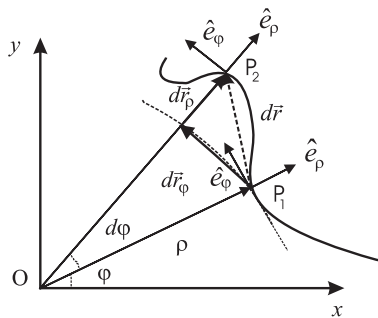


Figura 1.12: Vectorului deplasare infinitesimală $d\vec{r}$ se obține, aplicând regula triunghiului, ca o sumă de deplasări infinitesimale, în care variază mai întâi φ , apoi ρ .

infinitesimală poate fi scris sub forma:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\varphi + d\vec{r}_\rho, \quad (1.41)$$

în care:

- $d\vec{r}_\varphi$ (ρ constant, φ -variabil) reprezintă o deplasare infinitesimală de unghi $d\varphi$, pe un arc de cerc de rază ρ ;
- $d\vec{r}_\rho$ (φ constant, ρ -variabil) reprezintă o deplasare infinitesimală de-a lungul lui $\vec{\rho}(t+\Delta t)$ (translație de lungime $d\rho$).

Ca urmare, ținând cont de versorii direcțiilor de deplasare, se obține:

$$d\vec{r} = \rho d\varphi \hat{e}_\varphi + d\rho \hat{e}_\rho. \quad (1.42)$$

Prin împărțirea la intervalul de timp infinitesimal, dt , se obține:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \rho \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_\varphi + \frac{d\rho}{dt} \hat{e}_\rho = \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{\rho} \hat{e}_\rho = v_\varphi \hat{e}_\varphi + v_\rho \hat{e}_\rho. \quad (1.43)$$

S-au obținut două componente ale vitezei:

- o *componentă azimutală*, v_φ , determinată de variația vectorului de poziție doar ca orientare;
- o *componentă radială*, v_ρ , determinată de variația vectorului de poziție doar ca mărime.

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad (1.44)$$

$$v_\rho = \dot{\rho}. \quad (1.45)$$

Să calculăm, în continuare, expresia accelerației în coordonate polare plane. Spre deosebire de coordonatele carteziene, aici versorii \hat{e}_ρ și \hat{e}_φ își schimbă orientarea odată cu deplasarea punctului material pe traiectorie (Fig.1.12). Prin urmare:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{\rho} \hat{e}_\rho)}{dt} = \dot{\rho} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\hat{e}}_\varphi + \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{e}}_\rho. \quad (1.46)$$

Vom calcula derivata versorilor apelând din nou la considerente geometrice (Fig.1.13).

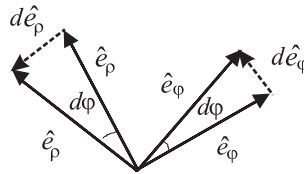


Figura 1.13: Determinarea geometrică a versorilor deplasare infinitesimală

Urmărind modul în care se schimbă direcția celor doi versori pentru o deplasare infinitesimală a particulei, se constată că:

$$d\hat{e}_\rho = |\hat{e}_\rho| d\varphi \hat{e}_\varphi; \quad (1.47)$$

$$d\hat{e}_\varphi = |\hat{e}_\varphi| d\varphi (-\hat{e}_\rho). \quad (1.48)$$

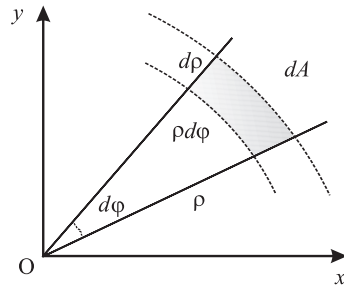


Figura 1.14: Un element de suprafață în coordonate polare plane.

Derivata fiecărui versor se obține prin simpla împărțire la intervalul de timp, dt :

$$\dot{\hat{e}}_\rho = \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{|\hat{e}_\rho| d\varphi \hat{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_\varphi = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi; \quad (1.49)$$

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = \frac{|\hat{e}_\varphi| d\varphi (-\hat{e}_\rho)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_\rho = -\dot{\varphi} \hat{e}_\rho. \quad (1.50)$$

După cum se observă, derivata fiecărui versor este un vector de mărime egală cu viteza de variație a coordonatei unghiulare și este orientată perpendicular față de direcția celui alt versor (Fig.1.13).

Revenind la formula accelerației se obține, după aranjarea termenilor, expresia finală:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi. \quad (1.51)$$

Ca și viteza, accelerația are două componente, *radială* și *azimutală* (sau transversală). Fiecare dintre termenii care apar în expresia accelerației sunt determinați de o anumită variație a vectorului viteză. De exemplu:

- termenul $\ddot{\rho}\hat{e}_\rho$ - datorat variației vitezei în mărime;
- termenul $2\dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$ (numit **accelerație Coriolis**) - datorat deplasării neuniforme a corpului pe o traiectorie curbilinie, de rază variabilă;
- termenul $\rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi$ - datorat variației în timp a vitezei unghiulare (vezi secțiunea următoare a acestui capitol);
- termenul $\rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho$ (**accelerație centripetă**) - datorat variației vitezei ca orientare.

Un element de suprafață (o suprafață infinitezimală) are, în coordonate polare plane, (Fig.1.14) expresia:

$$dA = d\rho \cdot \rho d\varphi. \quad (1.52)$$

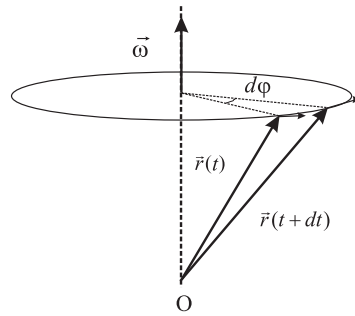


Figura 1.15: Reprezentarea vectorului viteză unghiulară.

1.5.1 Viteza unghiulară

Variația în unitatea de timp a unghiului descris de vectorul de poziție reprezintă o nouă mărime fizică, numită *viteză unghiulară*. Viteza unghiulară instantanee este limita acestui raport atunci când intervalul de timp tinde către zero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.53)$$

Se poate defini viteza unghiulară ca ”spațiul unghiular” (prescurtat – unghiul) parcurs de mobil în unitatea de timp. Viteza unghiulară este asociată întotdeauna mișcării de rotație. Direcția vectorului viteză unghiulară este perpendiculară pe planul de rotație a mobilului, iar sensul este dat de regula burghiului drept sau a mâinii drepte (Fig.1.15):

Dacă așezăm degetele împreunate în sensul de rotație, atunci, degetul mare orientat de-a lungul axei de rotație indică sensul vitezei unghiulare.

Viteza tangențială într-o mișcare circulară este legată de viteza unghiulară prin relația:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.54)$$

Dacă proiectăm vectorul $\vec{\omega}$ pe axele unui sistem de referință cartezian, atunci:

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}, \quad (1.55)$$

unde ω_x , ω_y , ω_z sunt componentele corespunzătoare pe axele Ox , Oy și Oz . Folosind exprimarea sub forma unui determinant a produsului vectorial, ecuația (1.54) se poate scrie sub forma:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (1.56)$$

$$= (\omega_y z - \omega_z y) \hat{x} + (\omega_z x - \omega_x z) \hat{y} + (\omega_x y - \omega_y x) \hat{z}. \quad (1.57)$$

Deoarece vectorul de poziție poate fi scris ca o matrice cu o singură linie,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

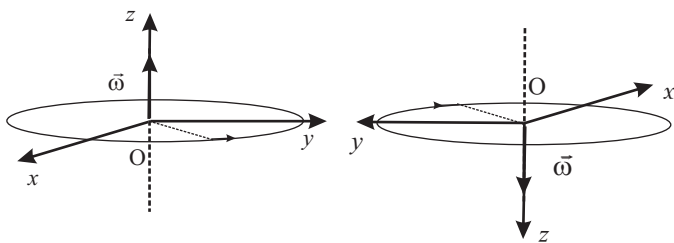


Figura 1.16: Ilustrarea operației de oglindire.

conform regulilor de înmulțire matriceală, vectorul \vec{v} poate fi exprimat ca rezultatul înmulțirii a două matrice:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\Rightarrow}{=} \vec{\Omega} \vec{r}. \quad (1.59)$$

Ca urmare, viteza unghiulară constituie un *tensor*. Acesta se caracterizează printr-o matrice cu trei linii și trei coloane:

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

Spre deosebire de viteză și accelerație care sunt *vectori polari* (au punctul de aplicație în punctul material), viteza unghiulară este un *vector axial*. Un *vector axial* nu are punctul de aplicație fixat într-un punct ci poate "aluneca" liber de-a lungul unei axe (perpendiculara pe traiectorie). Vectorii axiali, spre deosebire de cei polari, nu își schimbă sensul la operația de oglindire (atunci când $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$). În cazul lor, regula burghiului drept devine *regula burghiului stâng* adică $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$ (vezi Fig.1.16).

1.6 Coordonate naturale

Deplasarea unui mobil poate fi măsurată și cu ajutorul coordonatei curbilinii s , măsurată de-a lungul traiectoriei. În aceste condiții viteza este:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (1.61)$$

Se poate defini un versor, \hat{e}_t , tangent la traiectorie (Fig.1.17):

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot v = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad (1.62)$$

în legătură cu care viteza instantanee se poate exprima prin relația:

$$\vec{v} = v\hat{e}_t. \quad (1.63)$$

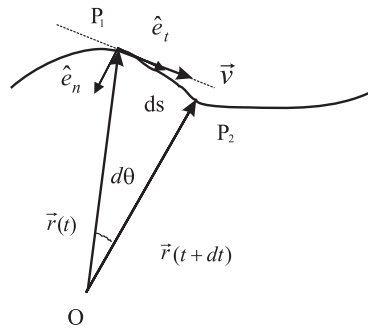


Figura 1.17: Versorii coordonatelor naturale plane (\hat{e}_t, \hat{e}_n).

Derivând în raport cu timpul expresia vitezei, rezultă expresia accelerației:

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{e}_t + v\dot{\hat{e}}_t. \quad (1.64)$$

O porțiune infinitesimală de traiectorie curbilinie, ds , poate fi considerată ca un arc de cerc de rază R , cu centrul în regiunea concavă a curbei. Se poate introduce apoi un al doilea versor, \hat{e}_n , perpendicular pe \hat{e}_t și îndreptat spre centrul de curbură a traiectoriei. Folosind același tip de raționament de calcul al derivatei unui versor ca și în cazul coordonatelor polare plane (Fig.1.17), se poate exprima derivata în raport cu timpul a lui \hat{e}_t .

$$\dot{\hat{e}}_t = \frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\hat{e}_t}{ds} = v \frac{|\hat{e}_t| d\varphi \hat{e}_n}{ds} = v \frac{d\varphi}{ds} \hat{e}_n. \quad (1.65)$$

Gradul de abatere a traiectoriei de la linia dreaptă se măsoară prin mărimea numită *curbura*. Se definește *curbura traiectoriei* într-un punct ca inversul razei de curbură, R . Expresia curburii traiectoriei rezultă din relația:

$$R = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}. \quad (1.66)$$

Așadar, accelerația are expresia:

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{e}_t + \frac{v^2}{R}\hat{e}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (1.67)$$

Termenul \vec{a}_t - se numește *accelerație tangențială* iar \vec{a}_n - *accelerație normală*. Informațiile despre curbura traiectoriei sunt incluse în valoarea accelerației normale (\vec{a}_n), determinată de variația vitezei doar ca orientare.

1.7 Coordonate cilindrice

În sistemul de coordonate cilindrice, poziția mobilului este precizată în orice moment de coordonatele:

- ρ - distanța de la punctul P la axa Oz ;

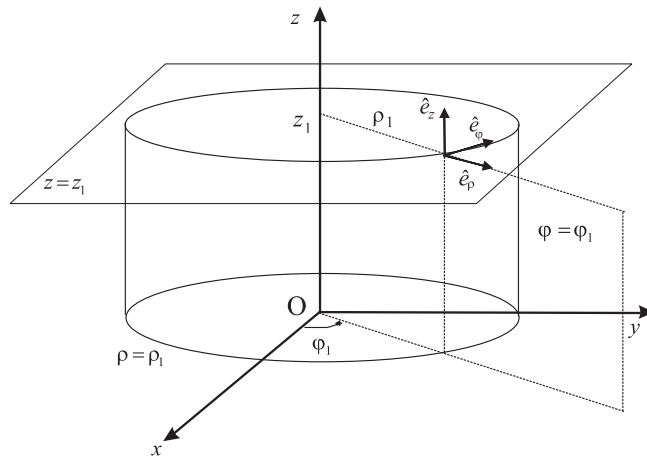


Figura 1.18: Sistemul de coordonate cilindrice (ρ, φ, z) .

- φ – unghiul dintre direcția lui ρ și axa Ox , denumit și *unghi azimutal*;
- z – distanța de la punctul P la planul orizontal, xOy , denumită și *cotă*⁹.

Denumirea acestui tip de coordonate provine de la forma locului geometric a punctelor pentru care (Fig.1.18):

- $\rho = \rho_1 = \text{const.}$, care este suprafața unui cilindru cu generatoarea paralelă cu axa Oz ;
- $z = z_1 = \text{const.}$, care este un plan de cotă;
- $\varphi = \varphi_1 = \text{const.}$, care este un plan vertical, ce conține axa de simetrie Oz a cilindrului.

Limitele în care pot varia cele trei coordonate cilindrice sunt: $0 - \infty$ pentru ρ , $0 - 2\pi$ pentru φ și $0 - \infty$ pentru z .

Vom nota cu $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z$ (Fig.1.18) versorii corespunzători direcțiilor specificate de cele trei coordonate cilindrice. Și în acest caz, cei trei versori formează o bază ortonormată. Sensul acestor versori va fi sensul creșterii lui ρ, φ și z . Sistemul constituie un triedru orientat, în sensul că se respectă și în acest caz regula burghiului drept (sau a mâinii drepte):

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z. \quad (1.68)$$

Să determinăm, în cele ce urmează, vectorul deplasare infinitezimală între punctele P_1 și P_2 (Fig.1.19) de pe traiectorie, ca o compunere de trei deplasări independente, după direcțiile date de versorii sistemului de coordonate cilindrice:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\rho + d\vec{r}_\varphi + d\vec{r}_z. \quad (1.69)$$

⁹De fapt coordonatele cilindrice sunt o generalizare a coordonatelor polare plane, obținută prin adăugarea celei de-a treia dimensiuni, z .

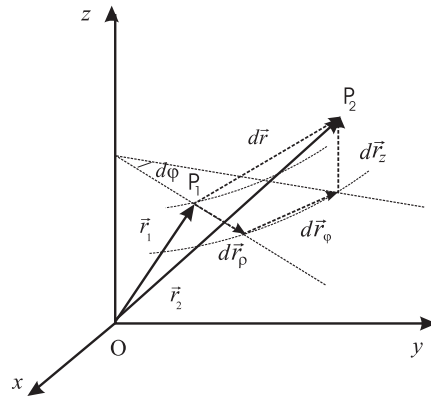


Figura 1.19: Descompunerea vectorului deplasare infinitesimală după trei direcții independente, $d\vec{r}_\rho$, $d\vec{r}_\varphi$, $d\vec{r}_z$.

Mărimile fiecărei deplasări infinitesimale pot fi approximate direct din Fig.1.19, ceea ce înseamnă:

$$d\vec{r} = d\rho\hat{e}_\rho + \rho d\varphi\hat{e}_\varphi + dz\hat{e}_z. \quad (1.70)$$

Împărțind la intervalul de timp infinitesimal, obținem expresia vitezei în coordonate cilindrice:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\hat{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{e}_z. \quad (1.71)$$

Derivând relația vitezei și ținând seama că \hat{e}_z este singurul versor care își păstrează orientarea neschimbată în timp, $\dot{\hat{e}}_z = 0$, și că derivatele celorlalți doi versori au fost deja determinate (1.49), (1.50), se obține ușor expresia accelerației în coordonate cilindrice:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\hat{e}_z. \quad (1.72)$$

În această expresie, identificăm cu ușurință primii doi termeni care apăreau și în expresiei accelerației în coordonate polare plane. La acestea se adaugă termenul datorat deplasării de-a lungul axei Oz.

Elementul de suprafață în coordonate cilindrice are una din expresiile:

$$dA_\rho = \rho d\varphi dz; \quad dA_\varphi = d\rho dz; \quad dA_z = \rho d\rho d\varphi, \quad (1.73)$$

iar cel de volum este:

$$dV = dAd\rho = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (1.74)$$

1.8 Coordonate sferice

În sistemul de coordonate sferice, poziția unui punct, P , (vezi Fig. 1.21) este descrisă de coordonatele:

- r - distanța de la *polul* O la punctul P ;

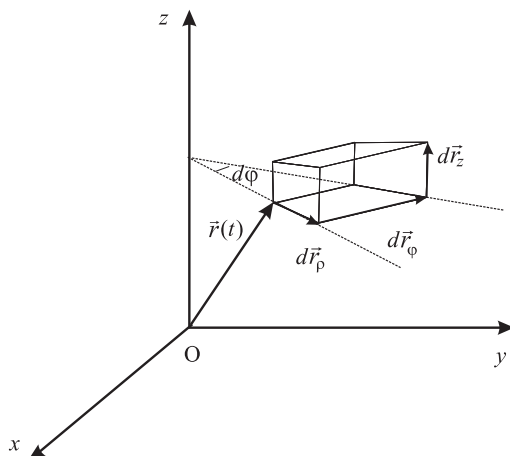


Figura 1.20: Un element de suprafață și un element de volum în coordonate cilindrice.

- φ - unghiul măsurat între axa Ox și proiecția lui OP din planul orizontal, denumit și *unghi azimutal*;
- θ - unghiul măsurat în plan vertical, între OP și axa verticală Oz , denumit și *colitudine*.

Facem precizarea că în geografie se folosește un sistem de coordonate înrudit, în care planul ecuatorial xOy se caracterizează prin latitudine zero. Complementul unghiului θ se numește, în termeni geografici, *latitudine nordică*, iar suplementul lui θ se numește *latitudine sudică*. În aceiași termeni, φ se numește *longitudine estică*, respectiv *vestică*.

După cum se observă în Fig.1.21, locul geometric al punctelor pentru care $r = r_1$ (const.) este o sferă; $\varphi = \varphi_1$ (const.) este un plan, iar $\theta = \theta_1$ (const.) este un con. Ca urmare, limitele de variație pentru cele trei coordonate sunt: $0 - \infty$ pentru r ; $0 - 2\pi$ pentru φ ; $0 - \pi$ pentru θ .

Poziției unui punct P i se atașează, în acest caz, un ansamblu de trei versori reciproc perpendiculari, $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ îndreptați în direcția de creștere a coordonatelor r, θ , și φ . Sistemul celor trei versori, ce formează, de asemenea, o bază ortonormată, este orientat respectând regula burghiului drept, astfel că:

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi. \quad (1.75)$$

Legătura dintre coordonatele sferice și cele carteziane este exprimată prin relațiile:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi; \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi; \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.76)$$

În conformitate cu Fig.1.22, se poate exprima legătura dintre versorii celor două sisteme de coordonate. Se observă că doar versorul \hat{e}_φ este situat într-un plan orizontal (paralel cu planul ecuatorial xOy) ceilalți versori aflându-se în plan vertical.

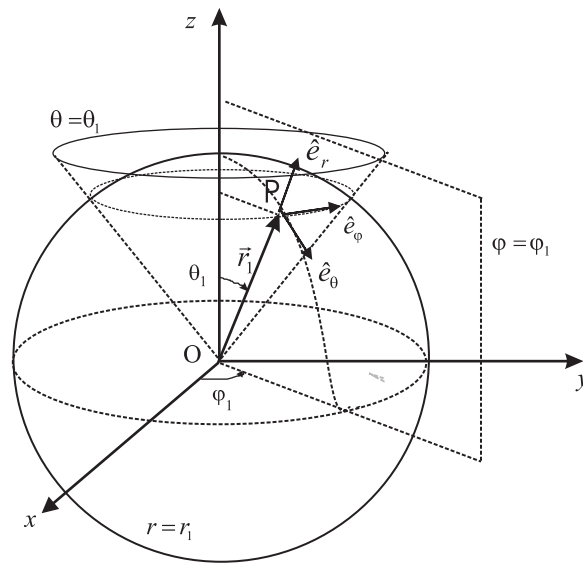


Figura 1.21: Sistemul de coordonate sferice (r , θ și φ) și versorii corespunzători.

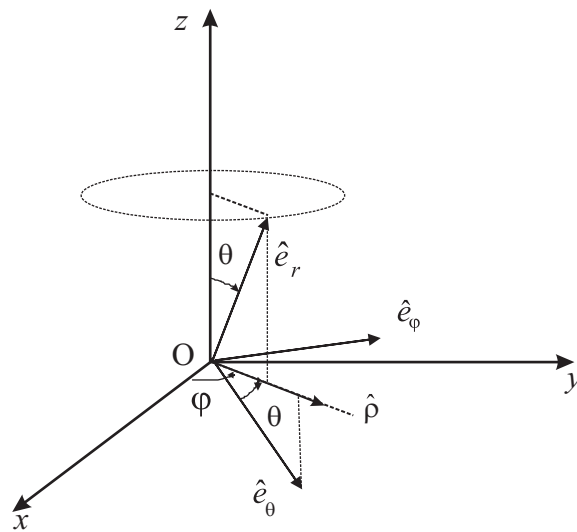


Figura 1.22: Orientarea versorilor sistemului de coordonate sferice, în raport cu un sistem de coordonate cartezian.

Vom nota cu $O\rho$ dreapta ce se obține prin intersecția planului ecuatorial cu un plan meridianal $\varphi = \text{const}$ și cu $\hat{\rho}$ versorul acestei direcții. Expresia lui $\hat{\rho}$ se va scrie ca:

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}. \quad (1.77)$$

Ca urmare, vom putea scrie expresiile versorilor coordonatelor sferice, în funcție de proiecțiile lor pe axele unui sistem de coordonate cartezian sub forma:

$$\hat{e}_r = \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}; \quad (1.78)$$

$$\hat{e}_\theta = \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{z} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}; \quad (1.79)$$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}. \quad (1.80)$$

Așa cum vom vedea în continuare, aceste ultime ecuații pot fi folosite în mod convenabil pentru calculul derivatelor versorilor în raport cu timpul.

În coordonatele sferice, poziția mobilului este descrisă în orice moment de vectorul de poziție \vec{r} , orientat de-a lungul versorului \hat{e}_r . Acest versor își schimbă orientarea odată cu deplasarea punctului material, fiind dependent de celelalte coordonate unghiulare, θ și φ , după cum indică și relația matematică găsită mai sus. Ca urmare:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r(\theta, \varphi). \quad (1.81)$$

Determinăm viteza și apoi accelerația folosind relațiile de definiție:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r \hat{e}_r) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r. \quad (1.82)$$

Pentru calculul derivatei în raport cu timpul a versorului \hat{e}_r putem recurge, fie la considerente de natură geometrică, așa cum am procedat în cazul celorlalte sisteme de coordonate analizate până în prezent, fie la calculul diferențial. Să alegem, în continuare, această a doua variantă. Observăm că dependența de timp a versorului \hat{e}_r nu este explicită, ci rezultă implicit din faptul că variabilele θ și φ sunt funcții de timp. Ca urmare, vom exprima derivata în raport cu timpul prin intermediul acestor două funcții compuse $\theta = \theta(t)$ și $\varphi = \varphi(t)$:

$$\dot{\hat{e}}_r = \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} + \dot{\varphi} \frac{d\hat{e}_r}{d\varphi}. \quad (1.83)$$

Se observă că avem nevoie și de derivatele versorului în raport cu celelalte variabile. Le vom calcula folosind relațiile (1.78), (1.79), (1.80):

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} = \hat{e}_\theta; \quad (1.84)$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\varphi} = -\sin \theta \sin \varphi \hat{x} + \sin \theta \cos \varphi \hat{y} = \sin \theta \hat{e}_\varphi. \quad (1.85)$$

Înlocuind, obținem:

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi. \quad (1.86)$$

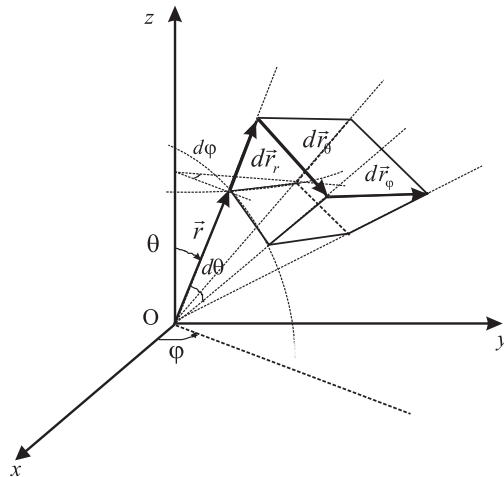


Figura 1.23: Elementul de suprafață și elementul de volum în coordonate sferice.

Folosind acest rezultat, putem scrie expresia finală a vitezei în coordonate sferice:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{e}_\varphi. \quad (1.87)$$

Așa cum am văzut în toate cazurile anterioare, derivând în raport cu timpul expresia vitezei și ținând cont de expresiile derivatelor versorilor, găsim:

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\sin\theta\cos\varphi\hat{x} - \sin\theta\sin\varphi\hat{y} - \cos\theta\hat{z} = -\hat{e}_r; \quad (1.88)$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{d\varphi} = -\cos\theta\sin\varphi\hat{x} + \cos\theta\cos\varphi\hat{y} = \cos\theta\hat{e}_\varphi; \quad (1.89)$$

$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{d\theta} = 0; \quad (1.90)$$

$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{d\varphi} = -\cos\varphi\hat{x} - \sin\varphi\hat{y} = -\hat{\rho} = -\sin\theta\hat{e}_r - \cos\theta\hat{e}_\theta. \quad (1.91)$$

Cu aceste rezultate se poate scrie expresia finală a accelerației în coordonate sferice:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\theta + \quad (1.92)$$

$$+ (r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{e}_\varphi. \quad (1.93)$$

Elementele de suprafață și de volum este sunt arătate în Fig.1.23. Expresiile lor matematice se obțin prin înmulțirea a două și, respectiv, trei laturi infinitezimale reciproc perpendiculare, îndreptate de-a lungul direcțiilor versorilor \hat{e}_r , \hat{e}_θ și \hat{e}_φ . Suprafața elementară, considerată în primă aproximație dreptunghi, este cuprinsă între două meridiane ce diferă între ele prin unghiul $d\varphi$ și două paralele ce diferă prin unghiul $d\theta$. Expresia elementului de suprafață este dată de una din relațiile:

$$dA_r = rd\theta \cdot r\sin\theta \cdot d\varphi; \quad dA_\varphi = rd\theta \cdot dr; \quad dA_\theta = r\sin\theta \cdot d\varphi \cdot dr. \quad (1.94)$$

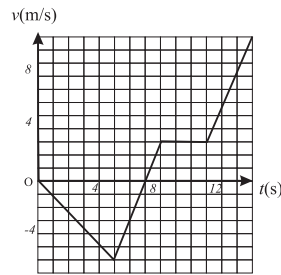


Figura 1.24

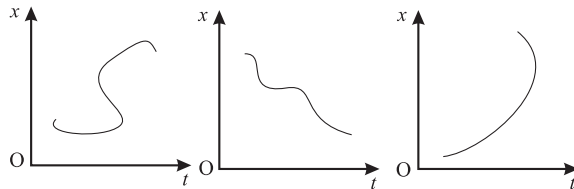


Figura 1.25

Elementul de volum (Fig.1.23) va avea expresia:

$$dV = dA \cdot dr = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad (1.95)$$

1.9 Probleme

- Poate avea un corp viteză zero și totuși să fie accelerat?
 - Poate varia direcția vitezei unui corp dacă accelerația este constantă?
- Viteza unui obiect în funcție de timp este dată în graficul din Fig.1.24. Găsiți:
 - Accelerația medie a obiectului în intervalele de timp: (i) 0 - 1s; (ii) 1s - 3; (iii) 3 s - 4s;
 - Accelerația instantanee la momentul $t = 2$ s.
 - Care este distanța străbătută în primele două secunde de mișcare?
- Descrieți mișcările reprezentate prin graficele din Fig.1.25, în termeni de viteză. Care dintre următoarele reprezentări nu pot descrie mișcarea reală a unui corp și de ce?
- Ecuția de mișcare a unui tren este dată de expresia: $x(t) = 27.0 - 15 * t^2 + t^3$. Care sunt momentele de timp la care el s-a oprit?
- Un mobil parcurge jumătate dintr-o anumită distanță cu viteza v_0 . Restul distanței îl parcurge astfel: o jumătate din timp cu viteza v_1 , cealaltă - cu viteza v_2 . Calculați viteza medie pe durata întregii deplasări.

$$\text{Răspuns: } v_m = \frac{2v_0(v_1+v_2)}{v_1+v_2+2v_0}$$

6. Ecuațiile mișcării unui mobil sunt: $x = A \cos \omega t, y = B \sin \omega t, z = ct$ - unde A, B, c sunt constante pozitive. Să se afle ecuațiile:

- vitezei;
- acceleerației;
- traieectoriei;
- razei de curbura a traieectoriei.

7. Un mobil pornește cu viteza inițială $v_0=20$ m/s și se oprește după un timp $t_m = 20$ s. Dependența de timp a vitezei este dată de un grafic de forma unui sfert de elipsă cu semiaxele v_0 și t_m . Determinați spațiul total parcurs de mobil.

$$\text{Răspuns: } s = \frac{\pi v_0 t_m}{4} = 314 \text{ m.}$$

8. Accelerația normală a unui corp care se deplasează pe un cerc de rază R este $a_n = \alpha t + \beta$, cu α și β - constante pozitive. Să se determine accelerația tangențială și spațiul parcurs de mobil. Se consideră că la $t = 0, s = 0$.

$$\text{Răspuns: } a_t = \frac{2\alpha\sqrt{R}}{\sqrt{\alpha t + \beta}}, s = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R}{\alpha}}(\alpha t + \beta)^{3/2}$$

9. Un mobil se mișcă pe o traieectorie circulară după legea $s = ct^3$ unde $c = 0.1$ cm/s³. Să se afle accelerația tangențială în momentul când viteza este $v=0.3$ m/s.

10. Un punct material se mișcă pe o hiperbolă echilaterală $xy = k^2$ păstrându-și în fiecare moment modulul vitezei constant. Să se determine:

- componentele vitezei pe axele Ox și Oy ;
- acceleerația;
- raza de curbura.

$$\text{Răspuns: (a) } v_x = -\frac{v}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}; v_y = \frac{v}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}}; \text{ (b) } a = \frac{2v^2k^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}; \text{ (c) } R = \frac{1}{2k^2}(x^2+y^2)^{3/2}$$

11. Un mobil descrie o traieectorie plană, astfel încât $v_x = c = \text{const}$. Să se arate că accelerația se poate scrie în acest caz sub forma $a = \frac{v^3}{Rc}$, unde v este viteza mobilului și R raza de curbura.

12. Să se calculeze în coordonate polare plane expresia $\vec{v} \times \vec{a}$ și apoi să se deducă raza de curbura a traieectoriei. În particular se va considera unghiul polar φ ca măsură a timpului.

$$\text{Răspuns: } \vec{v} \times \vec{a} = \frac{\dot{r}^3}{R} \hat{e}_b, \text{ unde } \hat{e}_b \text{ este cel de-al treilea versor, denumit al } \textit{binormalei}, \text{ și care, împreună cu } \hat{e}_t \text{ și } \hat{e}_n \text{ formează un triedru drept (numit } \textit{triedru Frénet}). R = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} = \frac{r^2 - rr'' + 2rr'/^2 + 2r'^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}, \text{ unde } (') \text{ înseamnă aici derivata în raport cu variabila } \varphi.$$

13. Determinați, folosind argumente de natură geometrică și trigonometrică, expresiile vitezei și accelerației în coordonate sferice.

14. Un punct material se mișcă uniform pe o sferă, astfel încât traiectoria sa face un unghi constant, α , cu meridianele pe care le intersectează. Să se afle:

- (a) ecuația traiectoriei;
 (b) ecuațiile parametrice ale mișcării;
 (c) expresia razei de curbură a traiectoriei.

Răspuns: (a). $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = e^{\varphi \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$; (b). $r = \text{const}$; $\theta = \frac{vt}{r} \cos \alpha$; $\varphi = \operatorname{tg} \alpha \cdot \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{vt}{r} \frac{\cos \alpha}{r} \right) \right]$; $R = \frac{1}{r} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}$

15. Găsiți componentele vitezei unei particule care se mișcă pe o spirală descrisă de coordonatele: $\rho = a$, $\varphi = bt$, $z = -ct$ unde t este timpul, iar a , b și c sunt constante pozitive.

Răspuns: $\vec{v} = ab\hat{e}_\varphi - c\hat{e}_z$; $\vec{a} = -ab^2\hat{e}_\rho$

16. Un satelit se mișcă pe o orbită circulară în jurul Pământului, la altitudinea de 509 km (6880 km față de centrul Pământului) și traversează Polul Nord la fiecare 94 minute și 35 secunde. Relativ la **SR** legat de satelit, Pământul execută o rotație completă în jurul axei sale polare, la fiecare 23,934 ore. Găsiți viteza și accelerația satelitului față de Pământ în poziția corespunzătoare latitudinii $\varphi = 45^\circ$.

Răspuns: $v = 7.626 \text{ km/s}$; $a = 8.848 \text{ m/s}^2$

Dinamica punctului material

Mișcarea corpurilor având: (a) viteze mult inferioare vitezei luminii și (b) loc în domenii spațiale macroscopice este studiată de *mecanica newtoniană*. Denumirea a fost atribuită în onoarea fizicianului I. Newton¹.

Mișcarea corpurilor cu viteze comparabile cu viteza luminii constituie obiectul de studiu al *mecanicii relativiste*, în timp ce mișcarea unor corpuri (particule) în interiorul unor domenii microscopice (cum este, de exemplu, în interiorul atomilor) constituie obiect de studiu pentru *mecanica cuantică*. Obiectul de studiu al mecanicii newtoniene îl constituie, așadar, sisteme fizice ce pot fi considerate cazuri limită ale celor două domenii sus-menționate. De altfel, atât mecanica relativistă, cât și cea cuantică au apărut mult mai târziu, la începutul secolului XX.

Așa cum am arătat și în capitolul anterior, partea mecanicii care studiază mișcarea corpurilor, în contextul cauză-efect, este *Dinamica*. Dinamica newtoniană se fundamentează pe trei principii, care constituie adevăruri ce nu trebuie demonstrate, ci verificate prin consecințe. Începuturile dinamicii sunt legate de contribuțiile lui Galileo Galilei în secolele XVI-XVII.

2.1 Principiile dinamicii newtoniene

2.1.1 Noțiuni introductive

Corpurile din lumea reală se află în permanență în interacțiune, chiar dacă, uneori, efectele acestei interacțiuni sunt dificil de pus în evidență. Intensitatea interacțiunii dintre corpuri este exprimată prin noțiunea de *forță*, o noțiune introdusă în fizică pe baza experienței noastre senzoriale, mai precis a efortului depus pentru accelerarea unor corpuri sau pentru menținerea lor într-o anumită stare de echilibru mecanic.

¹Isaac Newton (1642-1727) fizician englez este considerat fondatorul științelor naturii în epoca modernă. Printre cele mai importante contribuții științifice ale lui I. Newton amintim: introducerea calculului diferențial, formularea principiilor mecanicii clasice, studii asupra naturii luminii și a unor instrumente optice, descoperirea legii atracției universale. Principala sa lucrare, *Principiile matematice ale filosofiei naturale*, este și astăzi considerată una din cele mai valoroase cărți de știință publicate de-a lungul anilor. Informații suplimentare despre viața și opera științifică a lui Newton pot fi găsite la adresa de web: <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Newton.html>.

Studiind mișcarea oricărui corp din jurul nostru, este imposibil să ignorăm, de exemplu, efectul uriaș al celui mai important corp din imediata vecinătate - Pământul. Acesta atrage toate corpurile cu forțe a căror intensitate este, cu foarte puține excepții, foarte importantă. Se înțelege că, pentru a studia doar mișcarea unor corpuri, ca efect al altor forțe decât cea de greutate, este necesar să compensăm în efect forțele lor de greutate. Cum, în general, efectul forțelor exterioare nu se poate elimina în totalitate niciodată, se poate imagina, ca model de studiu, un *punct material liber, sau izolat*, ca fiind un corp de dimensiuni neglijabile, care se află sub efectul unei forțe exterioare rezultante de valoare nulă².

Așa cum am amintit în capitolul anterior, mișcarea corpurilor poate fi studiată doar prin raportare la un reper exterior. De aceea, caracteristicile mișcării depind de proprietățile reperului utilizat. În mecanică este convenabil, de cele mai multe ori, ca mișcarea corpurilor să fie raportată la un tip particular de reper, așa-numitul *reper spațio-temporal inerțial*, sau mai pe scurt, *reper inerțial*. Reperul față de care un punct material liber se deplasează rectiliniu se numește *reper spațial inerțial*. Reperul față de care un punct material liber se mișcă uniform se numește *temporal inerțial*. În concluzie, un sistem de referință se va numi inerțial, dacă în raport cu acesta, un punct material liber se deplasează rectiliniu și uniform, deci cu viteză constantă în modul și orientare.

O mărime fizică importantă în studiul dinamicii punctului material este aceea de *impuls mecanic* sau *cantitate de mișcare*. Noțiunea de cantitate de mișcare a fost introdusă de R. Descartes în 1645 și a fost utilizată de Newton în 1686 în formularea principiilor dinamicii.

Prin definiție, cantitatea de mișcare sau impulsul unui punct material este:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.1)$$

Cum \vec{v} este definit întotdeauna în raport cu un referențial anume, impulsul \vec{p} al unui corp va avea valori diferite în raport cu referențiale diferite.

În fizică, noțiunea de cantitate de mișcare se mai denumește și *moment liniar* sau *momentum* (în cărțile de limbă engleză). De fapt, denumirea vine din latină, *momentum* fiind o prescurtare a cuvântului *movimentum*, adică mișcare. Această mărime se numește impuls, din cauza rolului său esențial în analiza problemelor de ciocnire (de care ne vom ocupa în unul din capitolele următoare). Impulsul se mai numește și *moment liniar*, pentru a-l deosebi de o altă mărime fizică importantă în studiul mișcării de rotație, care se numește *moment unghiular* (sau *moment cinetic*).

Dimensiunea impulsului și unitatea sa de măsură în SI sunt:

$$[p] = [m][v] = MLT^{-1}; \quad (2.2)$$

$$\langle p \rangle_{SI} = 1Kg \cdot m \cdot s = 1N \cdot s \quad (2.3)$$

2.1.2 Enunțul principiilor dinamicii

1. *Principiul I*, cunoscut și ca *principiul inerției*: Un punct material tinde să-și mențină starea de repaus relativ sau de mișcare rectilinie și uniformă, atât timp cât nu se află sub acțiunea unor forțe exterioare.

²Așa cum vom vedea ulterior, condiția de punct material liber este satisfăcută uneori doar parțial. De exemplu, ea poate fi valabilă doar *de-a lungul unei singure direcții*, alteleori *doar pe durata unui interval de timp extrem de scurt*, în așa fel, încât forțele externe să nu producă efecte detectabile.

2. *Principiul II*, cunoscut și ca *principiul fundamental al dinamicii*: Rata de variație în timp a impulsului unui punct material este egală cu forța rezultantă ce acționează asupra acestuia:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.4)$$

3. *Principiul III*, cunoscut și ca *principiul acțiunii și reacțiunii*: Dacă două corpuri se află în interacțiune, forțele "resimțite" de fiecare în parte sunt egale ca mărime, dar opuse ca sens. Aceste forțe perechi, numite *acțiune* și, respectiv, *reacțiune* se manifestă asupra a două corpuri diferite.

Să discutăm, în continuare, câteva dintre implicațiile acestor principii.

- O primă observație, de ordin general: cele trei principii ale dinamicii sunt adevăruri valabile *doar în raport cu un sistem de referință inerțial, SRI*. În practică, cel mai utilizat **SRI** este așa-numitul *sistem al laboratorului*, prescurtat **SL**. Trebuie precizat că denumirea de sistem al laboratorului nu trebuie luată *ad literam*, în sensul că ea nu presupune ca studiul mișcării să se facă exclusiv într-un laborator. Din modul în care a fost definit un **SRI**, rezultă că un sistem de referință care se deplasează *accelerat* în raport cu un **SRI** este *neinerțial*³.
- Interacțiunile dintre corpuri se realizează, fie direct (prin contact fizic), fie la distanță, prin intermediul câmpului (gravitațional, electromagnetic, etc.).
- Tendința corpurilor de a-și păstra starea de mișcare sau de repaus relativ se numește *inerție*. În termeni cantitativi, măsura inerției este exprimată de mărimea fizică denumită *masa inertă* sau *masă inerțială* și a fost notată cu m în ecuația (2.4). Se înțelege că, cu cât este mai mare masa inertă a punctului material, cu atât mai mare este inerția acestuia la modificarea stării de mișcare.
- Având în vedere că, în mecanica newtoniană, masa inertă este o mărime independentă de timp, ecuația principiului II al dinamicii se poate scrie și sub forma:

$$\frac{m d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.5)$$

Aceasta este o formulare mai puțin generală decât ecuația (2.4). Conform ecuației (2.5) o aceeași forță \vec{F} va produce accelerații diferite, când acționează asupra unor corpuri de masă diferită, *însă va produce întotdeauna o aceeași variație de impuls oricărui corp, indiferent de masa inertă a acestuia*.

Formularea (2.4) este valabilă chiar și în mecanica relativistă, caz în care multe dintre adevărurile mecanicii clasice nu mai sunt valabile. De exemplu, dacă în mecanica clasică accelerația, conform ecuației (2.5), este direct proporțională cu forța, iar vectorii forță

³Deoarece sistemul laboratorului este legat de Pământ și execută o mișcare de rotație, împreună cu acesta, nici măcar **SL** nu este *in mod riguros* un reper inerțial, decât într-o primă aproximație.

și accelerație au aceeași orientare, în mecanica relativistă se demonstrează că acești doi vectori nu mai sunt paraleli între ei⁴.

- Ecuația (2.5) este esențială în mecanică, deoarece ea exprimă o legătură directă între factorul cauză (forța) și factorul efect acesteia (accelerația).
- Ecuația vectorială (2.5) este echivalentă, într-un spațiu tridimensional, cu trei ecuații scalare. De exemplu, într-un sistem de coordonate carteziene, acestea sunt:

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (2.6)$$

$$F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad (2.7)$$

$$F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (2.8)$$

- Toate forțele întâlnite în fizică exprimă intensitatea unor interacțiuni, reductibile la patru tipuri fundamentale: (a) gravitaționale; (b) electromagnetice; (c) nucleare tari și (d) nucleare slabe. Cele mai multe dintre interacțiunile dinafara celor fundamentale sunt reductibile la forțe de natură electromagnetică.
- Conform principiului III al dinamicii, în cazul unui sistem izolat de două puncte materiale, accelerațiile pe care fiecare corp din pereche le capătă sub influența celuilalt, sunt orientate pe aceeași direcție, sunt opuse ca sens și invers proporționale cu masele lor. Forțele nu există în afara interacțiunii dintre perechi de corpuri. Este foarte important de menționat că *perechile acțiune-reacțiune acționează asupra unor corpuri diferite*.
- Pe baza principiului III al dinamicii se poate imagina un procedeu de comparare a maselor. Dacă două puncte materiale sunt supuse doar acțiunii celor două forțe - perechi, $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ și $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, cu:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \text{și} \quad \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}, \quad (2.9)$$

rezultă că:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0, \quad \text{deci } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{const.} \quad (2.10)$$

Așadar, impulsul unui sistem de două puncte materiale *izolate* este o constantă vectorială. În raport cu un referențial dat, \mathbf{R} , între impulsurile unui punct material la două momente t și t' diferite se poate scrie relația:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad \text{sau} \quad m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2. \quad (2.11)$$

Prin urmare:

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = -m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}'_2) \quad (2.12)$$

⁴În mecanica relativistă se consideră că masa depinde de viteză, conform unei relații de forma: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,

unde m_0 este masa de repaus a corpului, v - viteza acestuia, iar c - viteza luminii.

și deci:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{v}'_2 - \vec{v}_2|}{|\vec{v}'_1 - \vec{v}_1|} \quad (2.13)$$

- Ori de câte ori studiul experimental al mișcării nu concordă aparent cu previziunile teoretice ale principiilor dinamicii, este nevoie de verificat dacă:
 1. am definit corect sistemul de studiat și dacă nu am uitat să luăm în considerare o anumită interacțiune;
 2. reperul utilizat aproximează într-o măsură adecvată condiția de reper galilean;
 3. scara de timp este suficient de precisă;
 4. expresiile concrete ale forțelor sunt corecte.

Dintre acestea, condiția (2) pune probleme în mod frecvent, așa cum am menționat anterior. De exemplu, o analiză riguroasă a mișcării corpurilor la suprafața Pământului implică recurgerea la un sistem de referință inerțial galilean legat nu de Pământ, ci de un sistem stelar. În acest context au putut fi explicate efectele deplasării spre est, existența a două marea pe zi, comportamentul pendulului Foucault, etc.

Alături de cele trei principii ale dinamicii enumerate mai sus, se mai menționează (uneori chiar ca un al patrulea principiu) și așa-numitul *principiu al independenței acțiunii forțelor, sau principiul superpoziției*:

În cazul în care asupra unui corp (punct material) acționează mai multe forțe, accelerația imprimată corpului este egală cu rezultanta forțelor împărțită la masa acestuia:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.14)$$

Evident, rapoartele $\vec{F}_i/m = \vec{a}_i$ reprezintă, fiecare în parte, accelerația pe care fiecare forță \vec{F}_i ar imprima-o punctului material, *dacă ar acționa singură, independent de prezența celorlalte forțe*. Prin urmare am putea scrie relația anterioară și sub forma:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i. \quad (2.15)$$

2.2 Integrarea ecuației diferențiale a mișcării

Una dintre sarcinile cele mai importante ale mecanicii este determinarea ecuației de mișcare a corpurilor și/sau ecuația traiectoriei. În acest scop, în mecanica newtoniană se pleacă de la ecuația principiului fundamental al dinamicii, care permite scrierea *ecuației diferențiale a mișcării*. O astfel de ecuație diferențială este de ordinul II și, în unele cazuri, ea poate avea o soluție analitică. În cazul în care există o soluție analitică, aceasta se află prin integrare succesivă⁵. Așa cum vom vedea în continuare, pentru a găsi o soluție $\vec{r}(t)$ unică, pe lângă

⁵Există clase de ecuații diferențiale de ordinul II care nu au o soluție analitică. În acest caz se folosesc o serie de tehnici (cum ar fi cele grafice sau numerice) de calcul al unor soluții aproximative.

cunoașterea expresiei forței în ecuația (2.5), sunt necesare informații suplimentare privind valorile vitezei și coordonatei la momentul inițial al mișcării.

În majoritatea cazurilor, forțele sunt funcții de poziția relativă a corpurilor, de viteză, sau de timp:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (2.16)$$

Valoarea accelerației se află din ecuația principiului II al dinamicii. În coordonate carteziene, de exemplu, cele trei componente ale accelerației se vor scrie sub forma:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad (2.17)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad (2.18)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \quad (2.19)$$

Fiecare din aceste ecuații admit o infinitate de soluții. Găsirea unei soluții unice presupune cunoașterea valorilor $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, la un anumit moment specificat. De obicei se precizează valorile acestor mărimi la momentul inițial, de aceea ansamblul acestor valori se numește setul de *condiții inițiale*:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad (2.20)$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0). \quad (2.21)$$

Integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării se poate face în funcție de timp sau de-a lungul traiectoriei. Se pot găsi astfel o serie de mărimi fizice (impuls, moment unghiular și energie) care, în anumite condiții, sunt constante ale mișcării.

2.2.1 Impulsul. Conservarea impulsului.

Relația fundamentală (2.5) se poate scrie sub forma:

$$d\vec{p} = \vec{F} dt. \quad (2.22)$$

Acest lucru înseamnă că variația infinitesimală a impulsului punctului material în intervalul de timp dt este determinată de acțiunea forței \vec{F} . Integrând între două momente oarecare de timp, notate t_1 și t_2 , se obține:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt, \quad (2.23)$$

care constituie formularea matematică a *teoremei variației impulsului*. Procedând într-o manieră similară aceleia folosite în cazul vitezei și accelerației medii, cu referire la definirea și interpretarea geometrică a acestora, putem defini *forța medie* ca:

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \quad (2.24)$$

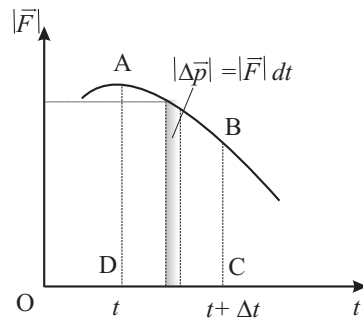


Figura 2.1: Variația impulsului are semnificația ariei de sub graficul $F = F(t)$. Ea se obține prin sumarea ariilor dreptunghiurilor elementare: $\Delta p = \text{aria}(ABCD)$. Pe durata fiecărui interval dt , forța are o valoare constantă.

Ultimele două relații permit interpretarea geometrică a impulsului ca aria de sub graficul $\vec{F} = \vec{F}(t)$ (vezi Fig.2.1). În situația în care forța variază în timp după o lege oarecare, variația infinitezimală a impulsului (dp) este numeric egală cu aria elementară a dreptunghiului (Fdt) obținut prin divizarea curbei în porțiuni pe care forța se poate considera constantă. Adunând aria tuturor acestor fâșii se obține aria regiunii $ABCD$ care este numeric egală cu variația totală a impulsului.

Așa cum am găsit și în secțiunea anterioară, în cazul unui punct material izolat ($F = 0$), relația (2.23) devine:

$$\vec{p}(t_2) = \vec{p}(t_1) = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (2.25)$$

Impulsul punctului material izolat rămâne constant în timp, atât ca orientare cât și ca mărime⁶.

Să analizăm ce se întâmplă cu un sistem izolat de două corpuri aflate în interacțiune.

În Fig.2.2 ele sunt reprezentate ca puncte materiale, notate A și B , având impulsurile, la un anumit moment dat, \vec{p}_A și \vec{p}_B . Forța cu care fiecare corp acționează asupra celuilalt într-un interval infinitezimal de timp produce variațiile infinitezimale de impuls:

$$\vec{F}_{AB} \cdot dt = d\vec{p}_A; \quad (2.26)$$

$$\vec{F}_{BA} \cdot dt = d\vec{p}_B. \quad (2.27)$$

Adunând cele două relații rezultă:

$$(\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA}) \cdot dt = d(\vec{p}_A + \vec{p}_B). \quad (2.28)$$

Conform principiului al treilea al lui Newton, cele două forțe formează o *pereche acțiune - reacțiune*:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \quad (2.29)$$

⁶În mecanica cuantică, valorile impulsului sunt cuantificate.

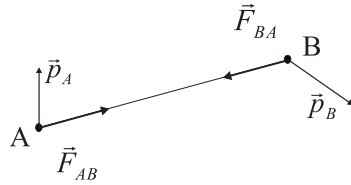


Figura 2.2: Sistem izolat de două corpuri aflate în interacțiune: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

Ca urmare, legea conservării impulsului unui sistem izolat de două corpuri⁷:

$$\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = \overrightarrow{const.} \quad (2.30)$$

În concluzie:

Impulsul total al unui sistem de două puncte materiale izolate se conservă.

2.2.2 Momentul unghiular. Conservarea momentului unghiular.

Să înmulțim vectorial relația (2.4) la stânga, cu \vec{r} :

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}). \quad (2.31)$$

Aici am ținut cont de faptul că masa inertă este independentă de timp și că:

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}. \quad (2.32)$$

Ultimul termen al ecuației precedente este zero deoarece $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, iar vectorii \vec{v} și $m\vec{v}$ sunt coliniari, produsul lor vectorial fiind, de aceea, nul.

Putem acum defini momentul forței și momentul unghiular (sau momentul impulsului) în raport cu un punct, conform ecuațiilor:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (2.33)$$

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.34)$$

Folosind aceste mărimi, relația (2.31) devine:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt}, \quad (2.35)$$

care reprezintă formularea matematică a *teoremei variației momentului unghiular*:

În raport cu un punct de referință dat, momentul forței ce acționează asupra unui corp este egal cu rata de variație în timp a momentului unghiular al aceluia corp.

⁷După cum vom constata ulterior, această lege este valabilă și pentru sistemele izolate de puncte materiale cu mai mult de două componente.

Integrând ecuația precedentă între două momente de timp t_1 și t_2 , se obține relația:

$$\vec{J}(t_2) - \vec{J}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt. \quad (2.36)$$

Dimensiunile momentului forței și ale momentului unghiular și unitățile de măsură corespunzătoare sunt:

$$[M] = [r][F] = ML^2T^{-2}; \quad (2.37)$$

$$\langle M \rangle_{SI} = 1Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1N \cdot m; \quad (2.38)$$

$$[J] = [r][p] = ML^2T^{-1}; \quad (2.39)$$

$$\langle J \rangle_{SI} = 1Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = 1N \cdot m \cdot s^{-1}. \quad (2.40)$$

În cazul unui punct material izolat, din (2.36) se obține:

$$\vec{J}(t_2) = \vec{J}(t_1) = \overrightarrow{const.} \quad (2.41)$$

adică, în cazul unui sistem izolat de corpuri *este valabilă legea conservării momentului unghiular*.

Să analizăm ce se întâmplă în cazul unui sistem izolat de două corpuri, A și B , aflate în interacțiune. În Fig.2.3 vectorii de poziție corespunzători sunt notați \vec{r}_A și \vec{r}_B . Aplicând

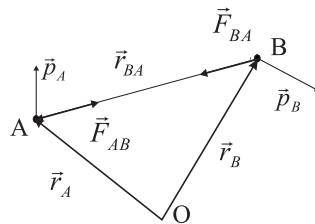


Figura 2.3: Un sistem izolat de corpuri în interacțiune

relația (2.35) fiecărui corp, se obține:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{J}_A}{dt}; \quad (2.42)$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_B \times \vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{J}_B}{dt}, \quad (2.43)$$

unde:

$$\vec{J}_A = \vec{r}_A \times \vec{p}_A, \quad (2.44)$$

$$\vec{J}_B = \vec{r}_B \times \vec{p}_B \quad (2.45)$$

sunt momentele unghiulare corespunzătoare ale celor două puncte materiale.

Sumând cele două momente și ținând cont de principiul al treilea al dinamicii ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$), se obține:

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}_{AB} \quad (2.46)$$

$$= \frac{d}{dt} (\vec{J}_A + \vec{J}_B). \quad (2.47)$$

Deoarece vectorul diferență:

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \quad (2.48)$$

este coliniar cu forțele de interacțiune, rezultă că:

$$\vec{r}_{BA} \times \vec{F}_{AB} = 0. \quad (2.49)$$

De aici:

$$\vec{J} = \vec{J}_A + \vec{J}_B = \overrightarrow{const.} \quad (2.50)$$

adică:

Momentul unghiular al unui sistem de două corpuri izolate este o constantă a mișcării, păstrându-și orientarea și mărimea constante în timp.

2.2.3 Lucrul mecanic și puterea

Să înmulțim scalar relația fundamentală (2.4), cu vectorul deplasare infinitezimală $d\vec{r}$.

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \quad (2.51)$$

Mărimea:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos \varphi \quad (2.52)$$

reprezintă *lucrul mecanic elementar* efectuat de forța \vec{F} la deplasarea pe distanța infinitezimală dr ⁸. După cum este definit (ca produs scalar), lucrul mecanic depinde de unghiul dintre direcția forței și cea a vectorului deplasare, putând fi zero, pozitiv sau negativ.

Lucrul mecanic total efectuat la deplasarea între punctele A și B pe traiectoria marcată în Fig.2.4 se află integrând relația (2.52) între cele două puncte:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.53)$$

Lucrul mecanic are semnificația ariei de sub curba $F(r)$.

Împărțind relația (2.52) la dt , putem defini o nouă mărime, numită *putere mecanică*, P :

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (2.54)$$

⁸A nu se confundă notația dL cu *variația lucrului mecanic*, care ar fi o mărime fără sens. Lucrul mecanic este o *mărime de proces* și nu una de stare, ca urmare dL nu este o variație a lui L , ci un L infinit mic. Uneori, pentru a elimina o posibilă confuzie, lucrul mecanic elementar, ca și o cantitate infinitezimală de căldură se notează cu δL , respectiv, δQ .

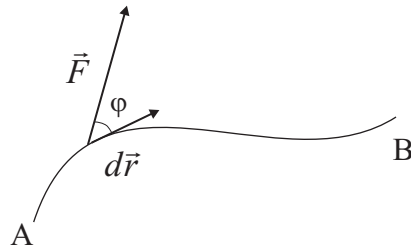


Figura 2.4: Lucrul mecanic elementar la o deplasare infinitezimală pe o traiectorie oarecare depinde de unghiul φ dintre vectorii forță și deplasare.

Puterea mecanică este egală cu lucrul mecanic produs în unitatea de timp. Așadar, puterea este o mărime de stare și ea are valori instantanee care se pot modifica de la moment la moment. Ea este o mărime scalară. Dimensiunile lucrului mecanic și ale puterii sunt, respectiv:

$$[L] = [F] [d] = ML^2T^{-2}, \quad (2.55)$$

$$[P] = \frac{[L]}{[t]} = ML^2T^{-3}, \quad (2.56)$$

iar unitățile de măsură corespunzătoare:

$$\langle L \rangle_{SI} = 1N \cdot m = 1J, \quad (2.57)$$

$$\langle P \rangle_{SI} = 1N \cdot m \cdot s^{-1} = 1J \cdot s^{-1} = 1W. \quad (2.58)$$

Un Joule ($1J$) este lucrul mecanic efectuat de o forță de $1N$ la deplasarea unui punct material pe distanța de $1m$. Unitatea de măsură a puterii, în Sistemul Internațional, este Watt-ul, prescurtat W ⁹.

2.2.4 Energia cinetică

Cantitatea $\frac{1}{2}mv^2$ din relația (2.51) se numește *energie cinetică* și se notează cu E_c . Revenind la această relație și ținând cont de notațiile făcute, rezultă că:

$$dL = dE_c. \quad (2.59)$$

Integrând ecuația anterioară între două puncte de pe traiectorie, găsim:

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_c(B) - E_c(A). \quad (2.60)$$

Relația (2.60) reprezintă expresia matematică a *teoremei de variație a energiei cinetice*:

⁹Denumirea a fost dată în onoarea fizicianului James Watt (1736-1819) fizician și inginer scoțian, inventatorul mașinii moderne cu abur. Informații despre contribuțiile sale la dezvoltarea științei și tehnicii pot fi găsite la adresa de web: <http://www.history.rochester.edu/steam/marshall/>.

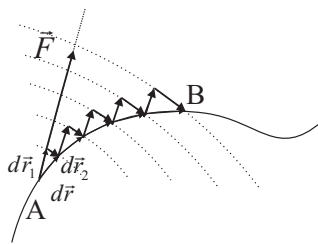


Figura 2.5: Descompunerea unei deplasări infinitezimale de-a lungul și, respectiv, perpendicular pe direcția forței. Lucrul mecanic total nu depinde de deplasarea după direcția perpendiculară pe direcția forței.

Variația energiei cinetice a unui punct material, între două stări în decursul mișcării, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă ce acționează asupra punctului material, pe durata mișcării între aceste stări.

Relația (2.60) ne permite definirea energiei cinetice a punctului material, dacă considerăm că la momentul inițial acesta era în repaus:

$$E_c = \int_{A(v=0)}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.61)$$

Energia cinetică reprezintă, așadar, lucrul mecanic necesar pentru a aduce un corp, aflat inițial în repaus, la o viteză v .

2.2.5 Energia potențială. Forțe conservative

Să calculăm lucrul mecanic efectuat la deplasarea unui punct material între punctele A și B . Considerăm că mișcarea mobilului se datorează existenței unei forțe de interacțiune \vec{F} din partea unui alt corp, situat undeva în vecinătate. Vom considera, în continuare, că forța F este dependentă doar de distanța dintre corpul de studiat și un alt corp din vecinătatea lui¹⁰. Lucrul mecanic elementar, efectuat împotriva forței de interacțiune, este:

$$dL = -\vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.62)$$

O deplasare elementară, $d\vec{r}$, se poate descompune în două componente, $d\vec{r}_1$ și $d\vec{r}_2$, după direcția forței și, respectiv, perpendiculară pe aceasta (vezi Fig.2.5). În acest fel, vom putea scrie:

$$dL = -\vec{F} \cdot d\vec{r}_1 - \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = -\vec{F} \cdot d\vec{r}_1. \quad (2.63)$$

După cum se constată, lucrul mecanic total al forței F , atunci când aceasta își schimbă punctul de aplicație între două puncte de pe traiectorie, are valoarea:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_1, \quad (2.64)$$

¹⁰Proprietățile unei astfel de forțe vor fi discutate mai în detaliu într-o secțiune următoare, dedicată studiului forțelor dependente de poziție.

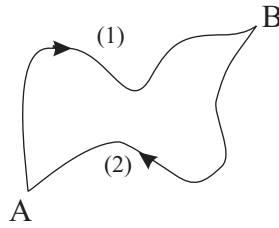


Figura 2.6: Lucrul mecanic nu depinde de drumul urmat: $L_{AB}^{(1)} = L_{AB}^{(2)}$.

independent de lungimea deplasării după direcția perpendiculară pe direcția forței¹¹. O astfel de forță este denumită *conservativă*. Lucrul mecanic al unei forțe conservative este independent de forma traiectoriei, el fiind funcție doar de poziția punctelor între care are loc deplasarea.

Ca urmare, indiferent de drumul urmat de punctul material între cele două puncte (drumurile (1) sau (2) în Fig.2.6), lucrul mecanic are aceeași valoare.

$$L_{AB}^{(1)} = L_{AB}^{(2)}, \quad (2.65)$$

adică:

$$\left(- \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_{(1)} = \left(- \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_{(2)}. \quad (2.66)$$

Trecând totul într-un singur membru și inversând limitele integralei, rezultă:

$$\left(- \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_{(1)} + \left(- \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_{(2)} = 0, \quad (2.67)$$

cea ce înseamnă *condiția integrală* ca o forță să fie *conservativă*: integrala pe un contur închis a forței (denumită și *circulația vectorului forță pe un contur închis*) trebuie să fie zero:

$$- \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (2.68)$$

Având în vedere teorema lui Stokes-Ampère, se poate scrie:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (\text{rot } \vec{F})_n \cdot ds \quad (2.69)$$

Condiția diferențială de forță conservativă este:

$$\text{rot } \vec{F} = 0. \quad (2.70)$$

¹¹Analiza se poate face și invers, considerând descompunerea vectorului forță după direcțiile vectorului deplasare și, respectiv, perpendiculară pe aceasta. Lucrul mecanic total va depinde doar de componenta forței de-a lungul deplasării.

Condițiile (2.68) și (2.70) permit definirea unei mărimi fizice scalare, numită *energie potențială*, E_p . Ea descrie *capacitatea unui sistem de a efectua lucru mecanic*. Cu ajutorul relației (2.70) se poate scrie:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = -\nabla E_p. \quad (2.71)$$

În coordonate carteziene:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{z}. \quad (2.72)$$

Așadar, vectorul forță este orientat pe direcția celei mai rapide creșteri a funcției energie potențială. Pe de altă parte:

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.73)$$

Integrând această relație rezultă:

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.74)$$

După cum se observă, nu energia potențială, ci variația acesteia poate fi precizată în mod exact. Pentru a defini energia potențială a sistemului într-o anumită stare (precizată prin distanța dintre corpuri, în acest caz), ar trebui definită o stare a sistemului, în care energia potențială a acestuia să fie considerată zero. În cazul forțelor de tip $F \sim 1/r^2$, aceasta se întâmplă atunci când corpurile se află la o distanță relativă infinit-mare. În termeni practici, aceasta presupune că distanța dintre corpuri este atât de mare, încât forțele de interacțiune nu mai produc efecte detectabile¹². Ca urmare:

$$E_p(B) = -\int_{\infty}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.75)$$

Energia potențială a unui sistem este egală cu lucrul mecanic necesar "desfacerii" sistemului, inițial legat, în părțile sale componente (care nu mai interacționează în urma separării).

2.2.6 Legea conservării energiei mecanice. Forțe conservative

Din relațiile (2.60) și (2.74) rezultă:

$$E_c(B) - E_c(A) = -[E_p(B) - E_p(A)], \quad (2.76)$$

adică:

$$E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) = E = \text{const.} \quad (2.77)$$

Așadar, în cazul în care caracteristicile mișcării mecanice a unui sistem sunt determinate doar de prezența unor forțe conservative, energia mecanică totală, E , este o constantă a mișcării¹³.

¹²În cazul forțelor de natură gravitațională, aceste distanțe sunt de ordinul miilor sau milioanele de km, în schimb în cazul forțelor electrice dintre particulele componente ale nucleului atomic, distanțele "infinite" sunt de ordinul câtorva nanometri.

¹³Legea conservării energiei mecanice nu se respectă decât în cazul forțelor conservative. Când caracteristicile mișcării sunt determinate de alte tipuri de forțe, se vorbește despre legea conservării energiei, în sens general, în sensul că se includ și efectele disipative, radiative, etc.

Mărimile pe care le-am obținut prin integrarea ecuației diferențiale a mișcării sunt numite *integrale prime* ale mișcării. Ele permit simplificarea calculelor matematice necesare rezolvării unor probleme de mecanică, în sensul că, în locul integrării unor ecuații diferențiale de ordinul II, care se obțin folosind principiul II al dinamicii, se pleacă de la ecuații diferențiale de ordinul I. Din păcate, rezolvarea problemelor de mecanică plecând de la legile de conservare (acolo unde legile de conservare sunt respectate!) este lipsită de posibilitatea de a descrie stările intermediare ale sistemului și deci de a urmări "filmul" evoluției acestuia între stările inițială și finală.

2.3 Mișcarea punctului material sub acțiunea a diferite tipuri de forțe

Să analizăm, în continuare, mișcarea unui punct material sub acțiunea unor tipuri simple de forțe. Ne vom limita, pentru început, la studiul mișcării uni-dimensionale. Vom examina câteva cazuri semnificative, într-o ordine de la simplu la complex.

2.3.1 Forță constantă, $F = F_0$

Cel mai simplu exemplu de integrare a ecuației diferențiale a mișcării este acela în care forța este constantă (un astfel de caz este întâlnit, de exemplu, în studiul căderii libere a corpurilor în câmpul gravitațional din imediata vecinătate a Pământului)¹⁴.

$$F = F_0 = \text{const.} \quad (2.78)$$

Folosind definiția accelerației și principiul fundamental al mecanicii și ținând cont de condițiile la limită, se găsește prin integrare:

$$\dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t) dx = \frac{1}{m} \int_0^t F dt = \frac{F_0}{m} t + \dot{x}(0), \quad (2.79)$$

în care constanta de integrare este valoarea vitezei la momentul inițial. Se observă că viteza crește liniar cu timpul.

Integrând din nou, având în vedere definiția vitezei, obținem ecuația de mișcare:

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) dt = \frac{F_0}{2m} t^2 + \dot{x}(0)t + x(0). \quad (2.80)$$

Trebuie făcută precizarea că alegerea momentului $t_0 = 0$, considerat ca inițial, este arbitrară. Obținem, în final:

$$x(t - t_0) = \frac{F_0}{2m} (t - t_0)^2 + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + x(t_0). \quad (2.81)$$

Expresia obținută reprezintă ecuația unei parabole.

¹⁴În aceste condiții se neglijează variația accelerației gravitaționale cu altitudinea.

2.3.2 Forță dependentă de timp $F = F(t)$

Dacă forța depinde de timp¹⁵, atunci F nu mai poate fi scos factor comun în integrala din (2.79). De aceea expresia vitezei va fi:

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt + v(t_0). \quad (2.82)$$

Integrând încă o dată, se găsește ecuația de mișcare:

$$x(t) = - \int_{t_0}^t dt \left(\frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt \right) + v(t_0)(t - t_0) + x(t_0). \quad (2.83)$$

Deși această expresie pare complicată la prima vedere, termenii ei pot fi interpretați ușor. Ultimul termen descrie poziția de start (coordonata x la momentul inițial, t_0). Penultimul termen descrie mișcarea cu viteza constantă, cu care mobilul s-ar deplasa în absența oricărei forțe. Primul termen reflectă efectul forței F .

2.3.3 Forță dependentă de viteză $F = F(v)$

Forțele dependente de viteză fac parte, de regulă, din categoria forțelor de contact. Astfel de forțe sunt cele determinate, de exemplu, de fenomenul de curgere vâscoasă. Principiul al doilea al dinamicii conduce, în acest caz, la relația:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v). \quad (2.84)$$

Ecuația diferențială se integrează ușor dacă se separă variabilele în cei doi termeni, sub forma:

$$dt = \frac{m}{F(v)} dv. \quad (2.85)$$

Ca urmare:

$$t - t_0 = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{F(v)} dv, \quad (2.86)$$

de unde, cunoscând condițiile inițiale, se poate obține legea vitezei și apoi printr-o nouă integrare, legea de mișcare. În funcție de forma concretă a dependenței de viteză a forței, se pot găsi cazuri particulare de mișcare, pe care le vom prezenta, pe scurt, în cele ce urmează.

¹⁵O astfel de forță este implicată în fenomenele de împrăștiere a radiației electromagnetice în ionosferă de către electronii liberi. Acest fenomen se produce prin absorbția de energie electromagnetică de către electroni și reemisia acesteia în toate direcțiile.

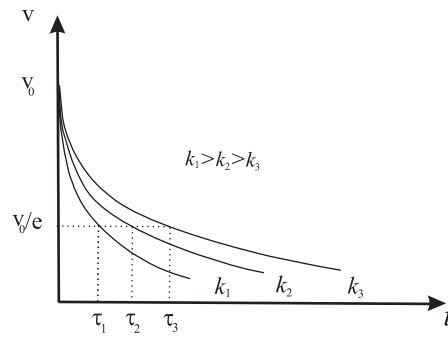


Figura 2.7: Dependența de timp a vitezei, $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$, pentru trei valori diferite ale coeficientului de rezistență: $k_1 > k_2 > k_3$.

Forță de tipul $F = -kv$

O astfel de forță apare în cazul deplasării cu viteze mici a unui corp într-un fluid (gaz sau lichid). Forța de vâscozitate acționează în sens invers vitezei, tinzând să încetinească mișcarea. Coeficientul k din expresia vitezei se numește *coeficient de rezistență*. Înlocuind expresia forței în (2.86) rezultă:

$$t - t_0 = -\frac{m}{k} \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv}{v}. \quad (2.87)$$

În urma efectuării integralei și după rearanjarea termenilor rezultă:

$$\frac{k}{m} (t - t_0) = \ln v_0 - \ln v. \quad (2.88)$$

Considerând că $t_0 = 0$ și că $v(t_0) = v_0$, după aplicarea funcției inverse logaritmului se obține expresia vitezei:

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.89)$$

unde:

$$\tau = \frac{m}{k} \quad (2.90)$$

se numește *timp de relaxare* al mișcării. Timpul de relaxare reprezintă intervalul după care viteza scade de e ori.

$$t = \tau \Rightarrow v = \frac{v_0}{e}. \quad (2.91)$$

O reprezentare grafică a dependenței vitezei de timp este dată în Fig.2.7. Se observă că, pe măsură ce scade valoarea lui k rata de descreștere a vitezei se reduce iar timpii de relaxare cresc.

Pentru a găsi legea mișcării, integrăm din nou relația (2.89):

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt, \quad (2.92)$$

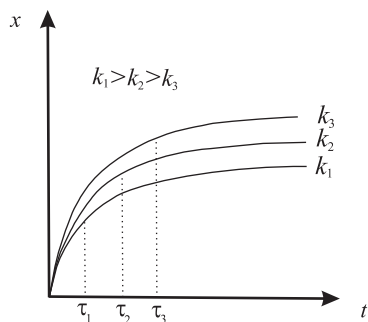


Figura 2.8: Reprezentarea spațiului parcurs, pentru diferite valori ale coeficientului de frecare, pentru cazul $x_0 = 0$.

unde x_0 este poziția corespunzătoare momentului $t_0 = 0$. Efectuând calculele, se obține, în final, legea mișcării, sub forma:

$$x(t) = x_0 + v_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (2.93)$$

Conform relațiilor (2.89) și (2.93), viteza și coordonata tind asimptotic la zero, cu alte cuvinte, ar însemna că, un corp acționat de o astfel de forță nu se va opri niciodată. O analiză experimentală mai atentă a mișcării arată că, în realitate, corpul se oprește în final. Explicația constă în aceea că, atunci când viteza atinge valori foarte mici (așa numita *fază terminală* a mișcării), dependența $F \sim v^1$ nu se mai respectă. Se trece, în aceste condiții, la o dependență de tipul $F \sim v^0$, deci forța devine constantă.

Așa cum am văzut în secțiunea anterioară, în cazul mișcării sub efectul unei forțe (de rezistență) constante, viteza descrește liniar la zero.

Folosind dezvoltarea în serie Taylor a funcției exponențiale:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (2.94)$$

putem scrie ecuația (2.89) sub forma:

$$v = v_0 \left(1 - \frac{k}{m}t + \dots \right) \simeq v_0 - \frac{kv_0}{m}t = v_0 - a_0t, \quad (2.95)$$

unde:

$$a_0 = \frac{F_0}{m}, \quad (2.96)$$

$$F_0 = -kv_0 \quad (2.97)$$

reprezintă valorile accelerației și, respectiv, forței la momentul în care forța de rezistență devine constantă.

Similar, pentru ecuația spațiului:

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{k} \left(1 - 1 + \frac{k}{m}t - \frac{1}{2} \frac{k^2}{m^2} t^2 \dots \right) \simeq \quad (2.98)$$

$$\simeq x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \frac{v_0 k}{m} t^2 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2. \quad (2.99)$$

Se constată că s-au regăsit ecuațiile mișcării sub acțiunea unei forțe constante.

Forță de tipul $F = -kv^2$

În cazul în care viteza de deplasare a unui corp în raport cu fluidul înconjurător depășește o valoare critică, pe lângă forța de rezistență datorată vâscozității, apare o forță de rezistență suplimentară, de valoare considerabilă, datorată antrenării fluidului o dată cu corpul în mișcare. Această forță nouă este proporțională cu pătratul vitezei, $F = -kv^2$. Un astfel de tip de dependență apare deoarece punerea în mișcare a particulelor de fluid are loc prin procese de ciocnire, în urma cărora acestora li se transferă impuls. Perechea forței care accelerează fluidul (și care este proporțională, prin urmare, cu v) este o forță egală și de semn contrar, care se manifestă asupra corpului, ca o forță de rezistență. Cum particulele cu care corpul interacționează în unitatea de timp sunt cuprinse într-un cilindru cu generatoarea proporțională cu distanța parcursă (vdt), în expresia forței rezultante de rezistență apare un nou factor, proporțional cu v . De aici rezultă proporționalitatea forței cu pătratul vitezei. Energia cinetică a fluidului pus în mișcare de trecerea mobilului se transformă, în final, în căldură, întrucât, datorită vâscozității, particulele de fluid ajung din nou în starea pe care o avuseseră înainte de a fi fost puse în mișcare.

Înlocuind expresia forței în formula generală dată de (2.86), găsim:

$$t - t_0 = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}, \quad (2.100)$$

cea ce conduce, ținând cont de condițiile inițiale, la expresia vitezei:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{kv_0}{m}t}. \quad (2.101)$$

Legea spațiului o găsim printr-o nouă integrare, cu respectarea condiției că, la momentul inițial, $t = 0$, $x(0) = x_0$:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{kv_0}{m}t} dt. \quad (2.102)$$

Integrala din membrul al doilea se rezolvă ușor dacă se face substituția: $u = 1 + \frac{kv_0}{m}t$. Se obține:

$$x = x_0 + \frac{m}{k} \ln \left(\frac{kv_0}{m} t + 1 \right). \quad (2.103)$$

2.3.4 Forță dependentă de poziție

Exemple de forțe care depind de poziție sunt: forțele gravitaționale, forțele elastice, forțele electrice etc. Ecuația de mișcare rezultă din aplicarea principiului fundamental al dinamicii:

$$m \frac{dv}{dt} = F(x). \quad (2.104)$$

Înmulțind ambii termeni ai acestei ecuații cu dx și folosind relația de definiție a vitezei ($v = dx/dt$), obținem:

$$mv \frac{dv}{dt} = F(x) \frac{dx}{dt}. \quad (2.105)$$

Deoarece:

$$v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right), \quad (2.106)$$

se obține:

$$d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = F(x) dx. \quad (2.107)$$

Termenul din dreapta în relația (2.107) este lucrul mecanic elementar pentru deplasarea pe distanța dx :

$$dL = F(x) dx. \quad (2.108)$$

Integrarea relației (2.107) conduce la:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx, \quad (2.109)$$

sau:

$$E_c - E_{c0} = \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (2.110)$$

Integrala din membrul doi reprezintă lucrul mecanic efectuat de forța F la deplasarea între două puncte de coordonate x_0 și x .

Relația (2.110) a fost deja discutată într-un paragraf anterior, ea exprimând *legea de variație a energiei cinetice* în cazul uni-dimensional. Lucrul mecanic efectuat de o forță pentru deplasarea punctului material între două poziții este egal cu variația energiei cinetice. De-a lungul unei traiectorii închise, lucrul mecanic efectuat de o forță dependentă de poziție va fi zero.

În cazul unei traiectorii deschise, valoarea lucrului mecanic, definit de relația (2.53), nu depinde de drumul urmat, ci doar de pozițiile între care are loc mișcarea. În aceste condiții se poate defini în fiecare punct în care este localizat corpul, energia potențială, astfel:

$$F(x) = - \frac{dE_p(x)}{dx}, \quad (2.111)$$

sau:

$$dE_p(x) = -F(x) dx = -dL. \quad (2.112)$$

Integrând relația (2.112) între două puncte oarecare, se obține:

$$E_p - E_{p0} = - \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (2.113)$$

Din relațiile (2.110) și (2.113) se observă că pentru orice forță dependentă de poziție este valabilă relația:

$$E_c - E_{c0} = - (E_p - E_{p0}), \quad (2.114)$$

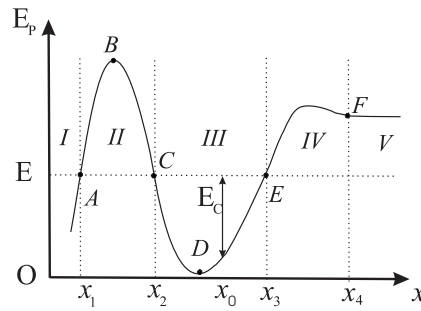


Figura 2.9: Dependenta energiei potențiale, E_p , de distanță. Linia orizontală reprezintă valoarea energiei totale E .

sau:

$$E_{c0} + E_{p0} = E_c + E_p = \text{constant} = E. \quad (2.115)$$

Relația (2.115) reprezintă *legea de conservare a energiei totale a unei perechi de corpuri izolate*. În cazul forțelor dependente de poziție, energia totală se conservă.

Dacă dependența explicită a energiei potențiale $E_p(x)$ este cunoscută și dacă avem în vedere că, în condițiile în care energia cinetică este nulă energia totală E devine egală cu energia potențială maximă, putem deduce ecuația de mișcare plecând de la legea de conservare a energiei:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= E - E_p(x); \\ \frac{dx}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - E_p(x)]} \end{aligned} \quad (2.116)$$

Separând variabilele și integrând, rezultă:

$$t(x) = t_0 \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - E_p(x)]}}. \quad (2.117)$$

Ecuația de mișcare $x(t)$ se obține după calcularea integralei din membrul al doilea și rearanjarea termenilor.

Interpretare calitativă

În cele ce urmează, vom interpreta în mod calitativ natura mișcării unei particule sub acțiunea unei forțe dependente de poziție. Pentru aceasta, să considerăm o dependență oarecare $E_p(x)$, de exemplu de forma celei din Fig.2.9, cu un maxim în punctul B , un minim în punctul D și o valoare constantă începând din punctul F . Dacă pe același grafic marcăm printr-o linie orizontală graficul energiei totale, E , atunci diferența $E - E_p(x)$, corespunzătoare fiecărei poziții x , reprezintă energia cinetică, E_c , pe care o are corpul în fiecare punct considerat.

Deoarece energia cinetică este proporțională cu pătratul vitezei, ea va trebui să fie întotdeauna o cantitate pozitivă. Ca urmare, pozițiile x permise (adică acelea care descriu o

mişcare reală) vor fi doar cele pentru care linia energiei totale se află deasupra curbei energiei potențiale. Orice altă regiune, care nu corespunde acestei condiții, spunem că este fizic inaccesibilă.

În cazul reprezentat în Fig 2.9, regiunile dintre punctele x_1 și x_2 (regiunea I) ca și cele dintre x_3 și x_4 (regiunea IV), și de după x_5 (regiunea V) sunt *inaccesibile*. În schimb, celelalte regiuni pot fi accesibile din punct de vedere energetic.

De cele mai multe ori, punctul material rămâne în regiunea în care este inițial localizat. Spre exemplu, dacă este inițial în punctul A , regiunea I și se mișcă spre direcția pozitivă a coordonatei x , deplasarea continuă până în punctul x_1 , acolo unde energia cinetică devine zero (particula se oprește). La momentul imediat următor, punctul material se va mișca înapoi în direcția din care a venit. Acest lucru este ușor de intuit mai ales că, în punctul x_1 panta curbei potențialului este pozitivă. Dacă ne reamintim legătura dintre energia potențială și forță (2.111), rezultă că forța este negativă, deci se comportă ca o forță de revenire, orientată în sens invers deplasării. Din aceste considerente, punctul $x = x_1$, în care $E = E_p(x_1)$ se numește *punct de întoarcere*. La fel sunt și punctele $x = x_2$ și $x = x_3$.

Punctul material localizat în regiunea I are un singur punct de întoarcere, de unde se poate deplasa la infinit. O astfel de stare se numește *stare liberă*. Regiunea III are două puncte de întoarcere, fapt care face ca mobilul să se deplaseze întotdeauna în această vecinătate finită. Astfel, mișcarea este limitată în această regiune.

Să discutăm în cele ce urmează comportarea particulei în regiunea V. În toate punctele acestei zone:

$$\frac{dE_p}{dx} = 0, \quad (2.118)$$

ceea ce înseamnă că punctul material rămâne în repaus (forța care acționează asupra lui este nulă). Se spune că un punct material este în *echilibru* atunci când forța care acționează asupra lui este zero. Trebuie însă diferențiate stările de echilibru din punctele din regiunea V de cele din punctele B sau D. Valorile potențialului diferă. Astfel, există puncte în care corpul se află în stare de:

- (a) *echilibru instabil* (punctul B);
- (b) *echilibru stabil* (punctul D);
- (c) *echilibru indiferent* (punctul F și regiunea care urmează).

Forța de tip elastic $F = -kx$

Vom particulariza relația generală (2.117) pentru cazul forțelor de tip elastic. Conform definiției (2.75), energia potențială are valoarea zero în condițiile în care resortul este nedeformat, $x = 0$. Avem atunci:

$$E_p(x) = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.119)$$

Aplicând legea conservării energiei, în starea în care resortul este nedeformat ($x = 0$), vom avea:

$$E(0) = E_c. \quad (2.120)$$

Energia totală are, deci, valoarea:

$$E = E_c = \frac{1}{2}kA^2. \quad (2.121)$$

A este distanța maximă până la care poate ajunge punctul material și se numește *amplitudine*. Înlocuind pe E în (2.117) se obține:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}k[A^2 - x^2]}} = \quad (2.122)$$

$$= \int_{\arcsin x_0/A}^{\arcsin x/A} \frac{A \cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{k}{m}A^2 [1 - \sin^2 \theta]}} = \quad (2.123)$$

$$= \int_{\arcsin x_0/A}^{\arcsin x/A} \frac{A \cos \theta d\theta}{\omega A \cos \theta} = \quad (2.124)$$

$$= \frac{1}{\omega_0} (\arcsin x/A - \arcsin x_0/A), \quad (2.125)$$

unde s-a făcut schimbarea de variabilă $x = A \sin \theta$ și s-a notat $\frac{k}{m} = \omega_0^2$.

Considerând că $t_0 = 0$ și aflând pe x în funcție de t rezultă:

$$\omega_0 t + \arcsin \frac{x_0}{A} = \arcsin \frac{x}{A}, \quad (2.126)$$

adică:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \arcsin \frac{x_0}{A}). \quad (2.127)$$

Mărimea ω_0 se numește *frecvență unghiulară proprie* sau *pulsația proprie* a oscilațiilor iar $\varphi_0 = \arcsin \frac{x_0}{A}$ - *faza inițială* a mișcării. După cum este definită, pulsația mișcării este o mărime constantă, specifică corpului și independentă de condițiile inițiale.

În Fig.2.10 este reprezentarea grafică a unei mișcări oscilatorii cu vizualizarea principalelor mărimi caracteristice.

2.3.5 Forțe cu expresii complicate. Integrare numerică

În cazurile în care expresia forței este complicată, nu se poate găsi o soluție analitică. Întotdeauna este posibilă însă o rezolvare numerică. Cea mai simplă cale de a realiza acest lucru este dată de dezvoltarea în serie Taylor.

Să presupunem că sunt cunoscute condițiile inițiale $x(t_0)$ și $\dot{x}(t_0)$. Valorile lui $x(t)$ și ale lui $\dot{x}(t)$ la momentul ulterior, se obțin prin dezvoltarea funcțiilor în jurul valorilor inițiale:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \frac{1}{1!}\dot{x}(t_0)(\Delta t) + \frac{1}{2!}\ddot{x}(t_0)(\Delta t)^2 + \dots \quad (2.128)$$

$$\dot{x}(t_0 + \Delta t) = \dot{x}(t_0) + \frac{1}{1!}\ddot{x}(t_0)(\Delta t) + \frac{1}{2!}\dddot{x}(t_0)(\Delta t)^2 + \dots \quad (2.129)$$

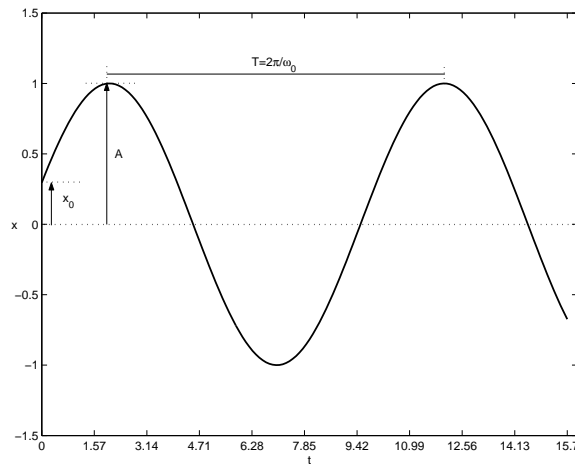


Figura 2.10: Reprezentarea grafică a unei mișcări oscilatorii

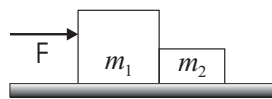


Figura 2.11: Pentru problema 2

Termenii cu puteri de ordin superior lui 2 ai lui Δt au fost neglijați deoarece ei tind la zero dacă Δt este suficient de mic. Toți termenii acestei dezvoltări sunt cunoscuți având în vedere că, în afară de condițiile inițiale ($x(t_0)$ și $\dot{x}(t_0)$), este cunoscută și valoarea accelerației $\ddot{x}(t_0)$ din ecuația fundamentală a mecanicii.

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{1}{m} F(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0). \quad (2.130)$$

În acest moment cunoaștem deci, prin dezvoltarea Taylor, pe x și pe \dot{x} la momentul de timp $t_0 + \Delta t$. Procedura iterativă poate continua în pași Δt . Astfel, se pot determina x și \dot{x} la momentele $t_0 + 2\Delta t$, $t_0 + 3\Delta t$, ..., cu precizie cu atât mai bună cu cât pasul de timp se alege mai mic. Prin acest procedeu numeric, ecuația de mișcare și, eventual, traiectoria sunt determinată în mod aproximativ, indiferent de cât de complicată este expresia forței.

2.4 Probleme

1. Desenați toate forțele care acționează asupra unei cărți așezate pe masa de lucru. Care sunt perechile acțiune-reacțiune? Care este reacțiunea greutateii cărții?
2. (a) Câte perechi de forțe acțiune-reacțiune apar în sistemul de corpuri din Fig.2.11? (b) Dacă cele două corpuri au masele $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 2$ kg, iar forța de împingere este $F=6$ N, care este forța de contact dintre corpurile 1 și 2? (c) Arătați că, dacă sistemul se împinge dinspre dreapta (de la 2 spre 1), valoarea forței de contact nu mai este 4N.

3. Cu ce accelerație trebuie să coboare un mobil de masă M deasupra unei scânduri de masă m așezate pe un plan înclinat de unghi α , pentru ca scândura să alunece uniform în sus pe planul înclinat? Se știe coeficientul de frecare la alunecare μ .

Răspuns: $a = g \frac{1+m/M}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}$

4. O minge de tenis cu masa $m = 50$ g cade pe podea, atingând-o cu viteza $v = 30$ m/s, după care ricoșează cu viteza inițială de 20 m/s. (a) Care este valoarea momentului forței care acționează asupra bilei în timpul contactului? (b) Cât este forța medie exercitată asupra podelei dacă mingea este în contact cu podeaua un timp de 1 s?

Răspuns: (a) $F \Delta t = -2,5 \text{ N} \cdot \text{s}$; (b) $F_m = 2,5 \text{ N}$.

5. Un baston de dimensiuni foarte mici, legat de o sfoară de lungime l fixată într-un punct, este rotit uniform, cu turația n pe o suprafață orizontală, fără frecări. (a) De câte ori crește turația bastonului, dacă firul se scurtează la jumătate? (b) Ce valoare are lucrul mecanic efectuat de forța care a scurtat firul?

Răspuns: (a) de 4 ori; (b) $L = 6m\pi^2 n^2 l^2$.

6. Găsiți viteza și accelerația unui punct material de masă m ce pornește din repaus din poziția $x = 0$ la momentul $t = 0$, dacă este supusă acțiunii forței:

(a) $F = F_0 + ct$;

(b) $F = F_0 \sin(ct)$;

(c) $F = F_0 e^{ct}$ unde c și F_0 sunt constante pozitive.

7. Folosind considerente legate de conservarea energiei, regăsiți legea de mișcare a unui corp sub acțiunea unei forțe constante.

8. Un punct material de masă m se mișcă într-un câmp de energie potențială $E_p(x) = a \ln x + \frac{b}{x^2}$, unde x reprezintă distanța față de origine iar a și b sunt constante pozitive. Găsiți expresia forței în funcție de poziție. Care sunt punctele de echilibru și ce fel de echilibru are punctul material în aceste poziții?

Răspuns: $F(x) = -a/x + 2b/x^3$; $x = (2b/a)^{1/2}$; echilibru stabil

9. Calculați lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F} = \beta (xy^3 \hat{x} + x^2 \hat{y})$, cu $\beta = \text{const.}$ la deplasarea pe traiectoria $y = \frac{1}{2}x^2$ din punctul $A(0, 0)$ în $B(2, 2)$.

Răspuns: $L = 8\beta$

10. Energia potențială a unui sistem de doi atomi ce formează o moleculă biatomică are expresia: $E_p = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$ unde a și b sunt constante pozitive. (a) Găsiți expresia forței și pozițiile punctelor de echilibru; (b) Care este valoarea energiei necesare pentru a rupe molecula (prin separarea celor doi atomi)? Această energie se numește *energie de disociere*.

Răspuns: (a) $F = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}$; $x_{\min} = \sqrt{\frac{2a}{b}}$; (b) $E_p(\infty) - E_p(x_{\min}) = \frac{b^2}{2a}$.

11. Un punct material se mișcă pe o traiectorie circulară de rază R , sub acțiunea unei forțe centrale $F = -\frac{k}{r^2}$, unde k este o constantă pozitivă. Să se calculeze:
- energia cinetică;
 - energia potențială;
 - energia totală;
 - momentul unghiular.

Răspuns: (a) $E_c = \frac{k}{2R}$; (b) $E_p = -\frac{k}{R}$; (c) $E = -\frac{k}{2R}$; (d) $J = \sqrt{kmR}$.

12. Calculați perioada micilor oscilații executate de un punct material sub acțiunea greutății, în vecinătatea minimumului unei curbe netede de rază R , situată în plan vertical.

Răspuns: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

13. Studiați mișcarea unui corp de masa m , aflat inițial în repaus, dacă alunecă din vârful unui plan înclinat de unghi α , în prezența unei forțe de frecare la alunecare având având coeficientul μ .

Răspuns: $v = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$; $x = 1/2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2$.

14. Un proiectil reactiv este aruncat orizontal cu viteza inițială v_0 . Presupunând că sistemul de propulsie al acestuia se defectează și este frânat de o forță $F = -Ae^{\alpha v}$ unde A și α sunt constante pozitive, să se determine:

- legea vitezei proiectilului;
- timpul;
- distanța parcursă până la cădere.

Răspuns: (a) $v(t) = v_0 - \frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{A}{m} \alpha t e^{\alpha v_0}\right)$; (b) $T = (1 - e^{-\alpha v_0}) \frac{m}{\alpha A}$; (c) $d = \frac{m}{\alpha^2 A} [1 - (1 + \alpha v_0) e^{-\alpha v_0}]$.

15. Să se determine legea vitezei și legea de mișcare a unui corp în câmp gravitațional, în prezența unei forțe de frecare din partea aerului proporțională cu viteza, dacă la momentul inițial viteza corpului este v_0 . Se cunoaște viteza limită c .

Răspuns: $v = -c + (c + v_0)e^{-(g/c)(t-t_0)}$; $x = x_0 - c(t-t_0) - \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{m v_0}{k}\right) \left[e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - 1\right]$.

16. (a) O bilă este aruncată pe o masă orizontală cu viteza v_0 . Știind că valoarea forței de frecare este proporțională cu pătratul vitezei, să se găsească legea vitezei și a spațiului. (b) Dacă bila ar fi aruncată vertical în jos, care ar fi dependența vitezei de spațiul parcurs? Se dă viteza limită $v_l = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

Răspuns: (a) $v(t) = v_0 - \frac{k}{m} \sqrt{v_0} t + \frac{k^2}{4m^2} t^2$; $x(t) = x_0 - \frac{1}{2} \frac{k}{m} \sqrt{v_0} t^2 + \frac{1}{12} \frac{k^2}{m^2} t^3$; (b) $v(x) = \sqrt{v_l^2 \left(1 - e^{-2gx/v_l^2}\right) + v_0^2 e^{-2gx/v_l^2}}$.

Forțe de tip central

Există situații în care dreapta suport a forței ce acționează asupra unui corp aflat în mișcare trece în permanență printr-un punct fix. O astfel de forță se numește *de tip central*. Exemple reprezentative în acest sens sunt forțele fundamentale (gravitaționale, electromagnetice, nucleare), dar și multe din de forțele ne-fundamentale (forțele intermoleculare van der Waals, forțele de tip elastic etc.).

În Fig.3.1 este prezentat un exemplu în care forța de tip central se manifestă asupra punctului material P , de masă m , ca urmare a atracției exercitate de un alt corp, de masă foarte mare ($M \gg m$), plasat în originea O . Perechea de corpuri $M + m$ poate fi Soarele + Pământul (între care se manifestă forțe de atracție gravitațională), nucleul + un electron (între care se manifestă forțe de atracție electrostatică)¹, sau proton + proton (caz în care forța de tip central este de respingere electrostatică, din cauza semnului sarcinilor electrice).

Forțele de tip central sunt proporționale cu distanța dintre corpurile aflate în interacțiune.

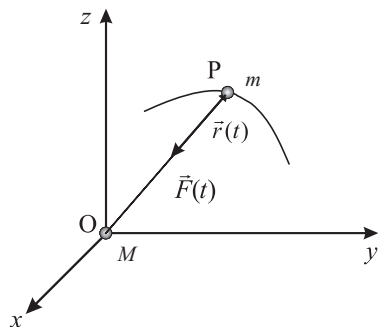


Figura 3.1: Un punct material mișcându-se sub acțiunea unei forțe de tip central.

¹Forțele de atracție gravitațională dintre nucleu și electron sunt neglijabile în comparație cu forțele coulombiene de atracție.

Expresia generală a unei forțe de tip central este de forma:

$$\vec{F} = F(r)\hat{e}_r = -\nabla E_p(r), \quad (3.1)$$

unde energia potențială, E_p , este o funcție doar de distanța r dintre corpuri.

Forțele de tip central au o serie de caracteristici exclusive, de care ne vom ocupa în cele ce urmează. Ulterior, vom deduce ecuația traiectoriei unui corp aflat sub acțiunea unei forțe centrale și vom analiza factorii care determină forma acestei traiectorii.

3.1 Conservarea momentului unghiular

Să calculăm momentul unei forțe de tip central, \vec{F} , exercitată asupra unui corp de masă m , în raport cu un punct O (Fig.3.1):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{J}}{dt} = 0. \quad (3.2)$$

În relația (3.2) s-a ținut cont de faptul că $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ și că, deoarece forța \vec{F} și vectorul de poziție \vec{r} au aceeași dreaptă suport, produsul vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$ este zero. Așadar, momentul cinetic (unghiular) al corpului atras, în raport cu O , rămâne constant (*se conservă*) pe durata mișcării:

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{const.} \quad (3.3)$$

Conservarea momentului unghiular *ca vector* înseamnă: (1) "înghețarea" orientării lui J ; (2) conservarea modulului acestui vector pe toată durata mișcării². Să vedem în continuare care sunt consecințele conservării momentului unghiular.

1. Conservarea orientării lui \vec{J} .

Vectorul \vec{J} are dreapta suport perpendiculară pe planul vectorilor \vec{r} și \vec{p} . Sensul lui \vec{J} este dat de regula burghiului drept. Întrucât dreapta suport a lui \vec{J} rămâne fixă în spațiu, planul perpendicular pe această dreaptă (ce conține vectorii \vec{r} și \vec{v}) trebuie să rămână, de asemenea, fix. Ca urmare:

Traietoria unui corp aflat sub acțiunea unei forțe de tip central este întotdeauna plană.

Este firesc, în aceste condiții, să folosim pentru deducerea ecuației traiectoriei, coordonate polare plane.

2. Conservarea mărimii lui \vec{J} .

Să examinăm o deplasare infinitezimală a unui corp punctiform pe traiectoria sa, așa cum este prezentată în Fig.3.2. Momentul cinetic va avea mărimea:

$$J = |\vec{r} \times m\vec{v}| = rmv \sin \varphi = rm \frac{|d\vec{r}| \sin \varphi}{dt} = rm \frac{rd\varphi}{dt} = r^2 m \omega. \quad (3.4)$$

²Există situații în care concluzia anterioară trebuie nuanțată. De exemplu, în cazul mișcării unui electron în câmpul coulombian de forțe al nucleului, momentul cinetic, ca și proiecțiile sale, pot lua doar anumite valori: se spune că *aceste mărimi sunt cuantificate*.

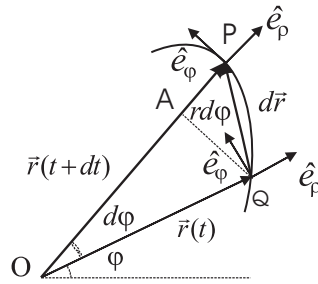


Figura 3.2: O deplasare infinitesimală a corpului pe o traiectorie oarecare.

În relația anterioară am ținut cont că $rd\varphi$ este cateta opusă unghiului $\varphi = \widehat{QPA}$ în triunghiul ΔPQA , iar $PQ = |d\vec{r}|$ este ipotenuză. Am notat, de asemenea, $\dot{\varphi} = \omega$. Ca urmare:

$$r^2\omega = \frac{J}{m} = \text{const.} \quad (3.5)$$

Mișcarea are loc în condițiile în care produsul $r^2\omega$ rămâne constant în timp. Se poate da o interpretare geometrică directă acestei ultime relații, dacă vom calcula aria "măturată" de vectorul de poziție în intervalul de timp dt :

$$dA = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} r(t) \cdot r(t + \Delta t) \sin \Delta\varphi \right] \approx \frac{1}{2} r^2 d\varphi. \quad (3.6)$$

Raportul dA/dt se numește *viteză areolară*. Expresia vitezei areolare va fi:

$$\Omega_a = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{J}{2m} = \text{const.} \quad (3.7)$$

Constanța vitezei areolare în cazul mișcării planetelor sistemului solar a fost descoperită de Kepler³ și publicată în 1509 în cartea sa *Astronomia Nova (Nova astronomie)*. În concluzie, conservarea modului momentului unghiular este echivalentă cu legea ariilor a lui Kepler.

3.2 Ecuația lui Binet

Având în vedere caracterul plan al traiectoriei unui corp aflat sub acțiunea unei forțe centrale, pentru a găsi ecuația traiectoriei vom recurge la folosirea coordonatelor polare plane.

³Johannes Kepler (1571-1630), astronom și matematician german, adeptul sistemului heliocentric a lui Copernic. Kepler a fost primul om de știință care a intuit că studiul mișcării astrelor nu trebuie abordat doar din perspectiva cinematicii. El este inițiatorul *introducerii considerentelor de dinamică în mecanica cerească* și primul astronom care a arătat că mișcarea corpurilor cerești este un subiect de fizică. A descoperit că planetele sistemului solar se rotesc pe traiectorii eliptice, având Soarele într-unul din focare. Prezentarea celor trei legi ale lui Kepler, privitoare la sistemul solar, va fi făcută mai în detaliu într-o secțiune următoare a acestui capitol. Informații suplimentare despre J. Kepler se pot găsi la adresa de web <http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/People/kepler.html>

Vom pleca de la ecuația principiului al II-lea al dinamicii:

$$m[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi] = -F\hat{e}_r. \quad (3.8)$$

Având în vedere că forța \vec{F} are doar componentă radială, ecuația vectorială anterioară este echivalentă cu ecuațiile scalare:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F; \quad (3.9)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0. \quad (3.10)$$

Ecuația (3.10) se poate rescrie sub forma:

$$\frac{1}{r} m \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = J = \text{const.}, \quad (3.11)$$

care reprezintă legea de conservare a momentului unghiular, demonstrată anterior.

Ecuația (3.9) poate servi la deducerea ecuației diferențiale a traiectoriei. Așa cum vom vedea în continuare, acest lucru este posibil prin combinarea rezultatelor obținute plecând de la aplicarea principiului al II-lea al dinamicii, cu câteva considerente de natură energetică.

Pentru a găsi ecuația traiectoriei este necesar să eliminăm timpul în ecuația (3.8). Vom substitui derivata în raport cu timpul prin derivata în raport cu variabila φ :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{J}{mr^2} = -\frac{J}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right); \quad (3.12)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\left(\frac{J}{m} \right)^2 \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (3.13)$$

Înlocuind ecuația (3.13) în (3.8), se obține așa-numita *ecuație a lui Binet*:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{Fmr^2}{J^2}. \quad (3.14)$$

Observăm că membrul doi al ecuației lui Binet este neliniar.

3.3 Forțe de tipul $1/r^2$

Integrarea ecuației diferențiale (3.14) este simplă dacă mărimea forței F este invers proporțională cu pătratul distanței. O astfel de condiție este satisfăcută în cazul forțelor de tip gravitațional sau coulombian⁴. Este simplu de observat că, în cazul unor forțe de tipul:

$$F = k \frac{1}{r^2}, \quad (3.15)$$

membrul al doilea al ecuației (3.14) devine independent de r , iar ecuația lui Binet devine una de tip oscilator armonic, cu variabilele $1/r$ și φ .

⁴Faptul că forța de atracție dintre planete era invers proporțională cu pătratul distanței era un lucru cunoscut încă înaintea lui Newton.

Să precizăm că, în cazul interacțiunilor de tip gravitațional, constanta k din ecuația (3.15) este:

$$k = \gamma m_1 m_2, \quad (3.16)$$

unde γ reprezintă constanta atracției universale. Valoarea lui γ a fost determinată printr-un experiment rămas celebru în fizică, de fizicianul englez Cavendish⁵. O descriere a experimentului lui Cavendish va fi prezentată în secțiunea următoare a acestui capitol. În cazul interacțiunilor electrostatice:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon} q_1 q_2, \quad (3.17)$$

unde ϵ este permitivitatea electrică a mediului în care sunt plasate corpurile aflate în interacțiune. De menționat că forțele electrice (coulombiene) pot fi de atracție sau de respingere, în funcție de semnul sarcinilor electrice ale corpurilor. Forțele de tip gravitațional sunt doar de atracție ($\vec{F} = -F\hat{e}_r$).

Înlocuind (3.15) în ecuația lui Binet (3.14), se obține:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = k_1, \quad (3.18)$$

unde am făcut notația:

$$k_1 = \frac{mk}{J^2} = \text{const.} \quad (3.19)$$

Dacă se face substituția:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{r} - k_1, \quad (3.20)$$

se obține ecuația diferențială omogenă:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x} = 0. \quad (3.21)$$

Aceasta este o ecuație diferențială de tip oscilator armonic liniar, cu variabila dependentă $1/x$ și independentă, φ . Ea admite o soluție forma:

$$\frac{1}{x} = A \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (3.22)$$

Ca urmare:

$$\frac{1}{r} = A \cos(\varphi - \varphi_0) + k_1. \quad (3.23)$$

Constantele A și φ se află plecând de la condițiile inițiale ale mișcării:

$$t = 0 : r = r_0, \dot{r} = \dot{r}_0, J = J_0 = \text{const.} \quad (3.24)$$

Derivând relația (3.23) obținem:

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = -A\dot{\varphi} \sin(\varphi - \varphi_0). \quad (3.25)$$

⁵Henry Cavendish (1731-1810) chimist și fizician englez. A descoperit hidrogenul și argonul. A efectuat experimente de electricitate și a prezis o serie de rezultate, re-descoperite ulterior de Maxwell. Principala sa contribuție în domeniul fizicii este legată de măsurarea constantei atracției universale, γ .

Folosind (3.5) și formula fundamentală a trigonometriei:

$$\sin^2(\varphi - \varphi_0) + \cos^2(\varphi - \varphi_0) = 1, \quad (3.26)$$

se găsește valoarea constantei A :

$$A = \sqrt{\left(\frac{m\dot{r}_0}{J_0 k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_0} - k_1\right)^2}. \quad (3.27)$$

Înlocuind (3.27) în (3.23) se obține ecuația traiectoriei în variabilele r și φ . (Fig.3.3(a)):

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (3.28)$$

Aceasta este ecuația unei curbe conice, cu parametrul:

$$p = \frac{1}{k_1} \quad (3.29)$$

și excentricitatea:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{1}{r_0 k_1} - 1\right)^2 + \left(\frac{m\dot{r}_0}{J_0 k_1}\right)^2}. \quad (3.30)$$

Relația (3.30) se poate rescrie ținând cont de valoarea energiei totale la momentul inițial:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(r_0^2 + r_0^2\dot{\varphi}_0^2) + \left(-\int_{\infty}^{r_0} \left(-\frac{k}{r^2}\right) dr\right) \quad (3.31)$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0}, \quad (3.32)$$

sub forma:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2J_0^2}{mk^2}E + 1}. \quad (3.33)$$

În funcție de valoarea excentricității, ε , conica poate fi:

- (a) un *cerc* de rază $r = p = \frac{J_0^2}{mk}$, (vezi Fig.3.3a) dacă $\varepsilon = 0$. Aceasta se întâmplă când:

$$E = -\frac{mk^2}{2J_0^2}. \quad (3.34)$$

- (b) o *elipsă* (vezi Fig.3.3b) dacă $\varepsilon < 1$, ceea ce presupune ca:

$$E = E_c + E_p < 0, \text{ adică } E_c < |E_p|. \quad (3.35)$$

Prin urmare, condiția ca ansamblul celor două corpuri între care se manifestă forțe de atracție gravitațională să rămână legat este ca energia cinetică inițială a corpului m să fie mai mică decât modulul energiei potențiale a ansamblului (energia potențială

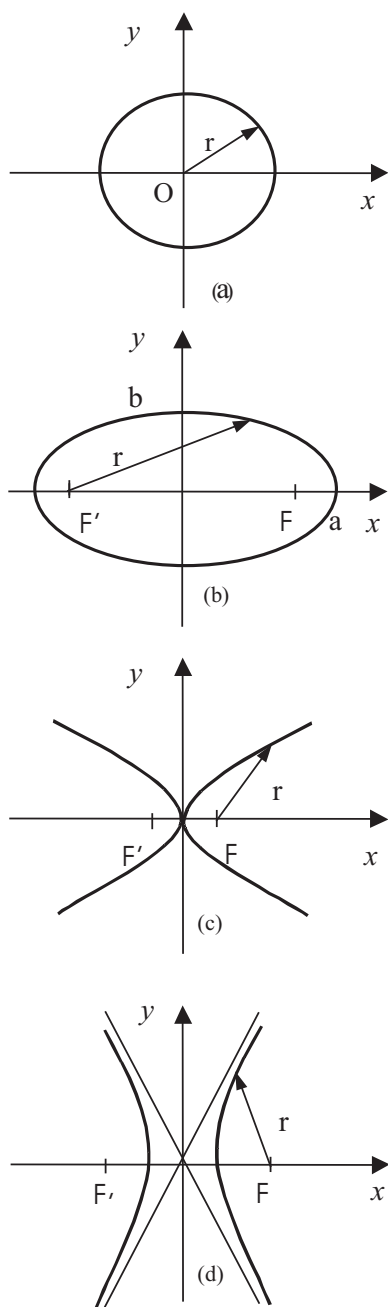


Figura 3.3: Traiectorii conice cu diferite excentricități.

a unui sistem legat este negativă)⁶. Traietorii eliptice au planetele sistemului solar, sateliții Pământului, sau electronii în jurul nucleului⁷.

Valorile semiaxelor unei astfel de traietorii eliptice se obțin prin înlocuirile corespunzătoare:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2|E|}; \quad (3.36)$$

$$b = \sqrt{ap} = \frac{J}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (3.37)$$

$$(3.38)$$

- (c) o *parabolă* (Fig.3.3c), dacă $\varepsilon = 1$. Aceasta se întâmplă atunci când:

$$E = 0 \text{ adică } E_c = |E_p|. \quad (3.39)$$

- (d) o *hiperbolă* (Fig.3.3d), dacă $\varepsilon > 0$, ceea ce se întâmplă atunci când:

$$E > 0 \text{ adică } E_c > |E_p|. \quad (3.40)$$

Traietoria este, în acest caz, deschisă, energia cinetică a corpului de masă m fiind suficient de mare pentru a învinge "bariera energetică" creată de forța de atracție. O valoare pozitivă a energiei totale a sistemului conduce, așadar, la existența unei stări nelegate (libere). Un exemplu în acest sens îl constituie mișcarea în interiorul sistemului solar a unei comete provenind din afara acestuia.

3.4 Legile lui Kepler și atracția universală

Legea atracției universale a fost formulată de Isaac Newton, plecând de la principiul fundamental al dinamicii și de la rezultatele anterioare ale lui Galilei și Kepler, în cadrul modelului heliocentric al lui N. Copernic.

Cele trei legi ale lui Kepler, privitoare la mișcarea planetelor sistemului solar, sunt:

1. *Legea orbitelor eliptice*: Planetele se mișcă în jurul Soarelui pe traietorii eliptice, Soarele fiind într-unul din focare.
2. *Legea ariilor*: Viteza areolară a oricărei planete din sistemul solar este o constantă a mișcării.
3. *Legea perioadelor*: Raportul dintre pătratul perioadei mișcării și cubul semiaxei mari are o valoare constantă pentru toate planetele sistemului solar.

⁶În cazul interacțiunilor electrostatice, în funcție de semnul sarcinilor electrice, energia potențială poate fi negativă sau pozitivă. Forțele de interacțiune electrostatică sunt de tip repulsiv (deci energia potențială este pozitivă) dacă sarcinile electrice au același semn și invers.

⁷Dacă se admite modelul planetar al atomului

Primele două legi sunt consecințe directe ale conservării momentului unghiular al unui corp sub acțiunea unei forțe de tip central, așa cum a fost demonstrat anterior.

Să demonstrăm acum cea de-a treia lege a lui Kepler. Pentru aceasta, vom evalua perioada mișcării pe orbita eliptică:

$$T = \frac{A}{\Omega_a} = \frac{\pi ab}{J/(2m)} \quad (3.41)$$

Ținând cont că:

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (3.42)$$

și folosind prima relație din sistemul de ecuații (3.36) se găsește:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}. \quad (3.43)$$

Înlocuind acum constanta k din (3.15), constatăm că, într-adevăr acest raport este independent de masa planetei:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}. \quad (3.44)$$

În tabelul următor sunt prezentate câteva date referitoare la sistemul planetar al Soarelui, unele exprimate în unități de măsură specifice Pământului.

Planeta	Raza (R_{Pam})	T(ani)	ε	Masa (M_{Pam})
Mercur	0,387	0,241	0,206	0,055
Venus	0,723	0,615	0,007	0,815
Pământ	1,000	1,000	0,017	1,000
Marte	1,524	1,881	0,093	0,107
Jupiter	5,203	11,862	0,048	317,94
Saturn	9,539	29,460	0,056	95,18
Uranus (1781)	19,191	84,020	0,046	14,53
Neptun (1846)	30,061	164,77	0,010	17,13
Pluto (1930)	39,529	247,68	0,248	0,0022

Forța de atracție gravitațională dintre două corpuri purtătoare de sarcină (masă) gravitațională este direct proporțională cu produsul maselor gravitaționale ale corpurilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r. \quad (3.45)$$

Constanta atracției universale, γ , care intervine în ecuația (3.45) este numeric egală cu forța de interacțiune dintre două corpuri cu masa de 1 kg, aflate în vid, la distanța de 1m unul de celălalt. Valoarea sa a fost măsurată de Cavendish cu ajutorul unui instrument de mare sensibilitate pentru măsurarea forțelor - *balanța de torsiune*, prezentată schematic în Fig.3.4.

Două sfere din plumb cu diametrul de 5 cm sunt fixate la capetele unei bare cu lungimea de 1,8 m, suspendată la mijlocul ei de un fir de torsiune din cuarț. De acesta este prinsă

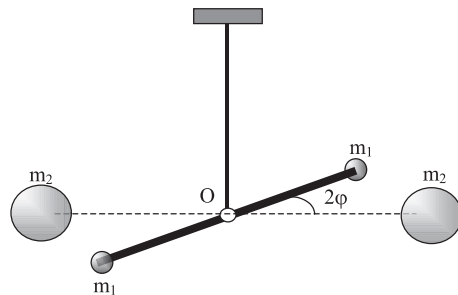


Figura 3.4: Schema dispozitivului experimental pentru măsurarea constantei atracției gravitaționale.

oglanda O. Aducând în apropierea sferelor mici alte două sfere, tot din plumb, dar de diametru mai mare (31 cm), s-a constatat o deviere a barei către poziția marcată cu linie punctată, ca urmare a atracției sferelor de masă m_1 de către sferile de masă m_2 . Deviația barei a putut fi măsurată cu ajutorul unghiului de deviere a unui fascicul luminos provenit de la o sursă de lumină, reflectat de oglinda O și proiectat apoi pe un ecran⁸. Etalonând firul din cuarț astfel încât să se cunoască valoarea forței ce produce torsiunea firului pentru un unghi de deviație dat, s-a putut calcula valoarea forței de interacțiune dintre corpuri și astfel valoarea constantei gravitaționale. Experimentul lui Cavendish a fost primul care a permis o evaluare numerică a constantei γ și de asemenea, a masei Pamântului. Valoarea acceptată în prezent pentru γ este:

$$\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}. \quad (3.46)$$

3.5 Problema celor două corpuri

În secțiunea anterioară am considerat doar mișcarea unui corp sub acțiunea forței determinată de prezența altui corp de masă mult mai mare, aflat în repaus în originea sistemului de referință. În condițiile în care $M \gg m$, accelerația produsă de forța de atracție asupra corpului *atractor* (Soare, nucleu etc.) este practic neglijabilă, comparativ cu efectul aceleiași forțe asupra corpului *atras*, m . Deoarece o mișcare accelerată este, în aceste condiții, executată doar de corpul m , studiul prezentat în secțiunea anterioară este cunoscut și sub denumirea de *problema unui singur corp*.

Având în vedere că, de fapt, ambele corpuri sunt în același timp atractor și atras, la o examinare mai detaliată *ar trebui să evaluăm efectele forței de atracție asupra ambelor corpuri, deci să formulăm și să studiem o problemă a celor două corpuri*. De altfel, în multe alte cazuri întâlnite în situații reale, este necesar să studiem mișcarea unor corpuri de mase comparabile, aflate în interacțiune gravitațională sau coulombiană. Evident, într-un asemenea caz și accelerațiile ambelor corpuri sunt comparabile.

Cunoscând expresia forței de interacțiune gravitațională dintre corpurile de mase m_1 și

⁸După cum este cunoscut din cursul elementar de fizică, dacă o oglindă plană se rotește cu un anumit unghi, α față de direcția (fixă) a fascicolului incident, fascicolul reflectat se rotește cu un unghi 2α .

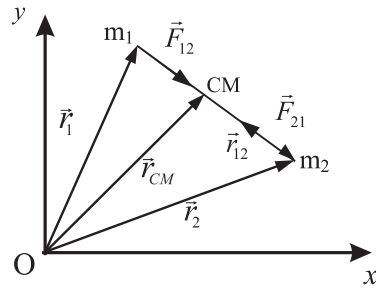


Figura 3.5: Un sistem izolat format din două corpuri de mase m_1 și m_2 .

m_2 , pe care le considerăm că ca formând un sistem izolat de exterior, să aflăm care sunt traiectoriile pe care se vor mișca acestea.

Aplicăm principiul fundamental al dinamicii, pentru fiecare din cele două corpuri:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}; \quad (3.47)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21}. \quad (3.48)$$

Ecuatiile sunt cuplate prin termenul forță, care depinde de distanța $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ dintre corpuri. Deoarece:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (3.49)$$

prin scăderea celor două relații (3.47) și (3.48) se obține:

$$\vec{F}_{21} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2}, \quad (3.50)$$

sau:

$$\vec{F}_{21} = \mu \frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2}. \quad (3.51)$$

Mărimea $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ se numește *masa redusă*⁹ a sistemului. Relația (3.51) reprezintă ecuația diferențială de mișcare a unui corp generic, de masă μ , aflat sub acțiunea unei forțe egală cu cea de interacțiune dintre corpurile ce formează sistemul. Ca urmare, problema celor două corpuri se reduce astfel la cea a unui singur corp aflat sub acțiunea unei forțe de tip central.

După rezolvarea ecuației (3.50) se găsește legea de mișcare:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{12}(t). \quad (3.52)$$

⁹Conceptul de masă redusă a fost folosit pentru introducerea corecției de masă în calculul energiei electronului pe orbită în modelul Bohr, deoarece electronul și nucleul execută împreună o rotație în jurul unei axe ce trece prin centrul de masă al sistemului.

Legile de mișcare ale fiecărui corp se află ușor prin recurgerea la noțiunea de *centru de masă* al sistemului. Poziția acestuia se definește în funcție de pozițiile corpurilor componente ale sistemului (exprimate prin \vec{r}_1, \vec{r}_2 și \vec{r}_{12}) conform relației:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.53)$$

Mutând originea O a sistemului de referință în CM, obținem, pentru vectorul de poziție al centrului de masă (CM) în raport chiar cu sistemul centrului de masă (SCM), expresia:

$$(\vec{r}_{CM})_{SCM} = 0, \quad (3.54)$$

sau, echivalent:

$$m_1(\vec{r}_1)_{SCM} + m_2(\vec{r}_2)_{SCM} = 0. \quad (3.55)$$

Folosind (3.55) și reprezentarea din Fig.3.5, se obțin, pentru vectorii de poziție ai celor două corpuri în sistemul SCM, relațiile:

$$(\vec{r}_1)_{SCM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}; \quad (3.56)$$

$$(\vec{r}_2)_{SCM} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}, \quad (3.57)$$

iar în sistemul laboratorului (SL):

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}; \quad (3.58)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}. \quad (3.59)$$

Legile de mișcare ale lui m_1 și m_2 pot fi scrise dacă este cunoscută valoarea lui \vec{r}_{CM} .

În sistemul laboratorului, cele două corpuri se mișcă împreună, ca o pereche, unul în jurul celuilalt, în timp ce, concomitent, are loc o mișcare de drift a centrului de masă. De fapt, centrul de masă se depășește cu viteză constantă, astfel că, pentru un observator care s-ar mișca odată cu el, orbitele corpurilor sunt simple elipse.

În Fig.3.6 sunt reprezentate în sistemul centrului de masă (SCM) traiectoriile corpurilor de masă m_1, m_2 și a celui de masă redusă pentru exemplul numeric: $m_1/m_2 = 10/7$ și condiții inițiale: (1; 0) respectiv (0; 0,6).

După cum indică și relațiile (3.56), (3.57), cele două corpuri se mișcă pe traiectorii asemenea, astfel încât raportul vectorilor de poziție este invers proporțional cu raportul maselor. Pentru condițiile inițiale alese, traiectoriile sunt eliptice, cu un focar comun situat în CM, corpurile fiind în permanență diametral opuse.

Traectoria corpului sub acțiunea forței de tip central depinde de valoarea energiei cinetice și potențiale a corpului. Iată, spre exemplu, în Fig.3.7 cum se modifică forma traiectoriei corpului generic de masă μ sub acțiunea unei forțe de atracție, pentru diferite valori ale raportului vitezei inițiale față de viteza corespunzătoare unei orbite circulare ($k = 0, 3; 0, 7; 1, 1; 1, 5$).

$$k = \frac{v}{v_c} = v / \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}. \quad (3.60)$$

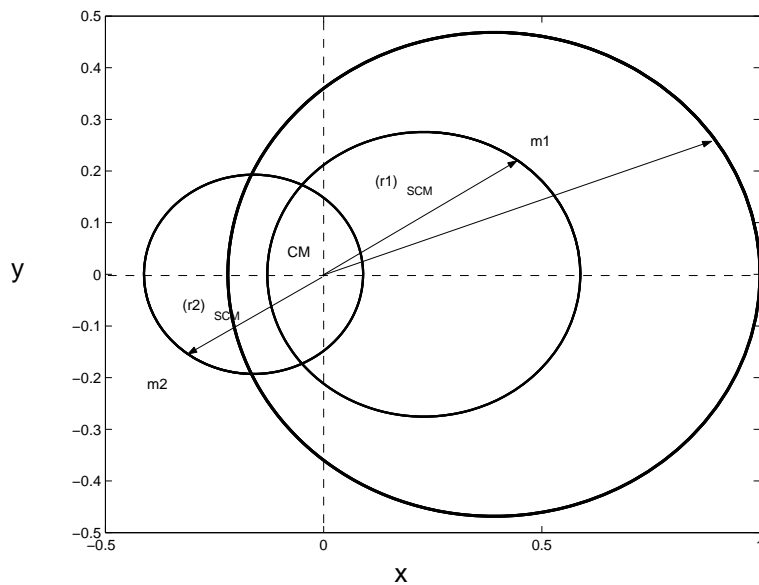


Figura 3.6: Trajecțiile în SCM ale corpurilor de masă m_1, m_2 și μ pentru exemplul numeric: $m_1/m_2 = 10/7$ și condiții inițiale: $(1; 0)$ respectiv $(0; 0,6)$.

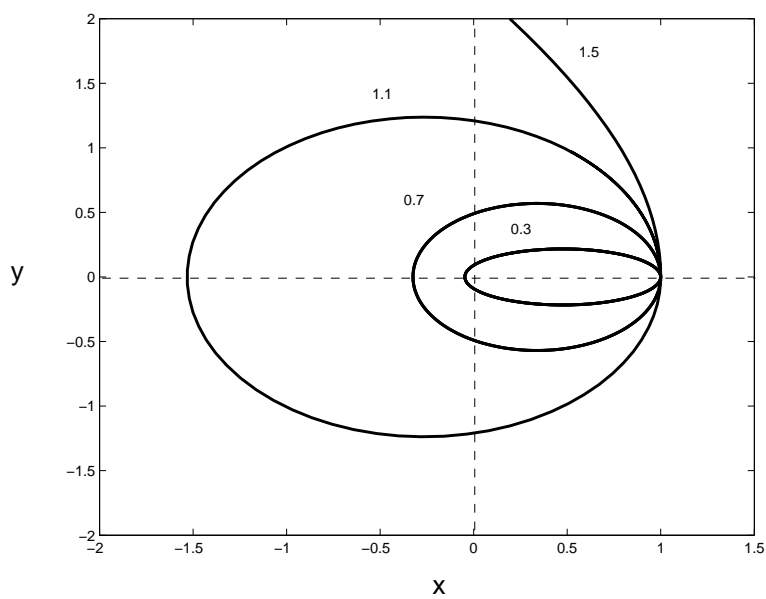


Figura 3.7: Trajecția corpului generic de masă redusă μ pentru diferite valori ale coeficientului k .

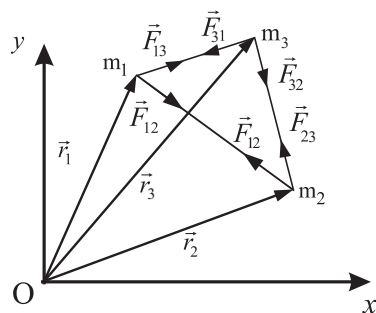


Figura 3.8: Un sistem izolat de trei corpuri, între care se manifestă doar forțe de interacțiune gravitațională.

În mod evident, dacă unul dintre corpuri are masa mult mai mare decât celălalt, se poate considera că el se află chiar în poziția CM a sistemului. În această aproximație corpul "greu", M , rămâne imobil (de exemplu Soarele, a cărui masă este $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg), în jurul lui gravitând corpul "ușor" (de exemplu Pământul, cu masa $m = 5.97 \times 10^{24}$ kg).

3.6 Problema celor trei corpuri

Problema interacțiunii dintre corpuri devine foarte complexă dacă se mărește numărul corpurilor aflate în interacțiune. Să considerăm trei corpuri ce formează un sistem izolat, între care se manifestă doar forțe de interacțiune gravitațională (Fig.3.8).

Ecuatiile care le descriu mișcarea sunt:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{13}; \quad (3.61)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\gamma \frac{m_2 m_1}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} - \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{23}; \quad (3.62)$$

$$m_3 \frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = -\gamma \frac{m_3 m_1}{r_{31}^3} \vec{r}_{31} - \gamma \frac{m_3 m_2}{r_{32}^3} \vec{r}_{32}. \quad (3.63)$$

Acesta este un sistem de trei ecuații diferențiale de ordin doi, neliniare, cuplate, care sunt echivalente cu un sistem de șase ecuații scalare. Rezolvarea ar conduce, cunoscând condițiile inițiale referitoare la poziția și viteza fiecărui corp, la determinarea legilor de mișcare și apoi, prin eliminarea corespunzătoare a timpului, la ecuațiile traiectoriilor. Din păcate, nu se pot găsi soluții analitice ale ecuațiilor diferențiale precedente, ci doar soluții aproximative, găsite folosind tehnici numerice.

Studiul problemei în sistemul centrului de masă (**SCM**) simplifică și în aceste condiții calculele, deoarece cunoașterea mișcării permite, prin legătura dintre vectorii de poziție ai fiecărui corp în **SL** și în **SCM**, determinarea mișcării exacte a fiecărui corp.

În Fig.3.9 este redată forma traiectoriei obținută prin rezolvarea numerică a sistemului ecuațiilor scalare, surprinsă la patru momente de timp diferite, pentru trei corpuri de mase

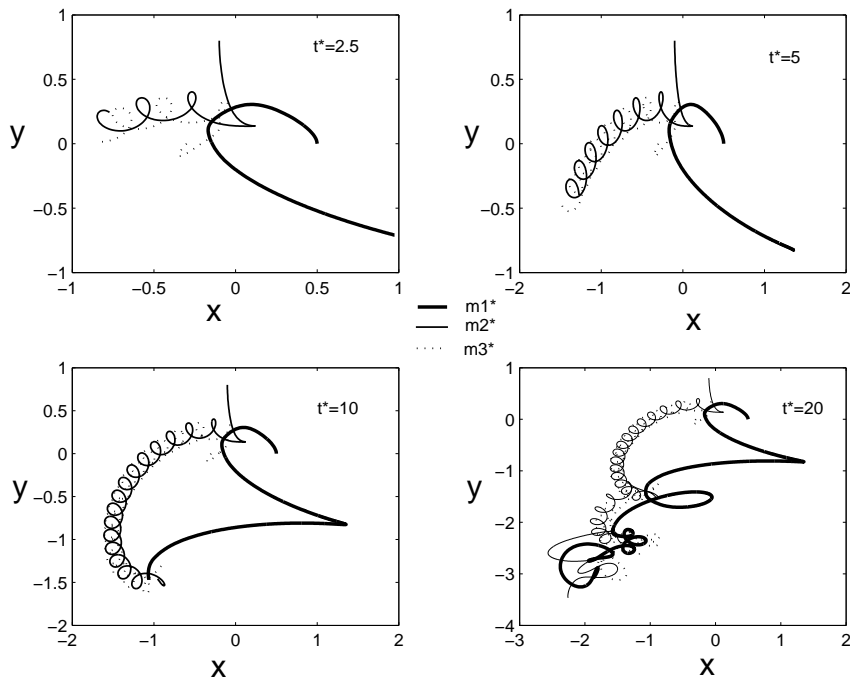


Figura 3.9: Traiectoriile obținute prin rezolvare numerică, pentru trei corpuri de mase egale (linie groasă, subțire și punctată), surprinsă după patru intervale de timp diferite (t^*), notate pe fiecare reprezentare.

egale. Pentru eliminarea parametrilor care nu sunt absolut necesari în calculele numerice s-a procedat la adimensionalizarea sistemului de ecuații, prin introducerea *coordonatelor reduse*:

$$m_i^* = \frac{m_i}{M}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{d}, \quad y_i^* = \frac{y_i}{d}, \quad t^* = \frac{t}{d/v_c}, \quad v_c = \sqrt{\gamma \frac{M}{d}}, \quad (3.64)$$

unde d este o distanță caracteristică iar M - o masă caracteristică. Avantajul pe care îl oferă această adimensionalizare este acela că elimină constanta γ . Condițiile inițiale pentru cele trei corpuri ($m_3^* = m_2^* = m_1^* = 0,5$) sunt: $(-0,1; 0,8)$, $(0,5; 0)$, $(-0,3; 0)$ pentru pozițiile $(x_0; y_0)$ și respectiv $(0; -0,4)$, $(0; 0,3)$, $(-0,3; -0,4)$ pentru vitezele inițiale $(\dot{x}_0; \dot{y}_0)$ ¹⁰. Se observă modul în care se complică traiectoria corpurilor pe măsură ce se micșorează distanța dintre corpuri, datorită creșterii puternice a forței de interacțiune gravitațională.

O problemă deosebit de interesantă și utilă totodată din punct de vedere al aplicațiilor practice, este aceea în care m_3 este neglijabilă în comparație cu celelalte mase.

Forma traiectoriei unui satelit ($m_3^* = 0,0005$) lansat în spațiul în care există un sistem de două corpuri cerești cu mase egale ($m_1^* = m_2^* = 0,5$) este redată în Fig.3.10. Pozițiile inițiale (m_1 : $(-0,5; 0)$, m_2 : $(0,5; 0)$) au fost alese astfel încât centrul de masă al celor două corpuri

¹⁰Alegerea acestora depinde de problema concretă care se studiază. În condițiile de față ele corespund: d - distanța inițială dintre corpurile 1 și 2 și M - masa totală a celor două corpuri. Pentru simplificarea notațiilor vom folosi în cele ce urmează scrierea fără asterisc pentru mărimile adimensionalizate.

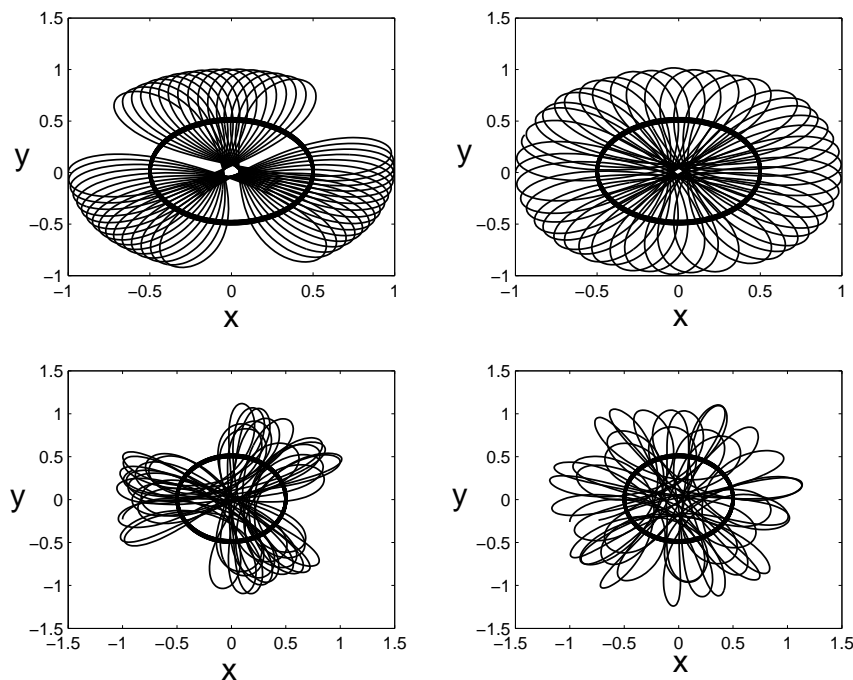


Figura 3.10: Traiectoriile unui satelit ($m_3 = 0,0005$, după $t^* = 100$ - linie subțire) ce pornește din condiții inițiale diferite, în jurul a două corpuri de mase egale ($m_1 = m_2 = 0,5$ - linie groasă).

să se afle chiar în originea sistemului de axe. Valorile vitezelor inițiale (m_1 : $(0; -0,5)$ și m_2 : $(0; 0,5)$) corespund mișcării corpurilor m_1, m_2 pe traiectorii circulare cu originea în centrul de masă. Cel de-al treilea corp, de masă neglijabilă, va executa mișcări periodice sau haotice, în funcție de condițiile lui inițiale.

În Fig.3.10 sunt surprinse, după un timp $t^* = 100$, traiectoriile celor trei corpuri. Se observă cum modificarea condițiilor inițiale ale corpului 3 (linie subțire) schimbă puternic traiectoria acestuia. De la o traiectorie periodică (corpul 3 execută trei bucle închise pe timpul unei perioade ale corpului 1 și 2) se trece spre o traiectorie cu bucle inegale și apoi în ultimele două cazuri spre o traiectorie haotică. Figura 3.11 ilustrează mișcarea unui satelit ($m_3^* = 0,0005$) în cazul perechii Pământ-Lună, pentru care: $m_1^* = 81/82$; $m_2^* = 1/82$, pentru două condiții inițiale diferite ale corpului m_3^* (marcate pe desen), pentru aceleași condiții inițiale ale corpurilor 1 și 2 considerate în figura anterioară.

3.7 Probleme

1. O particulă se mișcă pe o traiectorie circulară sub acțiunea unei forțe de tip central, cu centrul într-un punct de pe cerc. Arătați că modulul forței este invers proporțional cu puterea a 5-a a distanței.
2. Un satelit cu masa m , neglijabilă comparativ cu masa Pământului, este lansat cu viteza v paralelă cu suprafața solului, la înălțimea de 320 km. Se dau: masa Pământului

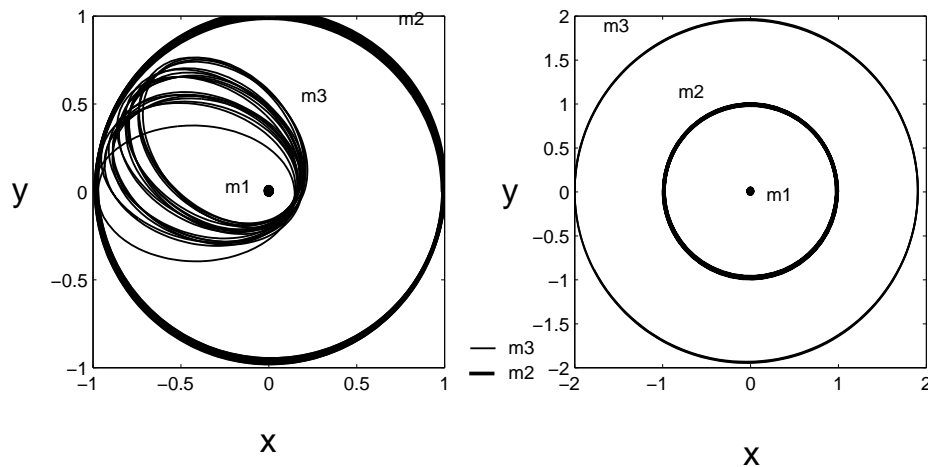


Figura 3.11: Mișcarea unui satelit ($m_3 = 0.0005$) în cazul perechii de corpuri Pământ-Lună; s-a considerat: $m_1^* = 81/82$; $m_2^* = 1/82$ și condițiile inițiale: $((-1; 0), (0; 0,506))$ - stânga și $((-2; 0), (0; 0,7))$ - dreapta.

$M = 5.98 \times 10^{24}$ Kg, raza Pământului $R = 6.38 \times 10^6$ m și constanta $\gamma = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2Kg^{-1} .

- Calculați valoarea vitezei necesare pentru a aduce satelitul pe orbita circulară;
- Care este viteza de "evadare" a satelitului în spațiu?
- Considerând că satelitul este observat la un moment ulterior lansării, la o distanță de 1000 Km de suprafața Pământului, calculați:
 - excentricitatea orbitei;
 - viteza;
 - energia totală pe orbita eliptică.

Răspuns: (a) $v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$; (b) $v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}$; (c1) $\varepsilon = \frac{1}{2a}(r_{\max} - r_{\min})$

(c2) $v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{2a} \frac{r_{\max}}{r_{\min}}}$; (c3) $E = -\frac{\gamma M m}{2a}$.

- O particulă de masă m se mișcă pe un cerc de rază r_0 sub acțiunea unei forțe atractive $F(r) = \frac{1}{r^2} \exp(-\frac{r}{a})$; $a > 0$. Arătați că mișcarea circulară este stabilă doar dacă $r_0 < a$.
- Un corp se mișcă pe o orbită spirală $r = r_0 e^{k\theta}$ cu r_0, k - constante. Arătați că forța ce determină o astfel de mișcare este de tip central, invers proporțională cu r^3 și că θ variază în timp după o lege logaritmică.

Dinamica sistemelor discrete de particule

În capitolele anterioare am recurs, din motive de simplitate, la modelul punctului material. Corpurile din viața reală pot fi approximate, într-o măsură mai mare sau mai mică, ca fiind puncte materiale. Modele mai apropiate de realitate ar fi acelea în care corpurile reale sunt approximate prin *sisteme de puncte materiale*. Acestea pot fi formate dintr-un număr finit de puncte - așa-numitele *sisteme discrete* de puncte - sau pot conține, chiar în orice volum elementar, un număr enorm de particule - așa-numite *sisteme cu distribuție continuă* de masă, pe scurt, *medii continue*. Din categoria sistemelor discrete de puncte, putem aminti, ca exemple, atomii sau moleculele unui gaz, electronii din interiorul atomului¹, sau planetele sistemului solar. Dintre exemplele cele mai cunoscute de sisteme continue, vom aminti *modelul de fluid*, sau cel de *corp solid*. Pentru a se menține ca o entitate stabilă, între constituenții unui astfel de sistem, sau între aceștia și corpurile exterioare, trebuie să se exercite forțe de atracție sau forțe de legătură.

Deoarece, într-un fel sau altul, orice sistem este alcătuit dintr-un ansamblu de corpuri ce pot fi considerate puncte materiale, mărimile caracteristice sistemelor de particule se exprimă ca o sumă de mărimi specifice punctului material. *Evident, această sumă va fi una algebrică, în cazul mărimilor scalare și una vectorială, în cazul mărimilor vectoriale*. Trebuie menționat că, în cazul sistemelor de puncte materiale, apar și o serie de mărimi noi, care nu se pot defini în cazul unui punct material (cum ar fi temperatura, densitatea, concentrația, etc.).

În acest capitol vom studia legile mecanicii sistemelor discrete de puncte materiale, pe baza cunoștințelor acumulate în studiul mișcării punctului material.

4.1 Mărimi caracteristice sistemelor de particule

Să considerăm un sistem alcătuit dintr-un număr N de particule de mase m_i (Fig.4.1). Întrucât masa este o mărime scalară, masa sistemului va fi egală cu suma (algebrică) a maselor

¹în limitele modelului planetar al atomului

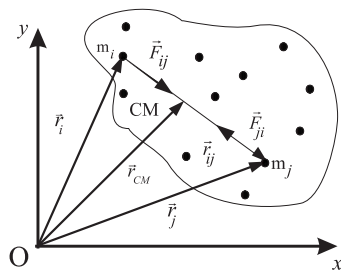


Figura 4.1: Sistem de puncte materiale

particulelor sistemului:

$$m = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (4.1)$$

Dacă notăm cu \vec{v}_i vitezele fiecărui punct material constituent al sistemului, se poate defini impulsul sistemului ca suma (vectorială) a impulsurilor fiecărui punct material:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (4.2)$$

În cazul sistemelor de puncte materiale, există două categorii distincte de forțe: *forțe interne* și *forțe externe*. Forțele de interacțiune dintre perechile de particulele constituente ale sistemului se numesc *forțe interne*. Forțele de interacțiune dintre particulele sistemului și alte corpuri din exteriorul acestuia se numesc *forțe externe*. Rezultanta forțelor interne este nulă:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{F}^{\text{int}} = 0, \quad (4.3)$$

întrucât, conform principiului acțiunii și reacțiunii, acțiunea exercitată de punctul material i asupra punctului j din sistem este egală în modul și opusă ca sens cu reacțiunea exercitată de punctul j asupra lui i :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (4.4)$$

Așadar:

Rezultanta forțelor interne unui sistem de puncte materiale este nulă.

Să considerăm, în cele ce urmează, că asupra sistemului acționează un alt sistem (exterior), format din N' corpuri. Forța totală (externă) ce acționează asupra sistemului de N particule va fi:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N'} \vec{F}_{ik}^e = \vec{F}^{\text{ext}}. \quad (4.5)$$

Având în vedere și ecuația (4.3), rezultă că:

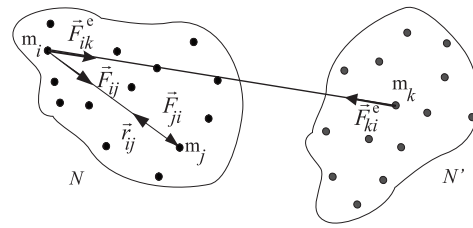


Figura 4.2: Două sisteme de puncte materiale aflate în interacțiune.

Forța rezultantă ce acționează asupra unui sistem de puncte materiale este egală cu suma forțelor de interacțiune dintre componentele sistemului și corpurile exterioare acestuia.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}^{\text{int}} + \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N'} \vec{F}_{ik}^e. \quad (4.6)$$

4.2 Centrul de masă. Legi de conservare

Noțiunea de *centru de masă* a fost deja introdusă la studiul problemei celor două corpuri. Vom generaliza această definiție pentru cazul unui sistem de N particule caracterizate de vectorii de poziție \vec{r}_i .

Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale este un punct geometric reprezentativ pentru sistem, definit prin vectorul de poziție:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (4.7)$$

unde m reprezintă masa sistemului.

Derivând relația (4.7) în raport cu timpul, se obține viteza centrului de masă:

$$\vec{v}_{CM} = \dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i. \quad (4.8)$$

Se observă că produsul:

$$m \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (4.9)$$

reprezintă impulsul sistemului. Prin urmare, *impulsul centrului de masă este egal cu impulsul sistemului, centrul de masă fiind un punct reprezentativ al acestuia.*

Derivând încă o dată în raport cu timpul relația (4.7) se obține accelerația centrului de masă:

$$\vec{a}_{CM} = \dot{\vec{v}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i. \quad (4.10)$$

Relația poate fi rescrisă sub forma:

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}^{ext}. \quad (4.11)$$

Deci, accelerația pe care o are centrul de masă este aceeași cu accelerația pe care ar căpăta-o un corp punctiform, de masă egală cu masa sistemului, sub acțiunea unei forțe egală cu \vec{F}^{ext} . Această observație permite simplificarea studiului dinamicii unui sistem de corpuri, în sensul că, mai întâi se determină caracteristicile mișcării centrului de masă sub acțiunea forței rezultante și ulterior se determină mișcarea fiecărei componente a sistemului în raport cu centrul de masă.

4.3 Legea conservării impulsului

Ecuția (4.11) conduce direct la legea conservării impulsului unui sistem de puncte izolate de exterior. Întrucât, în cazul unui sistem izolat, $\vec{F}^{ext} = 0$:

$$\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const.}, \quad (4.12)$$

cea ce reprezintă formularea matematică a legii conservării impulsului sistemului:

Impulsul unui sistem izolat de puncte materiale se conservă.

Așa cum s-a constatat în cazul problemei celor două corpuri, uneori este mai simplă analiza mișcării sistemelor de puncte materiale în raport cu *sistemul centrului de masă (SCM)*, urmând ca revenirea la *sistemul laboratorului (SL)* să se facă doar în final, pentru a se compara rezultatele obținute cu experimentul.

În cazul în care asupra sistemului nu acționează forțe exterioare, **SCM** este inerțial. Vectorul de poziție al unui corp oarecare din sistem poate fi scris ca:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + (\vec{r}_i)_{SCM}. \quad (4.13)$$

Derivând relația în raport cu timpul, rezultă că viteza fiecărui corp depinde de sistemul de referință în care aceasta a fost definită:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + (\vec{v}_i)_{SCM}. \quad (4.14)$$

4.4 Legea conservării energiei

Să calculăm lucrul mecanic efectuat de forțele interne și externe care acționează asupra particule i a sistemului, pentru a o deplasa între punctele caracterizate de vectorii de poziție \vec{r}_1 și \vec{r}_2 .

$$L_i^{\text{int}} + L_i^{\text{ext}} = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}) d\vec{r}_i = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\vec{p}_i}{dt} d\vec{r}_i = \quad (4.15)$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} m_i v_i^2(t) - \frac{1}{2} m_i v_i^2(0), \quad (4.16)$$

adică:

$$L^{\text{int}} + L^{\text{ext}} = E_c(t) - E_c(0), \quad (4.17)$$

unde:

$$L^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N L_i^{\text{int}}; \quad L^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N L_i^{\text{ext}}; \quad (4.18)$$

$$E_c(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2(t), \quad E_c(0) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2(0). \quad (4.19)$$

Se observă că la variația energiei cinetice a sistemului contribuie atât forțele interne cât și cele externe. În cazul în care forțele care acționează asupra sistemului sunt conservative, atunci se pot defini energiile potențiale corespunzătoare acestora.

$$L^{\text{int}} + L^{\text{ext}} = -(E_p^{\text{int}}(t) - E_p^{\text{int}}(0)) - (E_p^{\text{ext}}(t) - E_p^{\text{ext}}(0)). \quad (4.20)$$

Folosind ecuațiile (4.17) și (4.20) se ajunge la *legea conservării energiei totale*:

$$E_c(t) + E_p^{\text{int}}(t) + E_p^{\text{ext}}(t) = E_c(0) + E_p^{\text{int}}(0) + E_p^{\text{ext}}(0) = \text{const.} \quad (4.21)$$

În cazul unui sistem izolat, $L_{\text{ext}} = 0$ și ca urmare se obține legea conservării energiei mecanice:

$$E_c(t) + E_p^{\text{int}}(t) = E_c(0) + E_p^{\text{int}}(0) = \text{const.} \quad (4.22)$$

Energia potențială, în cazul unui sistem de corpuri între care se manifestă forțe de interacțiune gravitațională, depinde doar de distanța relativă dintre corpuri și nu depinde de sistemul de referință ales pentru studiul mișcării:

$$E_p^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N E_p^{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \quad (4.23)$$

Factorul 1/2 este necesar pentru a elimina sumarea de două ori a aceluiași termen, iar:

$$E_p^{ij} = -\gamma \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (4.24)$$

Singurul termen care depinde de sistemul de referință ales pentru studiul mișcării este energia cinetică. Având în vedere relația (4.14), energia cinetică definită în SL este:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{v}_i)_{SCM}^2 + 2(\vec{v}_i)_{SCM} \vec{v}_{CM} + v_{CM}^2] \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i)_{SCM}^2 + \vec{v}_{CM} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i)_{SCM} + \frac{1}{2} \vec{v}_{CM} \sum_{i=1}^N m_i \quad (4.26)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i)_{SCM}^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM} \\ = (E_c)_{SCM} + \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}. \quad (4.27)$$

Deoarece impulsul centrului de masă măsurat în raport cu centrul de masă este nul, rezultă:

$$\sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i)_{SCM} = m (\vec{v}_{CM})_{SCM} = 0. \quad (4.28)$$

În concluzie, energia cinetică a unui sistem, măsurată în raport cu **SL**, este egală cu energia cinetică măsurată în **SCM** (numită *energie cinetică internă*) la care se adaugă energia cinetică de translație a CM (numită *energie cinetică orbitală*).

Energia internă este:

$$E_{\text{int}} = (E_c)_{SCM} + E_p^{\text{int}}. \quad (4.29)$$

Deoarece pentru forțele de tip atractiv energia potențială este negativă, energia internă a unui sistem poate avea atât valori pozitive cât și valori negative, după cum energia cinetică internă este mai mică sau mai mare decât energia potențială internă.

Un sistem se numește *legat* dacă forțele interne îl mențin localizat într-o regiune finită din spațiu (exemplu sistemul planetar, sistemul atomic, sistemul nuclear etc.). Sistemele legate au energie internă negativă.

Sistemul este stabil atunci când:

$$E_{\text{int}} = 0. \quad (4.30)$$

Pentru a desface sistemul în părțile componente și a elibera astfel particulele din sistem, trebuie să furnizăm acestuia o energie pozitivă de valoare:

$$E_{\text{leg}} = -E_{\text{int}}. \quad (4.31)$$

4.5 Legea conservării momentului unghiular

Să calculăm momentul forței care acționează asupra punctului material i din sistem, în raport cu originea O :

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (4.32)$$

Asupra punctului i acționează atât forțe din partea celorlalte puncte din sistem cât și forțe din exterior:

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{int} + \vec{F}_i^{ext}. \quad (4.33)$$

Momentul total al forțelor care acționează asupra sistemului este dat de suma vectorială a momentelor individuale:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{int}) + \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}). \quad (4.34)$$

Suma dublă conține termeni de tipul:

$$(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{int}) + (\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}^{int}), \quad (4.35)$$

care, datorită faptului că:

$$\vec{F}_{ij}^{int} = -\vec{F}_{ji}^{int}, \quad (4.36)$$

se anulează, întrucât conține produse vectoriale de vectori coliniari:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{int} = \vec{r}_{ji} \times \vec{F}_{ij}^{int} = 0. \quad (4.37)$$

Momentul unghiular total va fi determinat doar de forțele exterioare:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}). \quad (4.38)$$

Pe de altă parte:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i), \quad (4.39)$$

din cauza coliniarității vectorilor \vec{v}_i și \vec{p}_i ($\vec{v}_i \times \vec{p}_i = 0$). Se obține:

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{J}_i = \frac{d\vec{J}}{dt}, \quad (4.40)$$

unde:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \vec{J}_i \quad (4.41)$$

este *momentul unghiular total* al sistemului de puncte materiale. Această mărime se conservă, adică își păstrează neschimbate mărimea, direcția și sensul:

$$\vec{J} = \overrightarrow{const.} \quad (4.42)$$

atunci când:

(a) sistemul este izolat adică, $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = 0$;

(b) când asupra sistemului acționează forțe de tip central, adică $\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = 0$.

4.6 Ciocniri. Definiții și clasificări

Procesul de interacțiune de scurtă durată dintre două sau mai multe corpuri² se numește *ciocnire*. Forța de interacțiune care apare în momentul ciocnirii este mult mai mare decât orice altă forță exterioară, de aceea, pe durata ciocnirii, sistemul se consideră izolat. În aceste circumstanțe sunt valabile legile de conservare ale impulsului și energiei totale:

$$\vec{p} = \vec{p}' ; \quad (4.43)$$

$$E_c + E_{int} = E_c' + E_{int}' . \quad (4.44)$$

unde s-au notat cu " ' ", mărimile după ciocnire.

Există două modalități de producere a ciocnirii:

- (a) prin contact direct (de exemplu ciocnirile dintre bile la jocul de biliard, coliziunile directe, etc.)
- (b) prin intermediul acțiunii la distanță mijlocite de prezența câmpului (de exemplu ciocniri cometă-Soare; ciocniri între particule încărcate, etc.).

În general, numărul de particule dinainte de ciocnire poate să fie diferit de numărul de particule după ciocnire.

Clasificarea ciocnirilor se poate face în funcție de diverse criterii. Unul dintre acestea folosește noțiunea denumită *energie de reacție*, Q , definită ca diferența dintre energia internă a sistemului în stările inițială și finală:

$$Q = E_{int} - E_{int}' . \quad (4.45)$$

1. Dacă $Q = 0$, avem de a face cu o *ciocnire elastică*³. În acest caz, se conservă nu numai impulsul sistemului, ci și energia sa cinetică:

$$\vec{p} = \vec{p}' , \quad (4.46)$$

$$E_c = E_c' . \quad (4.47)$$

2. Dacă $Q \neq 0$ *ciocnirea este neelastică*

- (a) $Q < 0$ *ciocnire endoenergetică (de speța I-a)*:

$$E_c < E_c' . \quad (4.48)$$

Creșterea energiei interne se face pe seama diminuării energiei cinetice. În această categorie intră marea majoritate a ciocnirilor inelastice. Procesele de excitare și ionizare sunt ciocniri inelastice de speța I-a.

²durată mult mai mică decât cea în care acestea nu interacționează

³Astfel de ciocniri se întâlnesc, de exemplu, în cazul împrăștierei elastice a particulelor α pe nuclee grele (împrăștiere Rutherford), la ciocnirea foton-electron (efect Compton), etc.

(b) $Q > 0$ ciocnire exoenergetică (de speța a II-a)

$$E_c > E'_c. \quad (4.49)$$

Scăderea energiei interne se face pe seama creșterii energiei cinetice după ciocnire. În această categorie intră și procesele atomice de dezexcitare, recombinație, reacțiile nucleare de fisiune și fuziune, etc.

Un alt criteriu clasifică ciocnirile în: a) directe; b) inverse. Un exemplu de ciocnire inversă îl constituie o explozie. Un film al unui astfel de eveniment, proiectat invers, ne va arăta o ciocnire plastică, care este o ciocnire directă.

De asemenea, în funcție de orientarea vitezelor particulelor, ciocnirile se pot clasifica în:

- a) uni-dimensionale; dacă vitezele particulelor înainte și după ciocnire rămân pe aceeași dreaptă suport (putând avea un sens sau altul, pe această dreaptă),
- b) oblice; dacă aceste viteze fac unghiuri diferite de 0 sau 180°.

Există două metode de studiu a ciocnirilor. Prima dintre ele folosește așa numitul *model asimptotic*, conform căruia traiectoriile particulelor înainte și după ciocnire sunt rectilinii și nu se ține cont de ceea ce se întâmplă cu corpurile în zona de ciocnire. Într-o a doua abordare, se folosește *modelul dinamicii ciocnirilor*. Acest model detaliază traiectoria particulelor în zona de ciocnire și ține cont de toate cauzele ce influențează mișcarea corpurilor pe durata ciocnirii.

4.6.1 Impulsul forței și variația impulsului în decursul ciocnirii

Se admite drept moment de "start" (t) al unei ciocniri, acela în care forțele nou-apărute datorită interacțiunii dintre corpuri produc efecte măsurabile, iar momentul de "stop", (t'), acela în care aceste forțe devin neglijabile.

În Fig.4.3 este reprezentată o posibilă variație temporală a forțelor - perechi exercitate asupra a două bile elastice care se ciocnesc între ele. Într-un interval de timp infinitezimal, pe durata ciocnirii, forța $F(t)$ va determina o variație infinitezimală a impulsului fiecărui corp. Conform principiului al II-lea al dinamicii:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}(t) \cdot dt. \quad (4.50)$$

Mărimea $d\vec{p}$ reprezintă *variația elementară a impulsului*, iar produsul $\vec{F} \cdot dt$ se numește *impulsul elementar al forței*. Integrând ecuația (4.50) între momentele t și t' , vom găsi:

$$\vec{p}' - \vec{p} = \int_t^{t'} \vec{F}_{12}(t) \cdot dt, \quad (4.51)$$

sau, pentru primul corp:

$$\Delta\vec{p}_1 = \langle \vec{F}_{12} \rangle \cdot \Delta t, \quad (4.52)$$

în care $\langle \vec{F}_{12} \rangle$ reprezintă valoarea medie a forței pe durata Δt . Așadar, variația impulsului unui corp, determinată de procesul de ciocnire, este egală cu impulsul forței $\int_t^{t'} \vec{F}_{12}(t) \cdot dt$.

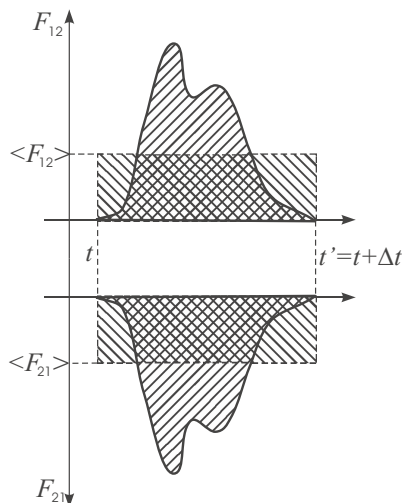


Figura 4.3: Variația în timp a forțelor de acțiune și reacțiune pe durata ciocnirii a două corpuri.

Impulsul forței (denumit uneori și *percuție*) este numeric egal cu aria hășurată de sub curba $F = F(t)$.

Din Fig.4.3 se observă că aria dreptunghiului $\langle F_{12} \rangle \cdot \Delta t$ este egală cu aria de sub curba $F_{12} = F_{12}(t)$.

O relația analoagă cu (4.52) se poate scrie și pentru corpul 2:

$$\Delta \vec{p}_2 = \int_t^{t'} \vec{F}_{21}(t) \cdot dt = \langle \vec{F}_{21} \rangle \cdot \Delta t. \quad (4.53)$$

Dacă presupunem că cele două corpuri care se ciocnesc constituie un *sistem izolat* și dacă, în plus, ținem cont de principiul acțiunii și reacțiunii ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ în orice moment), atunci ariile de sub cele două curbe $F_{12}(t)$ și $F_{21}(t)$ sunt egale, astfel încât:

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2, \quad (4.54)$$

sau:

$$\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -\vec{p}'_2 + \vec{p}_2. \quad (4.55)$$

Am regăsit astfel *legea conservării impulsului* sistemului de particule:

Impulsul sistemului după ciocnire este egal cu impulsul acestuia înainte de ciocnire.

Observație:

1. Legea conservării impulsului rămâne valabilă chiar și atunci când cele două corpuri ce se ciocnesc se află în câmpul unui al 3-lea corp (de cele mai multe ori - Pământul), în măsura în care durata Δt a ciocnirii este foarte mică, astfel încât impulsul forțelor de greutate $\vec{G}_1 \cdot \Delta t$ și $\vec{G}_2 \cdot \Delta t$ să fie neglijabil în comparație cu impulsurile $\langle \vec{F}_{12} \rangle \Delta t$ și $\langle \vec{F}_{21} \rangle \Delta t$ ale forțelor impulsive⁴.

⁴Pe durata ciocnirilor corpurile reale suferă procese de deformare în care apar forțe importante ca mărime (aproape întotdeauna, mult mai mari decât forțele de interacțiune din afara ciocnirii) și a căror variație în timp este destul de complicat de determinat în practică. Aceste forțe de scurtă durată se numesc *forțe impulsive*.

2. Legea conservării impulsului își păstrează valabilitatea în multe cazuri doar *după o anumită direcție*, după care forța de greutate este compensată în efect de forțe de legătură (reacțiunea normală verticală la o suprafață, tensiunea dintr-un fir, etc.). De exemplu, ciocnirea elastică sau plastică, în punctul O , a două pendule formate din două corpuri de mase m_1 și m_2 , suspendate de două fire sau tije, ca în Fig. 4.4. se face cu respectarea *legii conservării impulsului după direcția verticală Oy* , după care $\vec{G}_{1,2}\Delta t = -\vec{T}_{1,2}\Delta t$

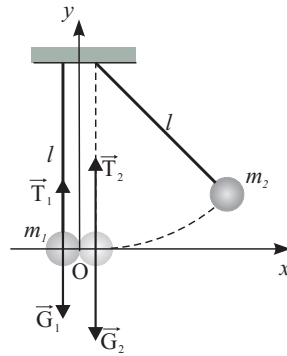


Figura 4.4: Ciocnirea a două pendule se face cu respectarea legii conservării impulsului *după direcția Oy* ; după care, pentru fiecare corp, greutatea este egalată de tensiunea din firul de suspensie.

3. Legea conservării impulsului permite găsirea relațiilor de legătură între impulsurile celor două corpuri *fără a fi necesară cunoașterea explicită a dependenței $\vec{F}(t)$ a celor două forțe de percuție*⁵. Acest lucru este *esențial în privința consecințelor*, având în vedere că așa cum am menționat și anterior, este foarte dificil de găsit expresia analitică a dependenței de timp a celor două forțe.
4. Legea conservării impulsului este *singura lege generală* care leagă între ele mărimile inițiale și finale ale componentelor sistemului, având în vedere că - *în cazul ciocnirii plastice - energia mecanică nu se conservă, forțele implicate în acest proces fiind neconservative*.
5. Graficul - oglindă din Fig. 4.3 corespunde unei ciocniri uni-dimensionale între obiecte obișnuite, care ajung în contact. Există, însă, situații în care forțele de percuție sunt de rază lungă (forțe gravitaționale sau electrice) în care afirmațiile precedente pot să nu fie *riguros* adevărate. Acest lucru se datorește faptului că interacțiunile reciproce nu se transmit instantaneu și, în măsura în care timpul necesar transmiterii acțiunii la distanță este comparabil cu durata ciocnirii, noțiunile de acțiune sau reacțiune instantanee nu mai pot fi folosite. O astfel de situație apare în electromagnetism, în care sunt numeroase exemple de interacțiuni *întârziate*. Aici, interacțiunile dintre sarcinile electrice au loc

⁵În principiu, nu este necesar ca forțele deformatoare care se manifestă asupra celor două corpuri să fie corelate la orice moment, atâta vreme cât integralele menționate sunt egale. Nu există, însă, dovezi experimentale că ele ar fi diferite, de aceea noi presupunem că ele sunt egale în orice moment.

prin intermediul câmpului electromagnetic, iar întârzierea este datorată vitezei finite a propagării câmpului. Transferul de impuls între două sarcini (care ar putea să apară prin intermediul câmpului, de exemplu, ca urmare a unei mișcări bruște a uneia dintre sarcini) se va face cu o întârziere egală cu raportul dintre distanța dintre cele două sarcini și viteza luminii, c (dacă cele două sarcini se află în vid). Așadar, dacă examinăm fiecare particulă separat, una dintre acestea poate să-și varieze impulsul cu o cantitate Δp_1 , care să nu fie egală și de semn contrar cu variația impulsului celeilalte particule, la același moment. Aparent, conservarea impulsului nu este respectată în acest caz! Așa cum vom vedea în cadrul disciplinei *Ectrodinamică*, este doar o încălcare aparentă a legii conservării impulsului deoarece, la rândul său, câmpul electromagnetic care mijlocește transportul de impuls are asociat un impuls. Tabloul devine mai puțin "obscur", dacă se are în vedere că transferul energiei electromagnetice se face prin intermediul *fotonilor*. În acest sens, se admite că interacțiunea statică dintre două sarcini electrice are loc prin intermediul unui schimb continuu de "fotoni virtuali".

4.6.2 Ciocniri uni-dimensionale

Ciocnirea plastică (total neelastică) unidimensională

Să considerăm procesul de ciocnire plastică dintre două corpuri de mase m_1 și m_2 care se deplasează pe o aceeași dreaptă și în același sens, cu vitezele \vec{v}_1 și \vec{v}_2 (Fig.4.5). Pentru ca ciocnirea să se producă trebuie ca $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$.

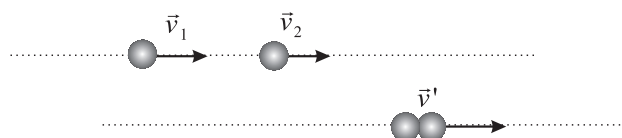


Figura 4.5: Secvențele unui proces de ciocnire plastică unidimensională între două corpuri.

După ciocnire cele două corpuri se lipesc, deplasându-se ca unul singur cu masa $(m_1 + m_2)$. Viteza corpurilor după ciocnire se găsește aplicând legea conservării impulsului sistemului:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}' \quad (4.56)$$

$$\vec{v}' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.57)$$

Această viteză, după cum era de așteptat, este:

$$v_1 > v' > v_2. \quad (4.58)$$

Variațiile de viteză ale fiecărui corp în parte, în urma ciocnirii, sunt:

$$\Delta \vec{v}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}' = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}; \quad (4.59)$$

$$\Delta \vec{v}_2 = \vec{v}' - \vec{v}_2 = \frac{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}. \quad (4.60)$$

Energia de reacție (căldura) degajată în timpul procesului are expresia:

$$\begin{aligned} Q &= E_c' - (E_{c1} + E_{c2}) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2, \end{aligned} \quad (4.61)$$

unde μ este masa redusă a sistemului, iar v_{rel} este viteza relativă a corpurilor.

Exemplu

O armă trimite o rafală de n gloanțe de masă m cu viteza v , pe direcție orizontală, asupra unui bloc din lemn cu masa M aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală. Presupunând că nu există frecare, să determinăm viteza pe care o va avea blocul de lemn după ce "absoarbe" toate gloanțele.

Sistemul format din cele n gloanțe (care ajung practic în același timp) și blocul din lemn este un sistem izolat. Ca urmare, impulsul total al sistemului pe direcția x se conservă⁶.

La momentul inițial, sistemul constă din n gloanțe ce se mișcă fiecare cu viteza v și blocul din lemn aflat în repaus. Impulsul total pe direcția x , la momentul inițial, este:

$$P_{x0} = nmv + M \cdot 0 = nmv. \quad (4.62)$$

După ce gloanțele s-au oprit în blocul de lemn, masa acestuia crește la valoarea $M + nm$. Să notăm cu V viteza pe care o obține blocul, exact după oprirea gloanțelor. Impulsul total pe direcția x , la momentul considerat, este:

$$P_x(t) = (nm + M)V. \quad (4.63)$$

Având în vedere conservarea impulsului, rezultă că viteza pe care o capătă blocul din lemn va fi:

$$V = \frac{nm}{nm + M}v. \quad (4.64)$$

Indiferent de numărul gloanțelor trase, viteza pe care o capătă blocul din lemn este întotdeauna mai mică decât viteza gloanțelor.

Ciocnirea centrală elastică uni-dimensională

Vom studia ciocnirea elastică centrală dintre două corpuri, folosind rezultatele găsite în cazul ciocnirii plastice centrale. Astfel, după ce corpurile ajung în contact, se poate considera că ciocnirea elastică se desfășoară în două etape:

1. etapa I, de deformare plastică a corpurilor, care se termină atunci când acestea ajung să aibă aceeași viteză;
2. etapa a II-a, în urma căreia corpurile revin la forma inițială, după care se separă din nou.

⁶deoarece singurele forțe care acționează (greutatea și normala) sunt pe direcția verticală (y)

Prima etapă este similară unei ciocniri plastice directe, având în vedere că, la sfârșitul ei, corpurile ajung să aibă aceeași viteză. A doua etapă este similară unei ciocniri plastice inverse, în sensul că "filmul" ei este imaginea proiectată în sens invers a filmului etapei I. De aceea, variațiile de viteză a celor două corpuri în urma ciocnirii sunt:

$$\Delta \vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - 2\Delta \vec{v}; \quad (4.65)$$

$$\Delta \vec{v}'_2 = \vec{v}_2 + 2\Delta \vec{v}. \quad (4.66)$$

unde \vec{v} este viteza comună a corpurilor la sfârșitul etapei I.

S-a considerat $|\vec{v}_1| > |\vec{v}_2|$, astfel că $|\vec{v}_1| > |\vec{v}| > |\vec{v}_2|$. Înlocuind expresia (4.57) se obține:

$$\vec{v}'_1 = 2 \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} - \vec{v}_1; \quad (4.67)$$

$$\vec{v}'_2 = 2 \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} - \vec{v}_2. \quad (4.68)$$

Există următoarele cazuri particulare:

1. $\vec{v}_2 = 0$; Vitezele după ciocnirea elastică vor fi:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1, \quad (4.69)$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1, \quad (4.70)$$

iar energiile cinetice pentru fiecare corp:

$$E'_{c1} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 E_{c1}; \quad (4.71)$$

$$E'_{c2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{c2}. \quad (4.72)$$

2. $m_1 = m_2$, $\vec{v}_2 = 0$;

Vitezele după ciocnirea elastică vor fi:

$$\vec{v}'_1 = 0; \quad (4.73)$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_1; \quad (4.74)$$

iar energia cinetică a fiecărui corp:

$$E'_{c1} = 0; \quad (4.75)$$

$$E'_{c2} = E_{c1}. \quad (4.76)$$

Într-un astfel de caz particular, corpurile își "schimbă" între ele viteza. Particula aflată inițial în mișcare își pierde toată energia cinetică. O aplicație practică a unui astfel de rezultat este folosirea apei grele ca moderator în reactorii nucleari cu fisiune, pentru încetinirea neutronilor.

3. $m_2 \gg m_1$;

Acest caz corespunde ciocnirii de un perete. Se obține:

$$\vec{v}'_1 = -\vec{v}_1, \quad (4.77)$$

$$\vec{v}'_2 = 0, \quad (4.78)$$

ceea ce înseamnă că particula este "reflectată" de perete.

4. $m_2 \ll m_1$;

Acest caz corespunde unui perete în mișcare, care ciocnește o particulă. Se obține:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1, \quad (4.79)$$

$$\vec{v}'_2 = 2\vec{v}_1, \quad (4.80)$$

ceea ce înseamnă că peretele își continuă mișcarea fără a fi în nici un fel perturbat, în timp ce particula capătă o viteză de două ori mai mare decât cea a particulei incidente.

Coefficienți de restituire

O mărime de interes în cazul ciocnirilor frontale unidimensionale este *coeficientul de restituire*, k . Într-o ciocnire perfect elastică, uni-dimensională, legea conservării impulsului și legea conservării energiei conduc la ecuațiile binecunoscute:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2; \quad (4.81)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \quad (4.82)$$

Rearanjând termenii între aceste două ecuații, găsim:

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m (v_2 - v'_2); \quad (4.83)$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m (v_2^2 - v_2'^2). \quad (4.84)$$

Împărțind termen cu termen ultimele două ecuații, vom obține:

$$\frac{v_1 - v'_1}{(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1)} = \frac{v_2 - v'_2}{(v_2 - v'_2)(v_2 + v'_2)}, \quad (4.85)$$

adică:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2. \quad (4.86)$$

Cu alte cuvinte:

$$v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2). \quad (4.87)$$

Așadar viteza relativă inițială $(v_{rel}) = v_1 - v_2$ și viteza relativă finală $(v_{rel})' = v'_1 - v'_2$ sunt în relația:

$$(v_{rel})' = -(v_{rel}), \quad (4.88)$$

adică viteza de apropiere a celor două corpuri înainte de ciocnire este egală cu viteza de îndepărtare a lor, după ciocnire.

Se numește coeficient de restituire, raportul:

$$k = \frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}. \quad (4.89)$$

Rezultă că, într-o ciocnire perfect elastică unidimensională, $k = 1$. Într-o ciocnire perfect inelastică (plastică), în condițiile în care întotdeauna $v_2' - v_1' = 0 \Rightarrow k = 0$.

Ciocnirile uni-dimensionale reale se caracterizează prin coeficienți de restituire cuprinși între 0 și 1.

4.6.3 Ciocniri oblice (bi-dimensionale)

În cele mai multe din cazuri, direcțiile impulsurilor inițiale ale corpurilor care se ciocnesc fac între ele un unghi diferit de 0 sau 180° . Studiul ciocnirii presupune determinarea parametrilor corpurilor (viteze și direcții de mișcare) după ciocnire. Chiar cunoscând vitezele inițiale (v_1, v_2) și unghiul dintre acestea, numărul de necunoscute este mai mare decât numărul de ecuații pe care le putem scrie folosindu-ne de legea conservării impulsului și a energiei mecanice (aceasta din urmă pentru cazul ciocnirilor elastice). O excepție ar constitui-o, așa cum vom vedea în continuare, ciocnirea oblică plastică.

Ciocnirea elastică oblică

În cazul unei ciocniri elastice bi-dimensionale avem 4 necunoscute (cele două componente ale vitezelor \vec{v}_1' și \vec{v}_2') și doar 3 ecuații: una care exprimă legea conservării energiei și alte două - legea conservării impulsului proiectată pe direcțiile axelor de coordonate. În acest caz, este necesară cunoașterea *forței de interacțiune* (sau a *potențialului de interacțiune*) dintre corpuri. Există o multitudine de potențiale de interacțiune, în funcție de natura proceselor ce au loc pe durata ciocnirii și de exigențele modelului fizic ales. În practică, informații despre natura potențialului de interacțiune se obțin din analiza distribuției unghiulare a particulei țintă ricoșată în urma ciocnirii și a celei proiectil care suferă un proces de împrăștiere. Pentru rezolvarea problemei, din punctul de vedere al mecanicii, este necesară, în plus, cunoașterea unghiului făcut de cele două viteze finale.

Să examinăm, în continuare, ciocnirea dintre o particulă-proiectil de masă m_1 și o alta - țintă, aflată în repaus. Deși acest caz pare unul particular, nu este, deoarece se poate alege întotdeauna un referențial legat de particula țintă și reduce orice problemă la una de acest tip "particular". Un astfel de caz apare frecvent în fizica nucleară, fizica atomică sau fizica plasmei. Interacțiunea, pe durata ciocnirii, poate să fie de natură gravitațională (cum se întâmplă de exemplu, în cazul ciocnirii dintre cometă și Soare), electromagnetică sau nucleară (cum se întâmplă, de exemplu în experiențele de difuzie a particulelor α pe nuclee de Au, efectuate de Rutherford).

Să considerăm particula 2 plasată în originea referențialului \mathbf{R} și particula 1 care se apropie de aceasta după o traiectorie inițială rectilinie. Distanța dintre Ox și dreapta traiectorie a particulei 1, notată cu b se numește *parametru de ciocnire*. În cazul în care $b = 0$, regăsim cazul particular al ciocnirii unidimensionale (frontale).

Din momentul în care cele două corpuri ajung la o distanță r_0 , forțele-perechi, pe care le vom presupune, de exemplu, de respingere, vor determina curbarea traiectoriei particulei 1. Aceasta va lua forma unui arc de hiperbolă (așa cum am arătat în Cap. 5) dacă potențialul de interacțiune este unul de forma $V = +\frac{K}{r}$. Particula 2 va pleca într-o mișcare accelerată (Fig.4.6).

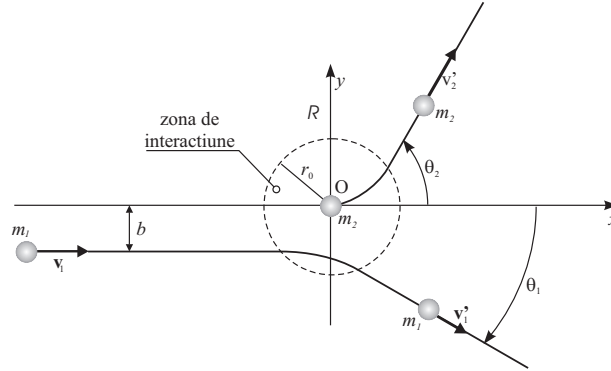


Figura 4.6: Un exemplu de ciocnire oblică bi-dimensională.

Ciocnirile fiind elastice, se respectă legea conservării energiei:

$$\frac{1}{2}m_1v_1 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (4.90)$$

și a impulsului:

$$m_1v_1 = m_1v_1' \cos \theta_1 + m_2v_2' \cos \theta_2 \quad (\text{după } Ox); \quad (4.91)$$

$$0 = -m_1v_1' \sin \theta_1 + m_2v_2' \sin \theta_2 \quad (\text{după } Oy). \quad (4.92)$$

Așadar, avem 4 necunoscute (v_1' , v_2' , θ_1 și θ_2) și doar 3 ecuații. De aceea, ceea ce vom putea scrie în final va fi o relație între v_1' și v_2' ca funcții de o altă mărime măsurabilă experimental, de exemplu θ_1 .

Vom rescrie ecuațiile (4.91) și (4.92), trecând în membrul întâi mărimile ce se referă la particula 1 și în membrul al doilea - cele referitoare la particula 2:

$$m_1v_1 - m_1v_1' \cos \theta_1 = m_2v_2' \cos \theta_2; \quad (4.93)$$

$$m_1v_1' \sin \theta_1 = m_2v_2' \sin \theta_2. \quad (4.94)$$

Împărțind prin m_1 ambele ecuații și ridicându-le apoi la pătrat vom obține:

$$v_1^2 + v_1'^2 \cos^2 \theta_1 - 2v_1v_1' \cos \theta_1 = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2 \cos^2 \theta_2; \quad (4.95)$$

$$v_1'^2 \sin^2 \theta_1 = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2 \sin^2 \theta_2. \quad (4.96)$$

Adunând membru cu membru aceste ultime două ecuații găsim:

$$v_1^2 + v_1'^2 - 2v_1v_1' \cos\theta = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_2'^2. \quad (4.97)$$

Din ecuația (4.90) avem:

$$v_2'^2 = \frac{m_1}{m_2} (v_1^2 - v_1'^2). \quad (4.98)$$

Înlocuind relația (4.98) în (4.97) găsim:

$$\frac{v_1}{v_1'} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}} \right). \quad (4.99)$$

Cazuri particulare

- (a) $\theta_1 = 0$. Acesta este cazul deja analizat, al ciocnirii uni-dimensionale. Într-adevăr, în condițiile în care considerăm semnul (+) și, respectiv semnul (-) în paranteza din membrul drept al ecuației (4.99), vom găsi că:

$$v_1' = v_1, \quad v_2' = 0 \quad (4.100)$$

și, respectiv:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1. \quad (4.101)$$

Relațiile (4.100) arată că în acest caz nu există ciocnire. În cazul al 2-lea, valoarea lui v_2' va fi:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (4.102)$$

- (b) $m_1 > m_2$. Pentru ca mărimea de sub radical în ecuația (4.99) să fie pozitivă (ceea ce corespunde unei valori reale a lui v_1' , cazul contrar fiind lipsit de sens) este nevoie ca:

$$\cos^2\theta_1 \geq \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}. \quad (4.103)$$

Va exista un unghi maxim de împrăștiere, θ_m , în condițiile în care:

$$\cos^2\theta_{1m} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2} = 1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2, \quad 0 < \theta_{1m} < \frac{\pi}{2}. \quad (4.104)$$

Așadar unghiul θ_{1m} este cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$; unghiul θ_1 nu poate fi mai mare decât $\frac{\pi}{2}$.

Observăm că, dacă $m_1 \gg m_2$, unghiul de împrăștiere θ_1 tinde la zero. În condițiile în care $\theta_1 < \theta_{1m}$, există două valori ale raportului $\frac{v_1'}{v_1}$: prima valoare corespunde așa-numitei *ciocniri razante*, cea de-a 2-a, mai mică, *ciocnirii frontale*.

- (c) $m_1 < m_2$. În acest caz nu mai există restricții asupra valorii lui θ_1 , acesta putând lua orice valoare între 0 și π radiani.

În cazul în care $\theta_1 > \frac{\pi}{2}$, procesul se numește *retro-împrăștiere*.

- (d) $m_1 = m_2$. Înmulțind relația (4.91) cu $\cos \theta_1$ și relația (4.92) cu $\sin \theta_1$ și apoi adunându-le găsim:

$$v_1 \cos \theta_1 = v_1' + v_2' \cos (\theta_1 + \theta_2). \quad (4.105)$$

Deoarece $m_1 = m_2$, relația (4.99) devine:

$$\frac{v_1'}{v_1} = \cos \theta_1. \quad (4.106)$$

Înlocuind (4.106) în (4.105) găsim:

$$v_1 \cos \theta_1 = v_1 \cos \theta_1 + v_2' \cos (\theta_1 + \theta_2), \quad (4.107)$$

adică:

$$\cos (\theta_1 + \theta_2) = 0, \quad (4.108)$$

sau:

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (4.109)$$

Așadar, în acest caz, după ieșirea din sfera de interacțiune, cele două particule se îndepărtează una de cealaltă, după două direcții care fac între ele un unghi de 90° .

Ciocnirea neelastică oblică. Calculul energiei de reacție

Să considerăm procesul de ciocnire plastică dintre un corp cu masa m_1 și viteza inițială \vec{v}_1 și un corp cu masa m_2 , aflat inițial în repaus. După ciocnire, vitezele celor două corpuri sunt $\vec{v}_1' > \vec{v}_2'$, direcția de deplasare fiind oarecare. Să notăm cu θ unghiul pe care îl face direcția de mișcare a primului corp după ciocnire cu cea de dinainte de ciocnire (Fig.4.7). Să

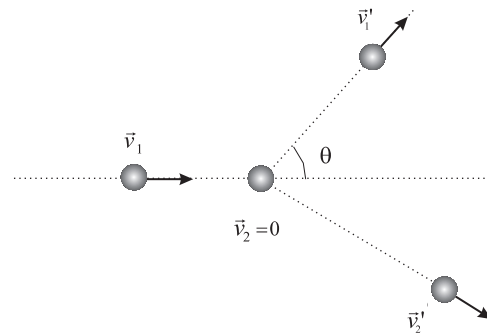


Figura 4.7: Ciocnire neelastică necentrală

considerăm situația generală, în care masele corpurilor se modifică în timpul ciocnirii (m_1', m_2' sunt masele corpurilor după ciocnire).

Legea conservării impulsului conduce la egalitatea:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'. \quad (4.110)$$

Având în vedere că $p_2 = 0$, relația dintre modulele impulsurilor corpurilor, înainte și după ciocnire este:

$$p_2'^2 = p_1'^2 + p_1^2 - 2p_1' p_1 \cos \theta. \quad (4.111)$$

Energia de reacție capătă expresia:

$$Q = \frac{p_1'^2}{2m_1'} + \frac{p_2'^2}{2m_2'} - \frac{p_1^2}{2m_1}, \quad (4.112)$$

care, folosind (4.111), se transformă în:

$$Q = \frac{p_1'^2}{2m_1'} + \frac{p_1'^2}{2m_2'} + \frac{p_1^2}{2m_2'} - \frac{2p_1' p_1 \cos \theta}{2m_2'} - \frac{p_1^2}{2m_1} \quad (4.113)$$

$$= \frac{p_1'^2}{2m_1'} \left(1 + \frac{m_1'}{m_2'}\right) + \frac{p_1^2}{2m_1} \left(\frac{m_1}{m_2'} - 1\right) - \frac{2p_1' p_1 \cos \theta}{2m_2'} \quad (4.114)$$

$$= E_{c1}' \left(1 + \frac{m_1'}{m_2'}\right) + E_{c1} \left(\frac{m_1}{m_2'} - 1\right) - \frac{2\sqrt{E_{c1}' E_{c1} m_1' m_1}}{m_2'} \cos \theta.$$

Această relație este folosită în special în fizica atomică și nucleară fiind cunoscută sub numele de "formula Q".

4.7 Analiza proceselor de ciocnire în sistemul centrului de masă

Așa cum am văzut în capitolele anterioare, raportarea mișcării oricărui corp se poate face, fie la un referențial extern, denumit *sistemul laboratorului* (notat **SL** sau **R**), fie la acela al *centrului de masă* (notat **SCM** sau R^*). Fiecare din aceste variante prezintă o serie de avantaje și inconveniente. **SL** ne oferă o cale intuitivă și frecvent utilizată în viața cotidiană de a observa mișcarea unor corpuri. De multe ori, însă, calculele matematice necesare pentru a găsi, în final, rezultatul căutat, sunt foarte laborioase, iar relațiile matematice - foarte lungi și complicate. Tabloul se simplifică în mod considerabil în **SCM**, însă un astfel de sistem de referință pare mai "nesigur", cel puțin pentru cel care nu este familiarizat cu acesta, într-o primă etapă de utilizare.

Pentru simplificarea calculelor, este convenabil să plecăm de la **SL**, să exprimăm apoi mărimile de interes în **SCM** și să revenim, în final la **SL**, "ocolind" astfel inconvenientele utilizării sistemului laboratorului.

Să ilustrăm studiul ciocnirilor în sistemul centrului de masă. Observațiile sunt făcute din originea O' a lui R^* care se mișcă, deci, în raport cu un eventual SL , cu viteza centrului de masă.

Vom pleca de la un exemplu de mișcare uni-dimensională. O particulă de masă m_1 se mișcă cu viteza v_1 apropiindu-se de o altă particulă de masă m_2 , aflată în repaus, în x_2 (Fig.4.8). Centrul de masă se află la o distanță x_{CM} de originea O , astfel încât:

$$(m_1 + m_2) x_{CM} = m_1 x_1 + m_2 x_2. \quad (4.115)$$

Derivând relația (4.115) obținem:

$$(m_1 + m_2) v_{CM} = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (4.116)$$



Figura 4.8: Un sistem de particule și centrul lor de masă.

Ținând cont că, în cazul nostru, $v_2 = 0$, vom obține:

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{\mu}{m_2} v_1, \quad (4.117)$$

în care am notat cu μ masa redusă a sistemului.

Un observator plasat în O' va constata că particula 1 are o viteză:

$$v_1^* = v_1 - v_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{\mu}{m_1} v_1, \quad (4.118)$$

iar particula 2 – viteza v_2^* :

$$v_2^* = v_2 - v_{CM} = 0 - v_{CM} = -\frac{\mu}{m_2} v_1. \quad (4.119)$$

Particulele 1 și 2 se apropie de O' , așa cum rezultă și din Fig.4.9.

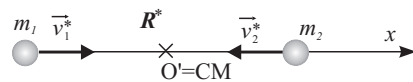


Figura 4.9: Cele două particule se apropie de O' , unde se va produce ciocnirea.

Impulsul celor două particule, calculate în **SCM** vor fi:

$$p_1^* = m_1 v_1^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \mu v_1; \quad (4.120)$$

$$p_2^* = m_2 v_2^* = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\mu v_1. \quad (4.121)$$

Impulsul total inițial al sistemului de particule în raport cu R^* :

$$p^* = p_1^* + p_2^* = 0. \quad (4.122)$$

În conformitate cu legea conservării impulsului, și impulsul final, imediat după ciocnire, va trebui să fie nul. Considerând o ciocnire elastică unidimensională, înainte de ciocnire, particulele 1 și 2 se apropie de O' cu vitezele v_1^* și, respectiv, v_2^* ; în urma ciocnirii ele se vor deplasa, de asemenea după aceeași direcție (care poate face orice unghi θ cu cea inițială), îndepărtându-se de O' cu vitezele, $v_1'^*$ și $v_2'^*$.

Să încercăm să trecem de la **SCM** la **SL** și să aflăm, în plus, unghiurile făcute de vitezele celor două particule cu direcția mișcării inițiale, Ox . Pentru a afla vitezele \vec{v}_1' și \vec{v}_2' , vom aduna la acestea, folosind regula triunghiului, viteza \vec{v}_{CM} (Fig.4.10).

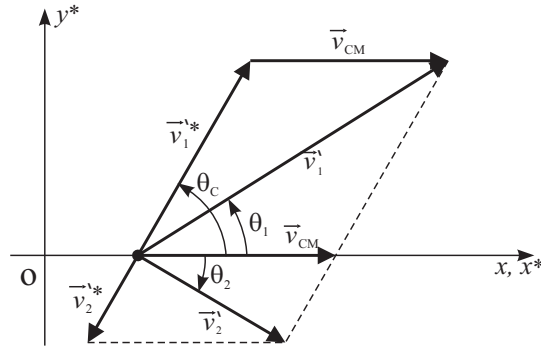


Figura 4.10: Relațiile dintre vitezele particulelor 1 și 2 în SCM și în SL.

Vitezele finale vor fi:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_1^* + \vec{v}_{CM}; \quad (4.123)$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}'_2^* + \vec{v}_{CM}. \quad (4.124)$$

proiectând pe cele două axe relația (4.123) vom putea scrie:

$$v'_1 \cos \theta_1 = v_1'^* \cos \theta_{CM} + v_{CM}; \quad (4.125)$$

$$v'_1 \sin \theta_1 = v_1'^* \sin \theta_C. \quad (4.126)$$

Împărțind cele două relații precedente, vom obține:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{v_1'^* \sin \theta_C}{v_1'^* \cos \theta_C + v_{CM}} = \frac{\sin \theta_C}{\cos \theta_C + \gamma}, \quad (4.127)$$

în care am notat cu γ raportul dintre viteza centrului de masă în raport cu sistemul laboratorului și viteza finală a corpului 1, în raport cu SCM.

Ținând cont de ecuația (4.117), avem:

$$\vec{v}'_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_1 - \frac{\mu}{m_2} \vec{v}_1 = \frac{m_2 - \mu}{m_2} \vec{v}_1; \quad (4.128)$$

$$\vec{v}'_1^* = \frac{\mu}{m_1} \vec{v}_1. \quad (4.129)$$

Folosind relațiile (4.129) și (4.117), raportul γ ia forma:

$$\gamma = \frac{v_{CM}}{v_1'^*} = \frac{\mu}{m_2} \frac{v_1}{\mu} \frac{m_1}{v_1} \quad (4.130)$$

și, ca urmare:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta_C}{\cos \theta_C + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)}. \quad (4.131)$$

Să examinăm acum câteva cazuri particulare:

- (a) Cazul ciocnirii proton-proton, sau proton-neutron ($m_1 = m_2$). În conformitate cu relația (4.131):

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sin\theta_C}{1 + \cos\theta_C} = \frac{2 \sin \frac{\theta_C}{2} \cos \frac{\theta_C}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta_C}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\theta_C}{2}, \quad (4.132)$$

adică

$$\theta_1 = \frac{\theta_C}{2}. \quad (4.133)$$

Deoarece în **SCM**, θ_C poate avea orice valoare cuprinsă între 0 și π , θ_1 poate fi maximum $\frac{\pi}{2}$.

- (b) Cazul ciocnirii unei particule-proiectil cu o țintă de masă mult mai mare ($m_2 \gg m_1$). În acest caz, ecuația (4.131) va conduce la relația:

$$\operatorname{tg}\theta_1 \cong \frac{\sin\theta_C}{\cos\theta_C} = \operatorname{tg}\theta_C \Rightarrow \theta_1 \simeq \theta_C, \quad (4.134)$$

adică unghiul de împrăștiere are aceeași valoare, atât în **SCM**, cât și în **SL**.

- (c) Cazul ciocnirii cu o țintă de masă mai mică decât masa particulei – proiectil ($m_1 > m_2$). Din relația (4.131) rezultă că unghiul de împrăștiere, θ_1 , rămâne mic, indiferent de valoarea lui θ_C .

4.7.1 Un exemplu de ciocnire elastică intermediată de câmp: împrăștierea Rutherford

Așa cum am constatat în capitolul dedicat mișcării punctului material într-un câmp central de forțe, dacă forța de interacțiune este una de tip repulsiv, excentricitatea traiectoriei este întotdeauna pozitivă, iar traiectoria, în **SL**, este o hiperbolă. Să examinăm, în continuare, mișcarea unei particule de masă m_1 în câmpul repulsiv al unei particule țintă de masă $m_2 \gg m_1$, aflată în repaus. O astfel de experiență (rămasă celebră în fizică) a fost efectuată în 1909 - 1910 de către Rutherford și studenții săi Geiger și Mardsen, folosind ca particule proiectil, particule α , iar ca particule țintă - inițial nuclee de Fe, apoi nuclee de Au⁷. Experimentele lui Rutherford au demonstrat că masa nucleului este concentrată într-o regiune spațială cu dimensiuni mai mici de $10^{-14}m$ (în timp ce dimensiunile atomului sunt de cel puțin 10000 ori mai mari). Așa cum vom vedea ulterior, experiențele lui Rutherford au demonstrat că sarcina pozitivă a nucleului este concentrată într-un corp cu masă considerabilă (practic întreaga masă a atomului), purtător al unei sarcini pozitive importante.

În experiențele lui Rutherford, într-o incintă vidată s-a introdus o sursă radioactivă plasată într-o incintă absorbantă, care lăsa să iasă particule α printr-un canal îngust (vezi Fig.4.11) sub forma unui fascicul incident pe o foiță din Au. Particulele difuzate erau detectate folosind un detector cu scintilație, care era reprezentat de o plăcuță dintr-un material ce emite un mic impuls luminos atunci când este lovit de o particulă rapidă încărcată electric.

⁷Aurul a fost utilizat datorită maleabilității și ductilității sale excepționale; el poate fi tras în foițe cu o grosime foarte mică, comparabilă cu câteva diametre atomice.

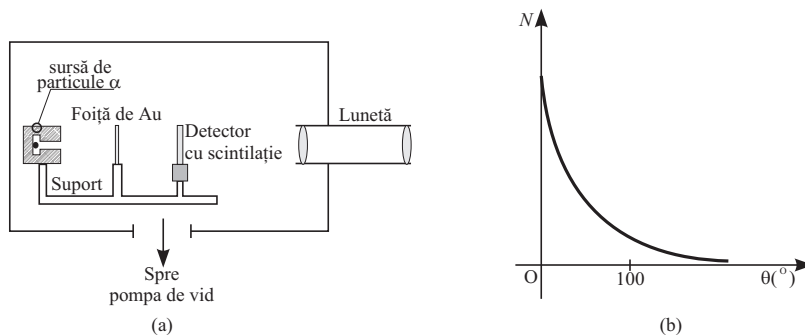


Figura 4.11: a) Schița dispozitivului experimental al lui Rutherford; b) Dependența numărului de particule difuzate de unghiul de difuzie θ .

Așa cum rezultă și din graficul din Fig.4.11b, cea mai mare parte dintre particulele α proiectil trec prin foiță practic nedeviate, dar o mică fracțiune din ele sunt împrăștiate la unghiuri de 90° sau chiar mai mari. Faptul că cea mai mare fracțiune din fluxul de particule α proiectil trec nedeviate prin foiță de Au și că cele difuzate sunt împrăștiate la unghiuri mari arată că particulele α au fost împrăștiate, de fapt, pe *centre de difuzie de mici dimensiuni, în care este concentrată sarcina pozitivă* a atomului. De fapt, aceste experimente au condus la propunerea de către Rutherford, în 1911, a modelului planetar al atomului.

Să analizăm din punct de vedere teoretic, acest proces de ciocnire prin intermediul câmpului. Considerăm că nucleul difuzant se află în repaus, în originea unui sistem de axe xOy (Fig.4.12) și că o particulă-proiectil, α , se apropie de acesta cu o viteză \vec{v}_0 și un impuls inițial $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$. Dacă între țintă și proiectil nu ar exista interacțiune, traiectoria particulei α ar rămâne o dreaptă, la distanța b față de centrul difuzant (m_2). Mărimea b este, după cum deja cunoaștem, *parametrul de ciocnire*. Pe durata ciocnirii, forțele-perechi de interacțiune sunt de natură coulombiană, fiind de forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (4.135)$$

unde $Q_1 = 2e$ este sarcina electrică a particulei α iar $Q_2 = Ze$ este sarcina nucleului de Au (e fiind sarcina elementară: $e = 1,609 \times 10^{-19} C$).

Venind de la o distanță mare, acolo unde nu există practic efecte măsurabile ale forțelor coulombiene, particula α se deplasează rectiliniu și uniform, cu viteza v_0 . Pe măsura apropierii de un nucleu de Au, particula α își reduce viteza, traiectoria sa devenind un arc de hiperbolă. În punctul de apropiere maximă de m_2 , particula are viteza minimă (vezi Fig.4.12), urmând apoi să fie accelerată de aceeași forță coulombiană, într-o manieră simetrică cu ceea ce se întâmplase anterior.

Deoarece unghiul măsurat de \vec{r} în unitatea de timp depinde doar de modulul lui \vec{r} , traiectoria lui m_1 în SL va fi simetrică în raport cu Ox .

În concluzie, rezultatul net al procesului de ciocnire, mijlocit de forțele coulombiene, constă doar în modificarea direcției de mișcare a particulei α , viteza acesteia rămânând constantă ca valoare, după ciocnire⁸. Evident, forța ce acționează asupra particulei α fiind de tip central,

⁸Această afirmație este corectă în măsura în care $m_2 \gg m_1$, nucleul de Au rămânând în permanență în O

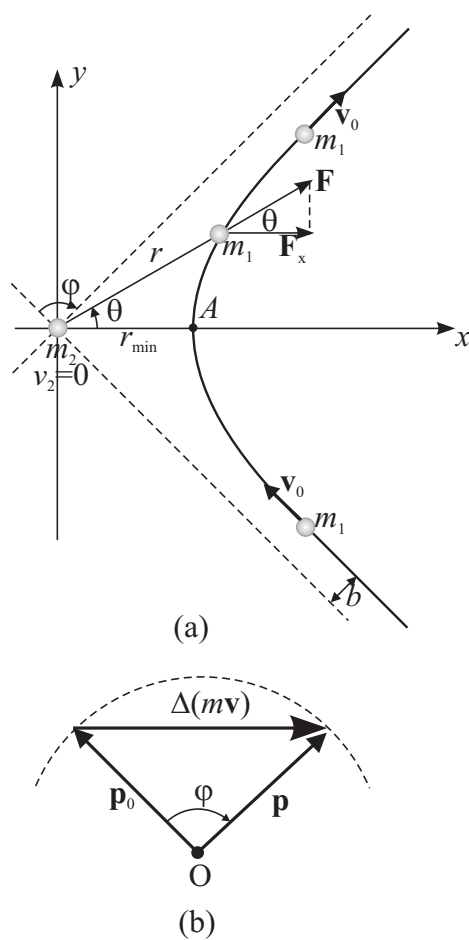


Figura 4.12: a) Împrăștierea unei particule α pe un nucleu difuzant de Au în repaus în **SL**; b) orientarea vectorilor \vec{p}_0 , \vec{p} și $\Delta\vec{p}$.

momentul cinetic al lui m_1 în raport cu O se conservă:

$$J = mv_0b = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \quad (4.136)$$

Așa cum rezultă din Fig.4.12b, variația Δp a impulsului particulei α în urma ciocnirii va fi:

$$\Delta(m\vec{v}) = \vec{p} - \vec{p}_0, \quad (4.137)$$

mărima lui $\Delta\vec{p}$ fiind:

$$\Delta p = 2mv_0 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (4.138)$$

Conform teoremei variației impulsului, această variație a impulsului particulei α trebuie atribuită impulsului forței coulombiene. Vom descompune această forță în două componente, una paralelă cu Ox , alta cu Oy , astfel încât:

$$\Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt = \int \vec{F}_x dt + \int \vec{F}_y dt. \quad (4.139)$$

Deoarece hiperbola traiectorie este simetrică în raport cu Ox , impulsul forței F_y , în prima parte a ciocnirii (până când m_1 ajunge în punctul A), este egal și de semn opus cu impulsul forței în cea de-a doua parte a ciocnirii, astfel încât

$$\int F_y dt = 0. \quad (4.140)$$

Ca urmare

$$\Delta p = \int F_x dt = \int F \cos \theta \cdot dt, \quad (4.141)$$

adică:

$$\Delta p = 2mv_0 \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 Q_2 \int \frac{\cos \theta}{r^2} dt. \quad (4.142)$$

Înlocuind pe r^2 din relația (4.136) vom avea:

$$\Delta p = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \quad (4.143)$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1), \quad (4.144)$$

în care $\theta_1 = (\pi - \varphi)/2$ și $\theta_2 = \pi - \varphi/2$ reprezintă valorile lui θ înainte, respectiv după ciocnire. Cum:

$$\sin \theta_2 = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (4.145)$$

$$\sin \theta_1 = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = -\cos \frac{\varphi}{2}, \quad (4.146)$$

rezultă că:

$$\Delta p = \frac{Q_1 Q_2}{2\pi\epsilon_0 v_0 b} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (4.147)$$

(adică nu există un recul al acestuia).

Așadar:

$$2mv_0 \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{2\pi\epsilon_0 v_0 b} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (4.148)$$

și, ca urmare:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{2\pi\epsilon_0 v_0 b m}. \quad (4.149)$$

Ecuția (4.149) exprimă dependența unghiului de împrăștiere φ de energia cinetică inițială v_0 , b fiind considerat parametru. Dacă fluxul de particule α este monoenergetic, putem găsi, de asemenea, dependența numărului de particule difuzate în funcție de unghiul α . Aceasta presupune aflarea numărului de particule care au parametrul de ciocnire cuprins între b și $b + db$, difuzate între unghiurile φ și $\varphi + d\varphi$. Rezultatele experimentale ale lui Rutherford l-au condus pe acesta să evalueze dimensiunile nucleului ca fiind atât de mici - la scara atomului - încât acesta să fie considerat punctiform.

4.8 Probleme

1. Să se găsească, la momentele de timp $t = 0s$ și $t = 10s$, pentru sistemul de puncte materiale având următoarele caracteristici:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1kg, \quad \vec{r}_1 = 2t^2\hat{x} + 3t\hat{y} + 4\hat{z}; \\ m_2 &= 3kg, \quad \vec{r}_2 = (1 + t^2)\hat{x} + (2 + 5t)\hat{y}; \\ m_3 &= 5kg, \quad \vec{r}_3 = (1 + 2t^2)\hat{x} + 4t^2\hat{z}. \end{aligned}$$

(a) poziția centrului de masă; (b) viteza centrului de masă; (c) impulsul sistemului; (d) energia cinetică.

2. O particulă cu masa $m_1=1g$ și viteza $\vec{v}_1 = 3\hat{x} - 2\hat{y}$ ciocnește plastic o particulă cu masa $m_2 = 1g$ și viteza $\vec{v}_2 = 4\hat{y} - 6\hat{z}$. Calculați vectorul viteză a particulei nou formate și mărimea acestuia, considerând că mișcarea are loc într-un sistem de referință inerțial.

Răspuns: $\vec{v} = 1\hat{x} + 2\hat{y} - 4\hat{z}$; $v = 4,6m/s$.

3. O particulă de masă m_1 ciocnește elastic, cu viteza inițială v_0 , o particulă de masă m_2 aflată în repaus. Pentru ce unghi de împrăștiere impulsul particulei de masă m_1 se înjumătățește?

4. Un obuz care se deplasează cu viteza $v = 500$ m/s se dezintegrează în trei fragmente identice, astfel că energia cinetică a sistemului crește de $\eta = 1.5$ ori. Care este viteza maximă v_{max} a unui fragment?

Răspuns: $v_{max} = v(1 + \sqrt{2(\eta - 1)}) = 1km/s$.

Modelul de mediu continuu

În capitolul anterior am trecut în revistă proprietățile fizice ale sistemelor de particule cu un număr finit de componente. Deși un astfel de model reprezintă un pas înainte în înțelegerea mișcării unor corpuri cu proprietăți mai apropiate de ale celor din lumea reală, în marea majoritate doar modelul de mediu continuu poate da un răspuns satisfăcător privind proprietățile unor astfel de corpuri.

După cum este cunoscut, materia se prezintă sub două forme, *substanța* și *câmpul*. Dintre acestea, doar câmpul reprezintă forma strict continuă, substanța având întotdeauna o anumită *structură*. Substanța reprezintă o *formă discretă* de existență a materiei.

În ciuda structurii discrete, într-o multitudine de situații, substanța poate fi aproximată foarte bine ca un *mediu continuu*. Este cazul *mediilor condensate* (lichide și solide), dar și, în anumite circumstanțe, al gazelor. Pentru a înțelege criteriile care ne permit să atribuim unei substanțe calificativul de mediu continuu, să examinăm câteva exemple:

Numărul de molecule dintr-un cm^3 de aer, în condiții normale de presiune și temperatură, este de aproximativ 3×10^{19} . Admițând că diametrul unei molecule de N_2 sau O_2 din aer este de 3 Angstr"om, rezultă că, cu moleculele dintr-un cm^3 de aer, am putea construi un "lanț" cu lungimea de $3 \times 10^{19} \times 3 \times 10^{-10} \text{ m} = 9 \times 10^9 \text{ m} = 9$ milioane de km!!! Chiar și cu moleculele dintr-un mm^3 am putea construi un "lanț" continuu pe distanța București-Pekin!

În cazul corpurilor solide sau lichide, într-un mm^3 de substanță sunt aproximativ 10^{20} atomi. De aceea, într-un volum pe care noi îl privim ca fiind infinezimal din considerente practice există, de fapt, un număr enorm de particule. Toate aceste particule sunt indiscernabile între ele: au aceleași coordonate spațiale, se situează la aceeași distanță față de o axă în timpul rotației etc.

În măsura în care un corp poate fi considerat o distribuție *practic continuă* de substanță și putem admite continuitatea *în sens matematic* a mărimilor fizice ce caracterizează proprietățile fizice, sumele care apăreau în Cap. 7 vor fi înlocuite aici prin *integrale*.

Așa cum am văzut în Secțiunea 5.2 a Părții I a acestui manual, centrul de masă al unui sistem de puncte materiale este un punct reprezentativ al unui sistem discret (în cazul nostru – continuu) de puncte materiale.

În cazul unui corp cu distribuție continuă sumele care apar în relația (5.7) din secțiunea

sus-amintită:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

se vor înlocui prin integrale, cu alte cuvinte, poziția centrului de masă va fi descrisă de vectorul:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\iiint \vec{r} dm}{\iiint dm} = \frac{1}{m} \iiint \vec{r} \rho dV \quad (5.1)$$

Ecuția (5.1) este echivalentă cu 3 ecuații scalare:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{m} \iiint x \rho dV \\ y_{CM} &= \frac{1}{m} \iiint y \rho dV \\ z_{CM} &= \frac{1}{m} \iiint z \rho dV \end{aligned} \quad (5.2)$$

în care ρ este densitatea volumică de masă a sistemului. În unele cazuri, masa poate fi distribuită într-un strat subțire pe o suprafață. În acest caz folosim densitatea superficială de masă, definită ca:

$$\sigma = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma dS, \quad (5.3)$$

În acest caz relația (5.1) se înlocuiește cu:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\iiint \vec{r} \sigma dS}{\iiint \sigma dS} = \frac{1}{m} \iiint \vec{r} \sigma dS \quad (5.4)$$

În mod similar, în situațiile în care masa este distribuită pe o singură dimensiune, sub forma unui fir subțire și lung, relația de definiție a lui \vec{r}_{CM} va conține densitatea liniară de masă, λ :

$$\lambda = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \lambda dl$$

și:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} \lambda dl}{\int \lambda dl} = \frac{1}{m} \int \vec{r} \lambda dl \quad (5.5)$$

Derivând în raport cu timpul relațiile (5.1), (5.4) sau (5.5) se obține expresia vitezei centrului de masă. De exemplu, în cazul ecuației (5.1):

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{m} \iiint \vec{v} dm \quad (5.6)$$

Cum integrala din membrul drept al ecuației precedente reprezintă impulsul total al sistemului, deducem și în acest caz că:

$$m\vec{v}_{CM} = \vec{p}_{sist}. \quad (5.7)$$

Aceasta înseamnă că impulsul sistemului poate fi înlocuit cu impulsul centrului de masă. Derivând apoi relația (5.7) în raport cu timpul, vom obține:

$$m\dot{\vec{v}}_{CM} = m\vec{a}_{CM} = \dot{\vec{p}}_{sist} = \vec{F}^{ext}. \quad (5.8)$$

Aceasta înseamnă că și în cazul sistemelor continue, mișcarea de translație a acestora poate fi descrisă de mișcarea centrului de masă, asupra căruia se consideră că acționează rezultanta \vec{F}^{ext} a forțelor exterioare (rezultanta forțelor interioare sistemului este – și aici – nulă).

În continuare, vom trece în revistă aceleași mărimi fizice care au fost prezentate în capitolul dedicat sistemelor discrete de puncte materiale. Vom încerca să găsim expresiile mărimilor fizice specifice sistemelor cu distribuție continuă de masă.

5.1 Masa unui sistem continuu

Masa unui sistem cu distribuție continuă este egală cu suma maselor elementare, dm , din care este constituit corpul:

$$m = \int_V dm = \int_V \rho(x, y, z) dV \quad (5.9)$$

Mărimia fizică $\rho = dm/dV$ reprezintă *densitatea volumică de masă*. În general, densitatea ρ poate fi aceeași în orice punct al mediului continuu (caz în care se spune că corpul este *omogen*), sau poate avea valori diferite în zone diferite ale corpului, caz în care corpul este denumit *neomogen* din punctul de vedere al masei. În cazul unui corp omogen:

$$m = \rho \int_V dV = \rho V, \quad (5.10)$$

V fiind volumul total al corpului.

5.2 Impulsul unui sistem continuu

Impulsul este o mărime fizică *vectorială*, ca urmare, impulsul sistemului se va calcula ca suma *vectorială* a impulsurilor maselor elementare:

$$\vec{p} = \int_V dm \cdot \vec{v} = \int_V \vec{v} \rho dV. \quad (5.11)$$

Este momentul acum să răspundem la întrebarea: ce *dimensiuni* și ce *formă* trebuie să aibă un astfel de volum elementar dV ?

Răspunsul este: dV trebuie să fie atât de mic, încât *toate particulele din interiorul volumului elementar dV să aibă aceleași coordonate și aceeași viteză instantanee, \vec{v}* . În mișcarea de translație a unui corp real, toate particulele constituente au *a priori* aceeași viteză. În mișcarea

de rotație, însă - așa cum vom vedea ulterior - particulele de la periferia corpului au o viteză mai mare, iar cele mai apropiate de axa de rotație - una mai mică (particulele de pe axa de rotație se află chiar în repaus!).

În ceea ce privește *forma* unui astfel de volum elementar, trebuie avut în vedere că un volum dV constituie o "cărămidă" din "construcția" corpului, ca urmare simetria și forma lui dV trebuie să fie în concordanță cu simetria și forma corpului macroscopic.

Dacă, de exemplu, dorim să exprimăm impulsul unui corp cu simetrie sferică pentru exprimarea lui dV ne vom folosi de coordonatele sferice:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (5.12)$$

Dacă corpul de studiat are o simetrie cilindrică, vom exprima pe dV în coordonate cilindrice

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz \quad (5.13)$$

și, în sfârșit, pentru un corp cu simetrie rectangulară, vom folosi coordonate carteziene:

$$dV = dx dy dz \quad (5.14)$$

5.3 Câmpul gravitațional și potențialul gravitațional creat de o distribuție continuă de masă

Ca și impulsul, câmpul gravitațional (sau electric) creat de un sistem de puncte materiale (sau de sarcini electrice) se obține prin însumare vectorială a câmpurilor elementare create de fiecare sarcină elementară gravitațională (sau electrică) conținută în volumul elementar dV . Întrucât sumarea vectorială este o operație mult mai dificilă decât cea scalară, nu există o "rețetă" generală de calcul, de aceea vom ilustra aceste operații recurând la câteva exemple.

5.3.1 Câmpul și potențialul gravitațional pe axa unui inel

Să considerăm un inel omogen construit din sârmă subțire, având masa m și raza R (Fig. 5.1).

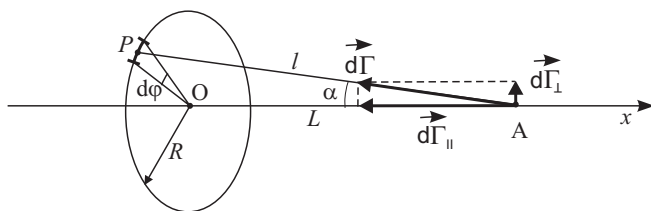


Figura 5.1: Un model pentru calculul câmpului gravitațional Γ creat într-un punct A pe axa unui inel.

Densitatea liniară de masă a inelului, λ , este o mărime constantă:

$$\lambda = \frac{dm}{ds}, \quad (5.15)$$

unde $ds = R d\varphi$ este un element de lungime (de arc) a inelului.

Un astfel de element din vecinătatea punctului P (Fig. 5.1), de masă $dm = \lambda dl$ se comportă practic, ca și *un punct material*: câmpul gravitațional creat de el în punctul A va avea intensitatea:

$$d\Gamma = \gamma \frac{dm}{l^2} \quad (5.16)$$

Vectorul $d\vec{\Gamma}$ are originea în A și este îndreptat spre P . Pentru calculul lui $\vec{\Gamma}$ total va trebui să adunăm *vectorial* câmpurile elementare create în A de toate masele elementare de pe circumferința inelului. De fapt, vectorii $d\vec{\Gamma}$ creați de aceste mase elementare de pe inel se "așează" pe generatoarele unui con cu vârful în A . Întrucât avem o infinitate de vectori (infinitesimali) $d\Gamma$, pentru a calcula câmpul gravitațional rezultat, trebuie să recurgem la metoda analitică. Vom descompune pe $d\Gamma$ într-o componentă paralelă cu axa inelului, $d\Gamma_{vert}$ și una perpendiculară pe axă, $d\Gamma_{\perp}$:

$$d\Gamma_{\parallel} = d\Gamma \cos \alpha = \gamma \frac{dm}{l^2} \cos \alpha \quad (5.17)$$

și

$$d\Gamma_{\perp} = d\Gamma \sin \alpha = \gamma \frac{dm}{l^2} \sin \alpha. \quad (5.18)$$

Având în vedere că inelul circular este compus din perechi diametral opuse de elemente de masă, dm și dm' , suma perechilor $d\Gamma_{\perp}$ de componente ale câmpului va fi 0. Ca urmare:

$$\Gamma_A = \int d\Gamma_{\parallel} = \frac{\gamma}{l^2} \int dm \cos \alpha \quad (5.19)$$

Cum $dm = \lambda ds = \lambda R d\varphi$, $\cos \alpha = x/l$, $l = \sqrt{x^2 + R^2}$, iar $\lambda = m/2\pi R$, rezultă că:

$$\Gamma_A = \frac{\gamma \lambda R x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (5.20)$$

adică:

$$\Gamma_A = \gamma \frac{m x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.21)$$

Se constată că:

- pentru $x = 0$, $\Gamma = 0$, deci intensitatea câmpului gravitațional în centrul inelului este zero;
- pentru $x \rightarrow \infty$, $\Gamma \rightarrow 0$;
- va exista, prin urmare, un maxim al intensității câmpului gravitațional într-un punct x în care:

$$\frac{d\Gamma_A}{dx} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Graficul funcției $\Gamma(x)$ este prezent în Fig. 5.2.

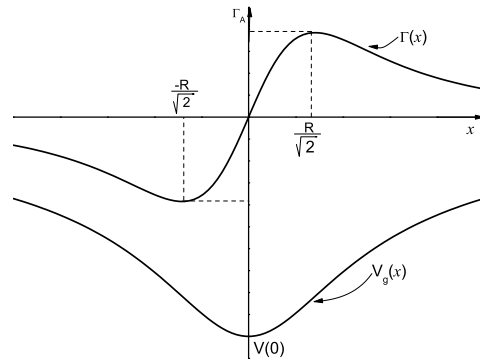


Figura 5.2: Dependenta de distanță a intensității câmpului, $\Gamma(x)$ și a potențialului gravitațional, $V_g(x)$ create de un inel circular de masă m și rază R , în puncte de pe axul acestuia.

Potențialul gravitațional creat în A de același element de masă dm al inelului este:

$$dV_g = -\gamma \frac{dm}{l} = -\gamma \frac{\lambda ds}{l} = -\gamma \frac{mR d\varphi}{2\pi l}, \quad (5.22)$$

sau:

$$dV_g = -\gamma \frac{mR d\varphi}{2\pi \sqrt{R^2 + x^2}} \quad (5.23)$$

Potențialul gravitațional total în punctul A va fi:

$$V_g(A) = -\gamma \frac{mR}{2\pi \sqrt{R^2 + x^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = -\gamma \frac{mR}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad (5.24)$$

iar în centrul inelului:

$$V_g(0) = -\gamma \frac{m}{R} \quad (5.25)$$

Constatăm, așadar, că potențialul gravitațional are valoarea maximă în centrul inelului și descrește monoton de-a lungul axei acestuia.

5.3.2 Calculul câmpului și al potențialului gravitațional create de o distribuție sferică de masă

(a) Cazul sferei goale

Să considerăm acum o masă m distribuită pe o *suprafață sferică* (sferă goală) de rază R . Să calculăm intensitatea câmpului gravitațional creat de această masă într-un punct exterior, A al acesteia, situată la distanța r de centrul sferei (Fig. 5.3). Pentru aceasta, vom împărți suprafața sferică în "inele" cu centrul pe dreapta OA , de lățime $Rd\theta$ și de rază $R \sin \theta$. Cum suprafața unui astfel de "inel" este:

$$dS = 2\pi R \sin \theta R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta, \quad (5.26)$$

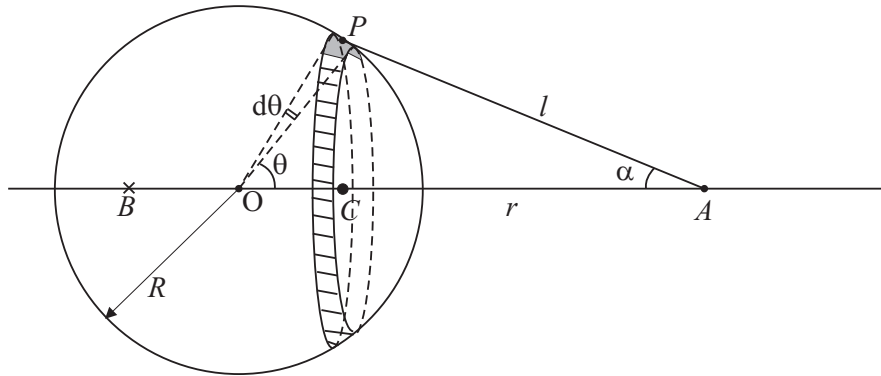


Figura 5.3: Un model pentru calculul câmpului creat de o distribuție sferică de masă m , în exteriorul acesteia.

iar densitatea superficială de masă pe suprafața sferei:

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}, \quad (5.27)$$

masa elementară a unui "inel" va fi:

$$dm_i = \sigma dS = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{M}{2} \sin \theta d\theta. \quad (5.28)$$

Masa unui element de inel va fi o fracțiune $d\varphi/2\pi$ din dm_i :

$$dm = \frac{d\varphi}{2\pi} \cdot \frac{M}{2} \sin \theta d\theta = \frac{M}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5.29)$$

Valoarea câmpului creat de un element de inel în punctul A va fi:

$$d\Gamma_A = \gamma \frac{dm}{l^2} = \gamma \frac{M \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi l^2} \quad (5.30)$$

Procedând la fel ca și în cazul inelului din secțiunea precedentă, vom proiecta pe $d\vec{\Gamma}_A$ după direcția OA și, respectiv, perpendicular pe OA :

$$\begin{aligned} d\Gamma_{A\parallel} &= d\Gamma_A \cos \alpha = \frac{M}{4\pi l^2} \sin \theta \cos \alpha d\theta d\varphi, \\ d\Gamma_{A\perp} &= d\Gamma_A \sin \alpha = \frac{M}{4\pi l^2} \sin \theta \sin \alpha d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Cum:

$$\int d\Gamma_{A\perp} = 0,$$

rezultă că:

$$\Gamma_A = \int d\Gamma_{A\parallel} = \frac{\gamma M}{4\pi} \int \frac{\sin \theta \cos \alpha d\theta d\varphi}{l^2} \quad (5.31)$$

Aplicând de două ori teorema cosinusului în triunghiul OPA , putem scrie:

$$\cos \alpha = \frac{r^2 + l^2 - R^2}{2rl} \quad (5.32)$$

$$\cos \theta = \frac{r^2 + l^2 - R^2}{2rl}. \quad (5.33)$$

Derivând relația (5.33) obținem:

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dl} = -\frac{2l}{2rR} \Rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{dl}{rR}, \quad (5.34)$$

deoarece r și R sunt constante, indiferent de poziția elementului de masă pe sferă.

Ținând cont de relațiile (5.32) și (5.34), relația (5.31) devine:

$$\Gamma_A = \frac{\gamma M}{4\pi} \int_{r-R}^{r+R} \frac{dl}{rR} \cdot \frac{r^2 + l^2 - R^2}{2rl^3} d\varphi, \quad (5.35)$$

Deci:

$$\Gamma_A = \frac{\gamma M}{8\pi r^2 R} \int_{r-R}^{r+R} \frac{r^2 + l^2 - R^2}{l^2} dl \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad (5.36)$$

deoarece însumarea după φ este independentă de cea după l . Așadar:

$$\Gamma_A = \frac{\gamma M}{4r^2 R} \int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{r^2 - R^2}{l^2} dl + 1 \right) dl = \frac{\gamma M}{4r^2 R} \cdot 4R \quad (5.37)$$

Prin urmare, intensitatea câmpului creat de masa M plasată pe suprafața sferică, în punctul A , plasat în exteriorul sferei goale, este:

$$\Gamma_A = \gamma \frac{M}{r^2} \quad (5.38)$$

Acesta reprezintă un rezultat cu totul remarcabil, întrucât același rezultat s-ar obține *dacă întreaga masă a sferei ar fi concentrată în centrul O al acesteia*. Cu alte cuvinte, pentru toate punctele din interiorul unei astfel de mase distribuite pe o suprafață sferică (indiferent de raza acesteia!), câmpul gravitațional are aceeași valoare ca și când întreaga masă a sferei ar fi concentrată în centrul acesteia. Acest rezultat îi aparține lui Newton și a constituit unul din primele sale succese în construcția teoriei gravitației clasice.

Să calculăm acum intensitatea câmpului gravitațional într-un punct din interiorul sferei goale. Notând acest punct cu B , intensitatea câmpului gravitațional, Γ_B , va putea fi calculată folosind un raționament similar cu cel precedent, care a condus la relația (5.36). Vom schimba doar limitele de integrare: cel mai îndepărtat "inel" în raport cu punctul B se află la distanța $l_M = R + r$, iar cel mai apropiat - la distanța $l_m = R - r$. Așadar:

$$\Gamma_B = \frac{\gamma M}{8\pi r^2 R} \int_{R-r}^{R+r} \frac{r^2 + l^2 - R^2}{l^2} dl \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Prima dintre cele două integrale din relația de mai sus este zero, așadar:

$$\Gamma_B = 0 \quad (5.39)$$

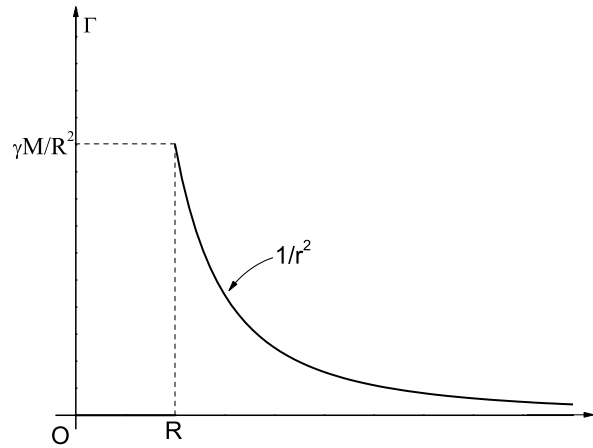


Figura 5.4: Dependența $\Gamma(r)$ pentru cazul unei mase M , distribuite uniform pe o suprafață sferică de rază R . A se nota discontinuitatea funcției $\Gamma(r)$ în punctul $r = R$.

Prin urmare, intensitatea câmpului gravitațional în interiorul unei sfere goale este nul. Graficul care exprimă dependența $\Gamma(r)$ este prezentat în Fig. 5.4.

Să calculăm, în continuare, potențialul gravitațional creat de aceeași masă elementară, în puncte din exteriorul sferei. Potențialul creat de masa elementară dm în punctul A din exteriorul sferei va fi:

$$dV_g = -\gamma \frac{dM}{l} = -\gamma \frac{M}{4\pi l} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5.40)$$

sau, ținând cont de ecuația (5.34):

$$dV_g = -\gamma \frac{M}{4\pi} \frac{ldl}{lrR} d\varphi \quad (5.41)$$

Potențialul creat în A de masa de pe întreaga sferă va fi:

$$V_g(A) = -\gamma \frac{M}{4\pi rR} \int_{r-R}^{r+R} dl \int_0^{2\pi} d\varphi = -\gamma \frac{M}{2rR} (r + R - r + R)$$

deci:

$$V_g^{(A)} = -\gamma \frac{M}{r} \quad (5.42)$$

Am obținut și în acest caz un rezultat la fel de interesant:

Ca și intensitatea câmpului gravitațional, potențialul gravitațional creat de o suprafață sferică în exteriorul sferei are aceeași valoare ca și cel creat de o masă punctiformă, M , plasată în centrul acesteia.

În ceea ce privește punctele din interiorul sferei:

$$V_g(B) = -\gamma \frac{M}{4\pi R} \int_{r-R}^{r+R} dl \int_0^{2\pi} d\varphi = -\gamma \frac{M}{R} \quad (5.43)$$

adică în orice punct interior, B , potențialul gravitațional V_g are aceeași valoare cu potențialul pe suprafața sferei.

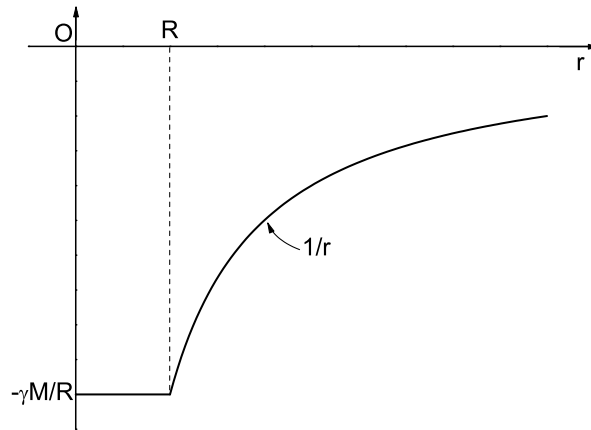


Figura 5.5: Dependența $V_g(r)$ pentru cazul unei mase M distribuite uniform pe o suprafață sferică de rază R .

Graficul dependenței $V_g(r)$ este reprezentat în Fig. 5.5.

Observație: Relațiile (5.38) și (5.42), respectiv (5.39) și (5.43) sunt legate prin relația de legătură dintre câmp și potențial:

$$\vec{\Gamma} = -\text{grad}V_g = -\nabla V_g, \quad (5.44)$$

care, în coordonate sferice se reduce la:

$$\Gamma = -\frac{dV_g}{dr}, \quad (5.45)$$

Rezultă că:

$$V_g = -\int \vec{\Gamma} \cdot d\vec{r}. \quad (5.46)$$

Aceasta înseamnă că, dacă se cunoaște dependența $\Gamma(r)$, se poate afla *direct* dependența $V_g(r)$, folosind relația (5.46). Dacă, dimpotrivă, se cunoaște dependența $V_g(r)$, folosind relația (5.46) se poate afla $\Gamma(r)$.

Așa cum am constatat în această secțiune, calculul dependenței $\Gamma(r)$ este ceva mai dificil (datorită necesității sumării vectoriale). De aceea, de multe ori se preferă ca, mai întâi să se calculeze $V_g(r)$, care este o mărime scalară, iar Γ se află în pasul al doilea, folosind relația (5.45).

(b) Cazul sferei pline

Vom analiza, în continuare, dependențele $\Gamma(r)$ și $V_g(r)$ vom considera sfera plină, având o distribuție omogenă de masă (densitatea volumică de masă este aceeași în orice punct din volumul sferei).

Ca o primă modalitate de abordare a problemei, vom considera sfera formată dintr-o infinitate de pături sferice de grosime infinitezimală dR , fiecare din aceste pături comportându-se ca o suprafață sferică, la care ne-am referit în secțiunea (a). Întrucât fiecare astfel de pătură

sferică crează într-un punct din exteriorul sferei câmpul gravitațional de intensitate:

$$d\Gamma = \gamma \frac{dM}{r^2}$$

(dm fiind masa păturii sferice), câmpul creat în A de întreaga sferă de masă M va fi:

$$\Gamma = \int_V d\Gamma = \frac{\gamma}{r^2} \int dm = \gamma \frac{M}{r^2} \tag{5.47}$$

În relația anterioară am ținut cont că $r = OA$ este constant pentru toate păturile sferice, de aceea a fost scoasă factor comun de sub semnul integralei. Așadar și în cazul unei sfere pline, câmpul creat într-un punct din exteriorul acesteia este egal cu câmpul pe care l-ar crea întreaga masă M a sferei, dacă ar fi concentrată în centrul acesteia.

Evident, urmând un raționament similar, vom găsi că și potențialul gravitațional creat de sfera plină într-un punct oarecare din exteriorul sferei va avea aceeași valoare ca și câmpul creat de aceeași masă M , dacă ar fi plasată în centrul sferei:

$$V_g = -\gamma \frac{M}{r} \tag{5.48}$$

Să analizăm, în continuare, câmpul și potențialul gravitațional în interiorul sferei pline. Să presupunem o suprafață sferică de rază arbitrară r_B ($0 < r_B < R$) ca în Fig. 5.6, care trece prin punctul B , acolo unde dorim să calculăm intensitatea câmpului.

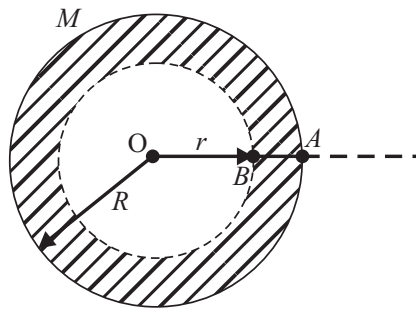


Figura 5.6: Un model pentru calculul intensității câmpului gravitațional în interiorul unei sfere de rază R .

Toate păturile sferice din exteriorul sferei de rază r ($r > r_B$) vor crea în B un câmp nul, deoarece punctul B , ca și toate punctele din zona nehașurată în Fig. 5.6 se află în interiorul acestor pături. Ori, așa cum am arătat în secțiunea (a), (vezi Fig. 5.4) câmpul Γ în interiorul unei pături sferice este nul. Câmpul gravitațional creat în B este, de fapt, datorat tuturor păturilor sferice de rază $0 < r < r_B$, adică de masa m_i din interiorul sferei de rază r_B .

Cum ρ este constant, putem scrie relația:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}; \quad \rho = \frac{m_i}{V_i} = \frac{3M_i}{4\pi r_B^3}, \tag{5.49}$$

ca urmare:

$$m_i = \frac{r_B^3}{R^3} m. \tag{5.50}$$

Așadar:

$$\Gamma_B = \gamma \frac{m_i}{r_B^2} = \gamma \frac{mr_B^3}{r_B^2 R^3} = \gamma \frac{m}{R^3} r_B \quad (5.51)$$

Constatăm, prin urmare, că, în interiorul sferei pline, intensitatea câmpului gravitațional crește liniar de la zero (în centrul sferei) la valoarea $\Gamma_S = \gamma \frac{M}{R^2}$, atunci când $r_B = R$, deci pe suprafața sferei. Graficul funcției $\Gamma(r)$ este prezentat în Fig. 5.7.

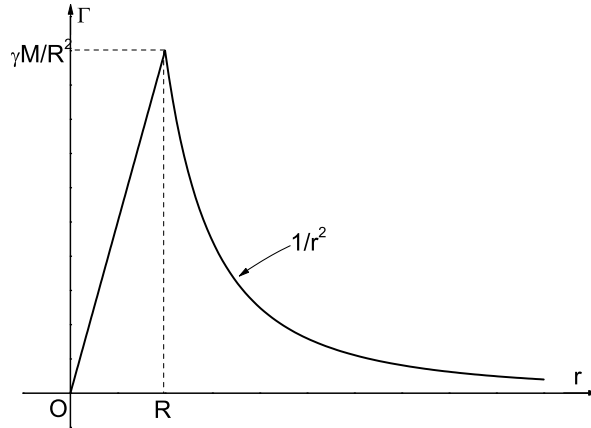


Figura 5.7: Dependența $\Gamma(r)$ pentru cazul unei mase M , distribuite în volumul unei sfere de rază R .

Pentru calculul dependenței $V_g(r)$ în interiorul sferei pline ne vom folosi de definiția potențialului. Așa cum cunoaștem deja, potențialul gravitațional reprezintă lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor de atracție gravitațională, pentru a deplasa o sarcină gravitațională (masă) dintr-un punct (în care se evaluează V_g) până la infinit.

Referindu-ne la Fig. 5.6, pentru a calcula $V_g(B)$, va trebui să calculăm:

- (i) lucrul mecanic necesar pentru a transporta o sarcină unitate din punctul B până pe suprafața exterioară a sferei, la care să adăugăm:
- (ii) lucrul mecanic pentru deplasarea aceluiași corp de probă de masă unitate de la suprafața sferei până la infinit.

Așadar:

$$L_{B \rightarrow \infty} = - \int_r^R F_g^{interior} \cdot dr - \int_r^R F_g^{exterior} \cdot dr, \quad (5.52)$$

în care:

$$F_g^{interior} = \gamma \frac{M \cdot m_0}{R^3} r,$$

iar:

$$F_g^{exterior} = \gamma \frac{M \cdot m_0}{r^2}.$$

m_0 fiind masa corpului de probă.

Prima integrală din relația (5.51) va avea valoarea:

$$I_1 = -\gamma \frac{M \cdot m_0}{R^3} \int_r^R r dr = -\gamma \frac{m_0 M}{2R^3} (R^2 - r^2) \quad (5.53)$$

iar a 2-a integrală, I_2 , va fi:

$$I_2 = -\gamma M m_0 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = -\gamma \frac{M m_0}{r} \quad (5.54)$$

Cu aceste rezultate putem să scriem expresia lui $V_g(B)$:

$$\begin{aligned} V_g(B) &= \frac{L_{B \rightarrow \infty}}{m} = -\gamma \frac{M}{2R^3} (R^2 - r^2) - \gamma \frac{M}{r} \\ V_g(B) &= -\gamma \frac{M}{2R^3} (3R^2 - r^2) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Conform relației (5.55), potențialul în centrul sferei pline va fi:

$$V_g(0) = -\frac{3}{2} \gamma \frac{M}{R} = -1,5 V_g(A) \quad (5.56)$$

Între O și A , conform relației (5.56) potențialul variază după o lege parabolică, ecuația $V_g^{int}(r)$ fiind de gradul II. Cu aceste concluzii putem reprezenta graficul $V_g(r)$, acesta arătând ca în Fig. 5.8.

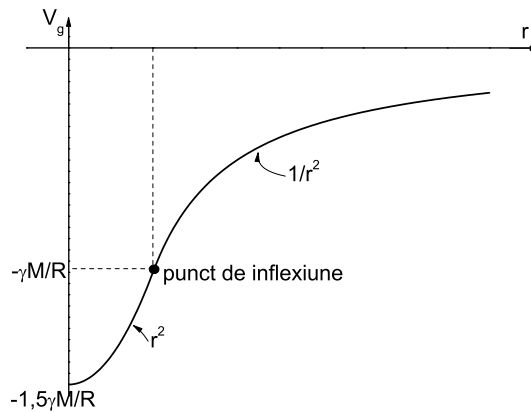


Figura 5.8: Dependența potențialului $V_g(r)$ creat de o sferă plină de masă M și rază R .

Observație: Calculul intensității câmpului gravitațional și al forței gravitaționale resimțită de un corp plasat în exteriorul sferei la distanța r a fost făcut pentru prima oară de I. Newton. Explicația faptului că un corp, aflat în imediata vecinătate a suprafața Pământului, cade după o dreaptă care trece prin centrul Pământului (cu alte cuvinte că Pământul se comportă în astfel de cazuri ca și un punct material plasat în centrul său) a fost doar intuit de Newton în momentul când a construit teoria gravitației, dar nu demonstrat riguros. Pentru a produce o demonstrație riguroasă, așa cum am făcut-o pe parcursul acestei secțiuni, Newton a trebuit să-și construiască inclusiv "instrumentele" de lucru - calculul diferențial și integral. Ca orice fizician riguros, Newton a așteptat 18 ani pentru a verifica rezultatele teoriei sale, înainte de a le publica în cartea sa *Principiile*.

5.4 Legea (teorema) lui Gauss

O a doua abordare a problemei examinate în secțiunea anterioară se bazează pe legea (sau teorema, cum este adeseori numită) lui Gauss. De fapt, această lege este valabilă în toate cazurile în care forța de interacțiune este invers proporțională cu r^2 (așa cum este cazul cu forțele de natură gravitațională sau coulombiană). Teorema lui Gauss este utilă în toate situațiile legate de calculul intensității câmpului gravitațional (sau electric), iar utilizarea ei conduce la simplificarea calculelor, așa cum vom vedea în cele ce urmează.

După cum este cunoscut, intensitatea câmpului creat într-un punct situat la o distanță r de o masă m , sau de o sarcină q este dat de relația:

$$\vec{\Gamma}(r) = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{e}_r, \quad (5.57)$$

respectiv,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r \quad (5.58)$$

Ne vom limita discuția, în cele ce urmează, la cazul câmpului gravitațional.

Să considerăm o masă m plasată în interiorul unei suprafețe închise de formă arbitrară care înconjoară această masă – sursă de câmp. Această suprafață (Fig. 5.9) se numește *suprafață gaussiană*.

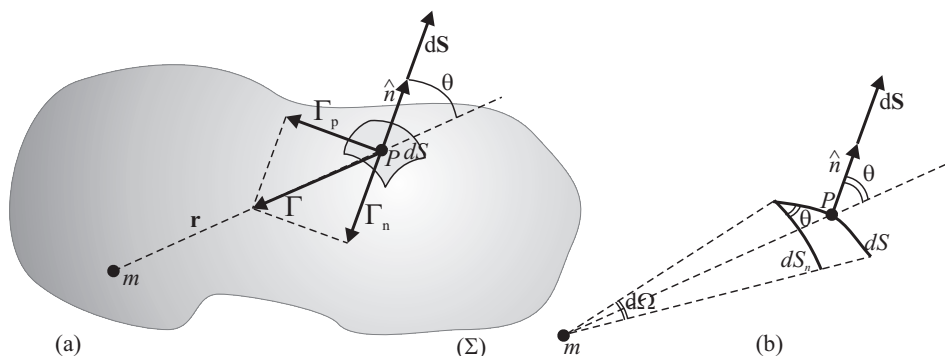


Figura 5.9: (a) o suprafață gaussiană Σ ce înconjoară o masă m ; (b) un detaliu (bi-dimensional) al zonei din jurul punctului P .

Să considerăm, pe această suprafață (Σ) un element de suprafață dS . Dacă atribuim suprafeței elementare dS un versor al normalei, \hat{n} , orientat spre exterior, se spune că am vectorizat suprafața dS . Ca mărime vectorială, aceasta poate fi scrisă sub forma:

$$d\vec{S} = dS \cdot \hat{n} \quad (5.59)$$

Intensitatea câmpului gravitațional din orice punct P de pe suprafața dS are expresia (5.58). El se poate descompune în două componente, $\vec{\Gamma}_n$ normală pe $d\vec{S}$ și, respectiv, $\vec{\Gamma}_p$, paralelă cu aceasta.

Fluxul vectorului Γ prin suprafața dS este:

$$d\phi = (\vec{\Gamma}_p + \vec{\Gamma}_n) \cdot d\vec{S} = \vec{\Gamma}_p \cdot d\vec{S} + \vec{\Gamma}_n \cdot d\vec{S} \quad (5.60)$$

Deoarece:

$$\vec{\Gamma}_p \cdot d\vec{S} = \Gamma_p \cdot dS \cdot \cos(\Gamma_p, n) = \Gamma_p \cdot dS \cdot \cos 90^\circ = 0$$

rezultă că:

$$d\phi = \vec{\Gamma}_n \cdot d\vec{S} = \Gamma_n \cdot dS \cdot \cos 180^\circ = -\Gamma_n dS$$

cu $\Gamma_n = \Gamma \cos \theta$.

Așadar:

$$d\phi = -\Gamma \cos \theta \cdot dS = -\Gamma dS_n \quad (5.61)$$

sau:

$$d\phi = \Gamma dS \cos \alpha(\Gamma, \hat{n}) \quad (5.62)$$

cu $\alpha = 180^\circ - \theta$.

Având în vedere (vezi Fig. 5.9) că $dS \cos \theta = dS_n$, unde dS_n reprezintă proiecția lui dS pe direcția lui \vec{r} (adică suprafața efectivă "văzută" de liniile de câmp divergente din m), în interiorul unghiului solid $d\Omega$, $d\phi$ poate fi scris și sub forma:

$$d\phi = \Gamma dS_n \quad (5.63)$$

Înlocuind acum pe Γ în relația (5.63) vom găsi:

$$d\phi = -\gamma \frac{m}{r^2} dS \cos \theta = -\gamma \frac{m dS_n}{r^2} = -\gamma m d\Omega \quad (5.64)$$

Fluxul prin întreaga suprafață gaussiană (Σ) va fi obținut prin integrarea ecuației (5.64):

$$\phi = \int d\phi = -\gamma m \int d\Omega = -4\pi\gamma m$$

Așadar, fluxul total al câmpului Γ printr-o suprafață oarecare, creat de o sarcină punctiformă, m , plasată în interiorul acestei suprafețe este:

$$\phi = -4\pi\gamma m \quad (5.65)$$

Un rezultat similar relației (5.65) se obține folosind mai întâi o suprafață auxiliară sferică (Σ_1), de rază r_1 , cu centrul în m , (Fig. 5.10) prin care fluxul lui Γ este:

$$\phi_1 = -\gamma \frac{m}{r_1^2} \cdot 4\pi r_1^2 = -4\pi\gamma m \quad (5.66)$$

Este evident că, în cazul suprafeței sferice (Σ_1), normala la suprafața dS este coliniară cu \vec{r} și $dS = dS_n$.

Similar, prin suprafața (Σ_2) fluxul total va fi:

$$\phi_1 = -\gamma \frac{m}{r_2^2} \cdot 4\pi r_2^2 = -4\pi\gamma m \quad (5.67)$$

Cu alte cuvinte, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, în care ϕ reprezintă fluxul prin orice suprafață (Σ) cuprinsă între (Σ_1) și (Σ_2).

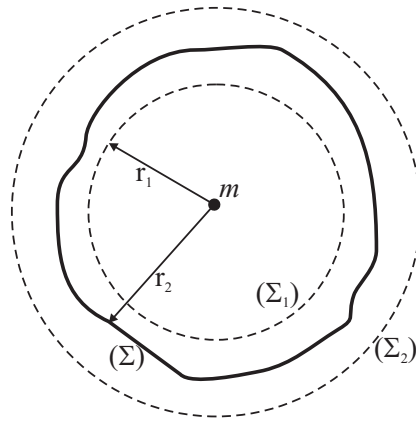


Figura 5.10: Două suprafețe sferice (Σ_1) și (Σ_2) aflate în interiorul, respectiv exteriorul suprafeței (Σ) .

Putem generaliza rezultatul anterior (ec. 5.65) pentru un număr N de mase (m_1, m_2, \dots, m_N) aflate în intervalul suprafeței arbitrare (Σ) .

Întrucât fluxul este o mărime scalară, fluxul generat de cele N mase va fi:

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 + \dots + \phi_n = -4\pi\gamma(m_1 + m_2 + \dots + m_N.)$$

Cum

$$m_{total} = \sum_{i=1}^N m_i,$$

atunci:

$$\phi = -4\pi\gamma m_{total} \quad (5.68)$$

Ecuția (5.68) se poate aplica în egală măsură dacă masa interioară m_{total} nu este distribuită sub forma a N mase punctiforme discrete, ci este distribuită continuu.

Când masa m este plasată în exteriorul suprafeței gaussiene (Σ) (vezi Fig. 5.11), fluxul elementar al lui Γ prin suprafața dS_1 va fi, conform relației (5.64):

$$d\phi_1 = -\gamma \frac{m}{r_1^2} dS_1 \cos \theta_1 = -\gamma \frac{m dS_{1n}}{r_1^2} = -\gamma m d\Omega \quad (5.69)$$

în care $r_1 = OP_1$. Fluxul $d\phi_2$ prin dS_2 al aceleiași mărimi Γ (care în acest caz face un unghi ascuțit) cu \hat{n}_2 va fi:

$$d\phi_2 = \gamma \frac{m}{r_2^2} dS_2 \cos \theta_2 = \gamma m \frac{dS_{2n}}{r_2^2} = \gamma m d\Omega \quad (5.70)$$

Așadar $d\phi_1 = -d\phi_2$, iar suma $d\phi_1 + d\phi_2 = 0$.

Cum, în interiorul unghiului finit, Ω , sub care se vede suprafața (Σ) din O , vom avea perechi de suprafețe de tip dS_1 și dS_2 , din exemplul precedent, rezultă că:

$$\phi = \int_{(\Sigma)} d\phi = 0 \quad (5.71)$$

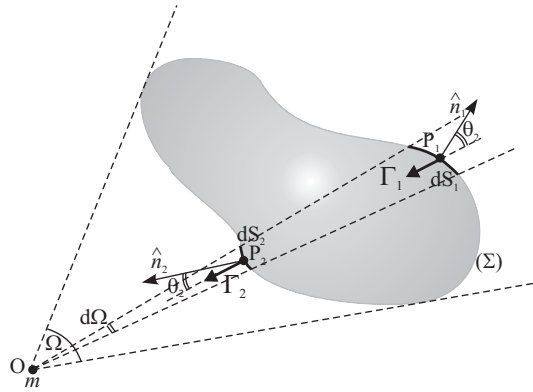


Figura 5.11: Fluxul elementar $d\phi_1$, respectiv $d\phi_2$ al lui $\vec{\Gamma}$ prin două suprafețe elementare dS_1 și dS_2 , văzute în același unghi solid $d\Omega$.

Așadar, fluxul câmpului Γ , creat de o masă punctiformă sau o sumă de mase punctiforme, ori distribuție continuă de masă printr-o suprafață închisă, oarecare, care nu conține masa m_{total} este egal cu zero.

Sumarizând rezultatele exprimate prin ecuațiile (5.68) și (5.71) putem scrie că:

$$\phi = \begin{cases} -4\pi\gamma m_{total} & \text{când } m_{total} \text{ este în interiorul suprafeței } (\Sigma) \\ 0 & \text{când } m_{total} \text{ este în exteriorul suprafeței } (\Sigma) \end{cases}$$

Observații:

- În electrostatică, având în vedere expresia forței coulombiene de interacțiune și expresia corespunzătoare a intensității câmpului electric, fluxul total se va scrie:

$$\phi = \begin{cases} \frac{q_{tot}}{\epsilon_0} & \text{când } q_{total} \text{ este în interiorul lui } (\Sigma) \\ 0 & \text{când } q_{total} \text{ este în exteriorul lui } (\Sigma) \end{cases} \quad (5.72)$$

- În electrostatică se analizează și un al 3-lea caz, frecvent întâlnit în cazul sarcinilor electrice de pe un conductor metallic și anume acela în care sarcina q se găsește pe suprafața gaussiană (Σ) . Se arată că, în acel caz:

$$\phi_s = -\frac{q_{total}}{2\epsilon_0}$$

- Folosindu-ne de legea lui Gauss, putem găsi cu ușurință intensitatea câmpului gravitațional în interiorul unei sfere goale sau omogene pline, de rază R - caz studiat în secțiunile precedente.

De exemplu, pentru cazul sferei pline (vezi Fig. 5.5), fluxul lui $\vec{\Gamma}$ prin sfera de rază r va fi:

$$\phi = -\gamma \frac{m_{int} \cdot 4\pi r^2}{r^2} = -\gamma \frac{\rho V_{int}}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = -4\pi\gamma\rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

Cum:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3},$$

rezultă că:

$$\phi = -4\pi\gamma \cdot \frac{3m}{4\pi R^3} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = -4\pi\gamma m \left(\frac{r}{R}\right)^3. \quad (5.73)$$

Având în vedere că $\phi = \Gamma \cdot 4\pi r^2$, rezultă că:

$$\Gamma = \frac{\phi}{4\pi r^2} = -\gamma \frac{mr}{R^3}, \quad (5.74)$$

adică am regăsit, de fapt, formula (5.38). Acest din urmă rezultat arată că *legea lui Gauss și legea lui Newton a forței gravitaționale sunt echivalente*: dacă se pleacă de la expresia forței, respectiv a intensității câmpului se regăsește legea lui Gauss și invers.

5.5 Momentul cinetic al unei distribuții sferice de masă

(a) Cazul sferei goale

Să considerăm, pentru început, o masă m , distribuită pe o suprafață sferică de rază R (Fig. 5.12).

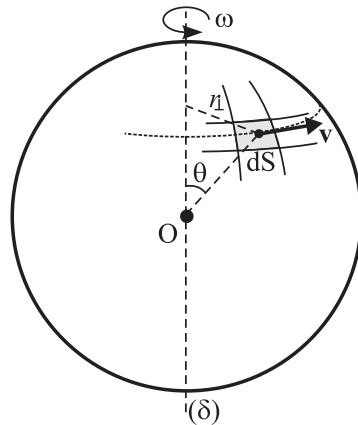


Figura 5.12: O sferă de masă m și rază r , în rotație în jurul axei (δ) .

Să calculăm momentul cinetic al sferei, când aceasta se rotește în jurul axei (δ) . Întrucât elementul de suprafață dS în coordonate sferice are expresia:

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (5.75)$$

masa elementară conținută pe suprafața dS va fi:

$$dm = \sigma \cdot dS = \frac{m}{4\pi R^2} \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

în care σ este densitatea superficială de masă de pe sferă. Momentul cinetic al lui dm în raport cu axa δ va fi:

$$d\vec{J} = r_1 \times \vec{v} dm \quad (5.76)$$

Având în vedere orientarea vectorilor \vec{r}_1 și \vec{v} , $d\vec{J}$ este paralel cu axa (δ) și orientat spre în sus. Modulul lui $d\vec{J}$ este:

$$dJ = r_1 v dm \cdot \sin 90^\circ = r_1 v dm.$$

Întrucât $r_1 = R \sin \theta$, iar $v = \omega r_1 = \omega R \sin \theta$, rezultă că:

$$dJ = R \sin \theta \cdot \omega R \sin \theta \cdot \frac{m}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Așadar:

$$dJ = \frac{mR^2}{4\pi} \sin^3 \theta d\theta d\varphi \cdot \omega \quad (5.77)$$

Având în vedere că ω este același pentru toate elementele dm de pe sferă și că toți vectorii dJ , corespunzători acestor elemente de masă sunt paraleli între ei, putem scrie:

$$J = \int dJ = \frac{mR^2\omega}{4\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (5.78)$$

Dar $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$, iar $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$, astfel încât

$$J = \frac{2}{3} mR^2\omega \quad (5.79)$$

(b) Cazul sferei pline

Să calculăm acum momentul cinetic al unei sfere pline în raport cu un diametru, J , în cazul unei sfere pline de masă m și rază R , omogenă. În acest caz:

$$dm = \rho dV$$

în care $\rho = m/V = 3m/4\pi R^3$, iar $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Așadar:

$$dm = \frac{3m}{4\pi R^3} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Prin urmare:

$$dJ = r_1 v dm = r \sin \theta \cdot \omega r \sin \theta \cdot \frac{3m}{4\pi R^3} \cdot r^2 \cdot \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Pe aceleași considerente, ca și în cazul anterior:

$$J = \int dJ = \frac{3m\omega}{4\pi R^3} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Obținem, în final:

$$J = \frac{2}{5} mR^2\omega \quad (5.80)$$

Din analiza relațiilor (5.79) și (5.80) constatăm că \vec{J} se poate scrie ca un produs între o mărime scalară I și vectorul viteza unghiulară:

$$\vec{J} = I\vec{\omega} \quad (5.81)$$

în care – în cazul sferei goale $I = \frac{2}{3}mR^2$, iar în cazul sferei pline, $I = \frac{2}{5}mR^2$. Mărimea I se numește moment de inerție al sferei în raport cu axa (δ).

Despre momente de inerție în cazul diferitelor corpuri vom discuta în detaliu în capitolul dedicat mișcării de rotație a solidului. Pentru moment, anticipând rezultatele din acel capitol, vom preciza doar că momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă exprimă tendința de împotrivire a modificării în timp (a creșterii sau scăderii) vitezei unghiulare, ω . De fapt, vom demonstra că I este - pentru mișcarea de rotație - ceea ce este masa pentru mișcarea de translație și anume *o măsură a inerției mecanice la modificarea (aici) a vitezei unghiulare în mișcarea de rotație.*

5.6 Probleme

- Un corp de masă m de forma unei bare subțiri, de lungime L , este așezat de-a lungul axei Ox a unui sistem de referință, cu capătul din stânga plasat la distanța d față de origine. Determinați intensitatea câmpului gravitațional în originea O .

Răspuns: $\frac{\gamma m}{d(L+d)}$.

- Aflați intensitatea câmpului gravitațional creat de un plan infinit, caracterizat de o densitate superficială de masă, σ , constantă, în regiunea din imediata sa vecinătate.

Răspuns: $2\pi\gamma\sigma$.

- Determinați și apoi reprezentați grafic, intensitatea câmpului gravitațional creat de o pătură plană infinită, de grosime d , caracterizată de densitatea volumică de masă, ρ , constantă într-un punct situat la distanța x de planul median.

Răspuns: $(\rho d)/(2\varepsilon_0)$ dacă $x > d/2$; $(\rho x)/(\varepsilon_0)$ dacă $x < d/2$.

- Un balon sferic conține în centrul său un mic obiect de masă m . Dacă se mărește volumul balonului, corpul din interior rămânând în aceeași poziție, fluxul gravitațional prin suprafața balonului crește, descrește sau rămâne constant? Ce se poate spune despre intensitatea câmpului gravitațional?

Răspuns: fluxul rămâne constant iar intensitatea descrește.

- Demonstrați că potențialul gravitațional creat de un disc de rază R și masă m într-un punct situat la periferia discului este $\frac{4\gamma g}{\pi R}$.

- O sferă de masă m și rază R are densitate variabilă de la centru spre periferie, conform relației $\rho = \rho_0(1 - r/R)$. Demonstrați că:

(a) $\rho = \frac{3m}{\pi R^3}$

- (b) intensitatea câmpului gravitațional are expresia:

$$\Gamma = \frac{mr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \left(4 - 3\frac{r}{R} \right).$$

7. Calculați energia proprie, gravitațională a unei sfere de masă M și rază R .

Răspuns: $-\frac{3}{5} \frac{\gamma M^2}{R}$.

Solidul rigid

6.1 Modelul de solid rigid

Solidul rigid reprezintă un sistem continuu de puncte materiale aflate la distanțe fixe, indiferent de intensitatea forțelor deformatoare. Solidul rigid reprezintă, prin urmare, un model de corp *absolut nedeformabil*. Dintre exemplele de corpuri reale care se apropie mai mult de conceptul de rigid amintim diamantul sau unele aliaje ale wolframului cu carbonul¹. În modelul de solid rigid se ignoră, de asemenea, vibrațiile atomilor în jurul pozițiilor de echilibru.

Mecanica solidului rigid este una din părțile cele mai dificile ale fizicii, datorită complexității descrierii mișcării și a aparatului matematic aferent. Pentru ilustrarea acestei afirmații, amintim, cu titlu de exemplu, că doar mișcarea giroscopului este tratată într-o colecție de patru volume aparținând autorilor F. Klein și A. Sommerfeld².

O parte din rezultatele obținute în cadrul studiului mecanicii corpului rigid se regăsesc în alte domenii ale fizicii, cum ar fi fizica atomului și moleculei, spectroscopie etc. Așa cum vom vedea în continuare, oricât de complicată ar fi, mișcarea unui solid rigid se poate descompune într-o *mișcare de translație* și una sau mai multe *mișcări de rotație*. Rotația rigidului are loc, fie în jurul unei axe, fie în jurul unui punct. În primul caz, axa de rotație este fixă în spațiu, în al doilea caz axa se poate reorienta în spațiu în timpul mișcării, singura condiție restrictivă fiind ca ea să treacă printr-un punct fix. O astfel de axă mobilă în spațiu se numește *axă instantanee de rotație*. Evident, rotația în jurul unei axe fixe este cazul cel mai simplu al rotației unui solid rigid.

Abordarea mișcării solidului rigid în acest capitol va urma calea de la simplu la complex, încercând să acoperim câteva aspecte esențiale. Vom utiliza în acest scop câteva rezultate din capitolele anterioare cu privire la mecanica punctului material și a sistemelor de puncte materiale.

Întrucât forțele interne care mențin constante distanțele dintre perechi arbitrare de puncte

¹Cum este așa numitul *aliaj vidia* – termen provenind din cuvântul german *wie dia* = ca și diamantul

²*Asupra teoriei giroscopului* – "Über die Theorie des Kreisels" 4 vol, Ed. Johnson, New York, 1965, Ed. I apărută în 1897

din volumul rigidului (așa numitele forțe de constrângere) sunt întotdeauna în perechi, ele respectând principiul acțiunii și reacțiunii, în descrierea mișcării solidului rigid vom putea aplica legile de conservare ale impulsului, momentului cinetic și energiei.

Numărul minim de coordonate independente care descriu în mod complet mișcarea solidului rigid se numește *numărul gradelor de libertate* ale rigidului. La prima vedere, dacă un solid rigid este format din N particule componente, iar poziția fiecărei particule este descrisă de 3 coordonate, numărul total de coordonate necesare pentru descrierea mișcării în acest caz ar trebui să fie $3N$. Aceasta aserțiune ar fi adevărată dacă toate cele $3N$ coordonate ar fi independente. Dacă impunem condiția ca un singur punct, P , al solidului rigid să rămână fix în spațiu, atunci translația devine blocată, însă rigidul se poate roti în jurul aceluși punct fix. Așa cum vom vedea în detaliu la momentul potrivit, pentru un interval temporal infinitesimal dt , rigidul execută o rotație în jurul unei axe "fixe" ce trece prin P . Este posibil ca, ulterior, axa instantanee de rotație să se reorienteze în spațiu, ocupând o altă poziție ce trece prin punctul fix P și așa mai departe.

Dacă impunem acum condiția ca și un al 2-lea punct, (Q în Fig. 6.1(a)) al rigidului să rămână fix, corpul se poate încă roti în jurul axei fixe PQ . Dacă, în sfârșit, impunem condiția ca și un al 3-lea punct, R , situat în afara dreptei PQ să rămână fix, atunci și rotația devine blocată, iar *solidul rigid rămâne în repaus*. Rezultă că poziția în spațiu a unui solid rigid poate fi precizată în mod univoc prin 9 coordonate spațiale (3 puncte \times 3 coordonate)

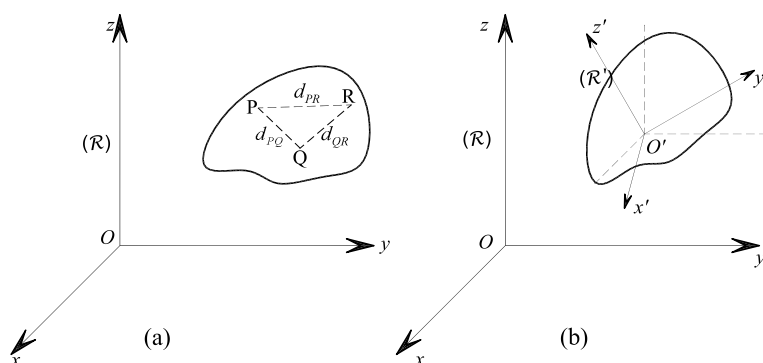


Figura 6.1: (a) Poziția unui SR în spațiu este fixată de coordonatele a 3 puncte necoliniare P, Q și R ; (b) Rigidului i se asociază un referențial al centrului de masă \mathcal{R}' .

O analiză mai atentă arată că, de fapt, numărul de coordonate spațiale care trebuie cunoscute este chiar mai mic decât 9. Într-adevăr, dacă (x_P, y_P, z_P) , (x_Q, y_Q, z_Q) și (x_R, y_R, z_R) sunt coordonatele punctelor P, Q, R între acești 9 parametri există trei legături, exprimate prin relațiile matematice care exprimă constanța distanțelor PQ, PR și PQ . Prin urmare:

$$\begin{aligned} d_{PQ} &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} = \text{const}1; \\ d_{PR} &= \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 + (z_P - z_R)^2} = \text{const}2; \\ d_{RQ} &= \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2 + (z_R - z_Q)^2} = \text{const}3. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Așadar, poziția în spațiu a unui solid rigid este în întregime caracterizată prin $9 - 3 = 6$

coordonate independente. Spunem că un solid rigid are 6 grade de libertate. În rezolvarea unei probleme de dinamică a rigidului alegerea celor 6 coordonate este la latitudinea noastră: în general 3 dintre coordonate sunt "consumate" pentru precizarea poziției centrului de masă O' a rigidului $(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$ (Fig. 6.1(b)), iar celelalte 3 sunt unghiurile necesare pentru a descrie rotația corpului³.

Există cazuri chiar mai simple decât cel precedent, cum este acela al *mișcării plan-paralele*, în care solidul rigid se rostogolește în jurul unei axe care translează mereu paralel cu ea însăși. În acest caz sunt necesare doar două coordonate, x și φ , pentru descrierea mișcării. Este cazul, de exemplu, al rostogolirii unui cilindru sau a unei sfere pe un plan înclinat.

O situație și mai simplă o regăsim în cazul mișcării pendulelor (fizic sau de torsiune), în care axa de rotație rămâne fixă. În aceste cazuri, poziția corpului este precizată printr-o singură coordonată unghiulară.

Vom examina în continuare mișcările simple executate de solidul rigid.

6.2 Mișcarea de translație a solidului rigid

Pentru a găsi ecuația diferențială a mișcării de translație a unui rigid, vom pleca de la constatarea că, în decursul translației, toate punctele constitutive ale acestuia se deplasează pe traiectorii paralele între ele. În plus, toate punctele au *aceeași viteză instantanee*. Mai mult decât atât, variația în timp a vitezei tuturor punctelor rigidului este similară, deci toate punctele constitutive ale rigidului acestea au *aceeași accelerație* \vec{a} .

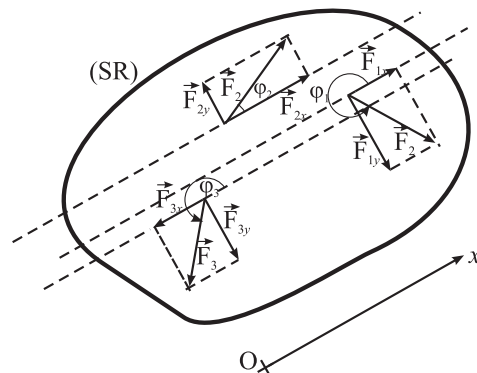


Figura 6.2: Pentru ca solidul rigid să execute o mișcare de translație după direcția Ox , e necesar ca rezultanta $R_y = 0$.

Accelerația \vec{a} este, în general, efectul unor forțe exterioare (Fig. 6.2). Aceste forțe se descompun în componente paralele cu Ox și, respectiv, perpendiculare pe Ox . Corpul rigid va transla după direcția Ox în măsura în care rezultanta forțelor perpendiculare pe Ox este nulă:

$$\vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{3y} + \dots = 0 \quad (6.2)$$

³Adesea, solidului rigid i se atașează un sistem de referință \mathcal{R}' , solidar cu acesta, sistem care se rotește în jurul axelor Ox, Oy și Oz ale reperului laboratorului \mathcal{R} .

În aceste condiții, rezultanta forțelor, pe care o scriem, în general, sub forma:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (6.3)$$

va avea, în acest caz, expresia:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{kx}, \quad (6.4)$$

unde N este numărul total de forțe exterioare ce acționează asupra rigidului. Relația (6.4) poate fi scrisă și sub forma scalară:

$$R = \sum_{k=1}^N F_k \cos \varphi_k. \quad (6.5)$$

Studiul dinamicii solidului rigid se bazează pe rezultatele găsite în cazul mișcării punctului material. Într-adevăr vom considera solidul rigid ca fiind format dintr-o infinitate de puncte, fiecare de masă infinitezimală dm . Ne vom concentra atenția asupra mișcării unui punct generic al rigidului, scoțându-l (ipotetic!) din ansamblul de puncte materiale ale rigidului. Acest punct generic va executa o aceeași mișcare ca și întreg rigidul, dacă va fi acționat de o forță $\delta\vec{F}_x$, care îi revine din forța totală \vec{R} . Cu alte cuvinte, $\delta\vec{F}_x$ este de atâtea ori mai mic decât forța rezultantă care acționează asupra întregului rigid, \vec{R} , de câte ori dm este mai mic decât masa m a întregului corp:

$$\frac{\delta F_x}{R} = \frac{dm}{m} \Rightarrow \delta F_x = \frac{dm}{m} R. \quad (6.6)$$

Pentru un astfel de punct generic, legea a 2-a a dinamicii se va scrie sub forma:

$$dm \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \delta \vec{F}_x. \quad (6.7)$$

Integrând acum ecuația (6.7) pe întreg volumul V al corpului, vom obține:

$$\int_V dm \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \int_V \delta \vec{F}_x. \quad (6.8)$$

Întrucât:

$$\int_V \vec{r} dm = m \vec{r}_{O'}, \quad (6.9)$$

$\vec{r}_{O'}$ fiind vectorul de poziție al centrului de masă, avem, în continuare:

$$\int_V \vec{v} dm = m \vec{v}_{O'}; \quad \int_V \vec{a} dm = m \vec{a}_{O'}. \quad (6.10)$$

Pe de altă parte, $\int_V \delta \vec{F}_x = \vec{R}$, ca urmare, ecuația (6.8) se poate sub forma:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_{O'}}{dt^2} = \vec{R} \Leftrightarrow m \vec{a}_{CM} = \vec{R}, \quad (6.11)$$

în care $\vec{a}_{CM} = \vec{a}$ este accelerația centrului de masă a rigidului. Accelerația centrului de masă a rigidului este egală cu accelerația de translație a oricărui punct al acestuia.

Prin urmare, mișcarea de translație a întregului rigid este în întregime caracterizată de mișcarea centrului de masă al acestuia, în care se consideră aplicată rezultanta \vec{R} a forțelor exterioare. Din această cauză, tratarea problemei translației solidului rigid este identică cu cea a translației punctului material. În funcție de tipul de forță exterioare, ecuația diferențială a mișcării de translație se integrează așa cum am amintit în Capitolul 3 al Părții I, găsindu-se succesiv dependențele $\vec{v}(t)$, $\vec{r}(t)$ și apoi ecuația traiectoriei.

6.3 Rotația rigidului în jurul unei axe fixe

În afara mișcării de translație, *rotația în jurul unei axe fixe* reprezintă un al doilea tip de mișcare simplă a rigidului. Să considerăm un solid rigid care execută o mișcare de rotație în jurul unei axe fixe Oz (Fig. 6.3).

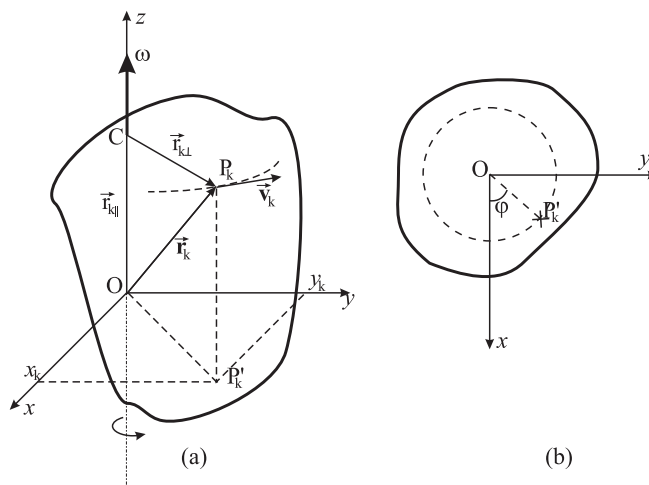


Figura 6.3: Rotația unui rigid în jurul unei axe fixe, Oz : a) vedere laterală; b) vedere de sus (în planul xOy).

Axa poate fi *menținută* fixă (de exemplu fixând-o la capete prin lagăre) sau poate să rămână *în mod spontan fixă*, în anumite condiții (vezi Sec. 2.5). Să considerăm o particulă generică, de masă m_k , plasată în punctul P_k , a cărei poziție în spațiu este specificată de vectorul de poziție \vec{r}_k . Traiectoria particulei P_k , este un cerc de rază $r_{k\perp}$, cu centrul în punctul C de pe axa Oz . Având în vedere că $CP_k \parallel OP'_k$, rezultă că OP'_k , care este chiar proiecția lui \vec{r}_k în planul xOy , este egal cu $r_{k\perp}$ și egal (vezi Fig. 6.3b) cu:

$$r_{k\perp} = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}. \quad (6.12)$$

Dacă φ este unghiul făcut de OP'_k cu axa Ox , atunci viteza unghiulară de rotație a rigidului în jurul lui Oz va fi $\omega = \dot{\varphi}$. De aceea, viteza instantanee a particulei P_k va fi:

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times r_{k\perp} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_k - \vec{r}_{k\parallel}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$$

întrucât $|\vec{\omega} \times \vec{r}_{k\parallel}| = \omega r_{k\parallel} \sin 0^\circ = 0$.

Așadar:

$$\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k \quad (6.13)$$

Componentele lui \vec{v}_k într-un sistem de referință cartezian sunt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= -v_k \sin \varphi; \\ \dot{y}_k &= v_k \cos \varphi; \\ \dot{z}_k &= 0, \end{aligned} \quad (6.14)$$

iar modulul vitezei punctului P_k este:

$$v_k = \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}. \quad (6.15)$$

Energia cinetică a întregului corp va fi suma energiilor cinetice ale tuturor particulelor constituente ale rigidului:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V v_k^2 dm_k = \frac{1}{2} \int_V \omega r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_V r_\perp^2 dm. \quad (6.16)$$

Integrala din ultimul termen al ecuației (6.16) se numește *momentul de inerție* al rigidului în raport cu axa Oz . Ea se notează:

$$I_{zz} = \int_V r_\perp^2 dm = \int_V r^2 \rho dV. \quad (6.17)$$

Cu această notație, energia cinetică de rotație se poate scrie sub forma:

$$E_c = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2. \quad (6.18)$$

Comparând expresia energiei cinetice de rotație (6.18), cu energia cinetică în mișcarea de translație, $E_c = mv^2/2$, constatăm că în locul masei din mișcarea de translație, aici apare momentul de inerție în raport cu axa de rotație⁴. În același timp, rolul vitezei tangențiale, v este acum jucat de viteza unghiulară, ω .

Să găsim, în cele ce urmează, și echivalentul ecuației fundamentale a dinamicii pentru mișcarea de rotație. Așa cum cunoaștem deja, o măsură a efectului de rotație indus de o forță îl reprezintă momentul forței, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Am arătat anterior că între \vec{M} și momentul cinetic al corpului \vec{J} există relația:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt}. \quad (6.19)$$

Momentul cinetic total al corpului în cazul rotației în raport cu o axă (în cazul nostru Oz) este:

$$\vec{J} = \int_V d\vec{J} = \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_V r_\perp \omega r_\perp \sin 90^\circ dm \hat{z},$$

⁴Spre deosebire de masă, care este o mărime constantă, valoarea lui I depinde și de distribuția masei în raport cu axa de rotație.

iar modulul său:

$$J = |\vec{J}| = \omega \int_V r^2 dm = \omega I_{zz}. \quad (6.20)$$

Întrucât I_{zz} este independent de timp, dat fiind că axa Oz este solidară cu corpul vom avea:

$$M_z = \frac{d}{dt}(\omega I_{zz}) = I_{zz} \frac{d\omega}{dt} = I_{zz} \dot{\omega}. \quad (6.21)$$

Ecuția diferențială (6.21) descrie mișcarea de rotație a rigidului, tot așa cum $F_x = m\dot{v}$ determină translația de-a lungul unei direcții Ox . O paralelă între mărimile fizice specifice mișcării de translație și celei de rotație este prezentată în Tabelul 6.1.

Tabela 6.1: Analogia dintre mărimile specifice mișcării rectilinii și celei de rotație în jurul unei axe.

Mișcarea rectilinie	Mișcarea de rotație
Poziția: x	Poziția unghiulară: θ
Viteza: $v = \frac{dx}{dt}$	Viteza unghiulară: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Accelerația: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Accelerația unghiulară: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2}$
Ecuțiile mișcării uniform accelerate: $v = v_0 + at$ $x = v_0t + \frac{at^2}{2}$	Ecuțiile mișcării uniform accelerate: $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ $\theta = \omega_0t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
Masa: m	Momentul de inerție: $I = \int r^2 dm$
Impulsul: $p = mv$	Momentul cinetic: $J = I\omega$
Forța: F $F = ma$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Momentul cuplului $M = rF \sin \theta$ $M = I\varepsilon$ $\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt}$
Energia cinetică de translație $E_c = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinetică de rotație: $E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$
Energia potențială: $E_p(x)$ $E_p(x) = -\int_{x_0}^x F(x)dx$ $F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$	Energia potențială: $E_p(\theta)$ $E_p(\theta) = -\int_{\theta_0}^{\theta} M(\theta)d\theta$ $M(\theta) = -\frac{dE_p(\theta)}{d\theta}$

6.4 Câteva exemple de calcul al momentelor de inerție

Așa cum am arătat în Capitolul 5 al Părții I, momentul de inerție în cazul unui sistem discret format din N puncte materiale care se rotesc în jurul axei (δ) este dat de relația:

$$I_\delta = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (6.22)$$

Relația echivalentă în cazul sistemelor continue va fi:

$$I_\delta = \int_V r_\perp^2 dm, \quad (6.23)$$

în care r_{\perp} este distanța dintre elementul de masă dm și axa de rotație (δ) în raport cu care se calculează I_{δ} . În funcție de modul cum este distribuită masa, putem defini o densitate liniară, o densitate superficială, sau sau o densitate volumică de masă:

Pentru cele 3 cazuri, momentul de inerție se va scrie sub forma:

$$\begin{aligned} I_{\delta} &= \int_L r_{\perp}^2 \lambda dl = \int r_{\perp}^2 \lambda dl; \\ I_{\delta} &= \int_S r_{\perp}^2 \sigma dS = \iint r_{\perp}^2 \sigma dS; \\ I_{\delta} &= \int_V r_{\perp}^2 \rho dV = \iiint r_{\perp}^2 \rho dV. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Dacă un corp se compune din mai multe părți, momentul de inerție al întregului corp în raport cu o axă δ este egal cu suma *algebrică* a momentelor de inerție ale părților componente în raport cu acea axă:

$$I_{\delta} = I_{1\delta} + I_{2\delta} + I_{3\delta} + \dots \quad (6.25)$$

Cu alte cuvinte, *momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă fixă este o mărime scalară.*

6.4.1 Teorema axelor paralele

Pentru calculul momentelor de inerție în raport cu o axă oarecare, este foarte utilă cunoașterea așa-numitei *teoreme a lui Huygens-Steiner* sau *teorema axelor paralele*.

Să demonstrăm această teoremă. Considerăm că un rigid execută o rotație în jurul unei axe exterioare (δ). Să alegem sistemul de referință al laboratorului ca având axa Oz identică cu axa (δ). Să considerăm, de asemenea, un sistem de referință (\mathcal{R}') legat de corp, cu originea

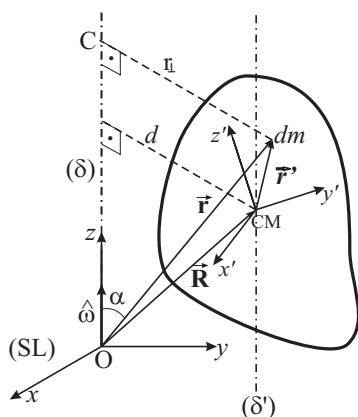


Figura 6.4: Rotația unui rigid în jurul unei axe exterioare δ .

în centrul său de masă, care se rotește odată cu corpul rigid. Un element de masă dm , aflat la distanța r_{\perp} de axa δ va avea vectorul de poziție \vec{r} în raport cu (\mathcal{R}) și (\vec{r}') în raport cu (\mathcal{R}'). Relația dintre \vec{r} și \vec{r}' este:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}', \quad (6.26)$$

unde \vec{R} este vectorul de poziție al centrului de masă, O' în sistemul de referință al laboratorului.

Momentul de inerție al unei mase elementare, dm în raport cu axa (δ) este:

$$dI_\delta = r_\perp^2 dm,$$

în care:

$$r_\perp = r \sin \alpha = |\vec{r} \times \hat{\omega}|. \quad (6.27)$$

În relația precedentă, $\hat{\omega}$ este versorul vitezei unghiulare $\vec{\omega}$, care este coliniară cu axa (δ) , conform definiției. De fapt, relația (6.27) poate fi scrisă, ținând cont de relația (6.26) și sub forma:

$$r_\perp = \left| \vec{R} \times \hat{\omega} + \vec{r}' \times \hat{\omega} \right|.$$

Așadar:

$$dI_\delta = \left| \vec{R} \times \hat{\omega} + \vec{r}' \times \hat{\omega} \right|^2 dm.$$

Momentul de inerție al întregului corp, în raport cu axa δ , va fi:

$$I_\delta = \int_V dI_\delta = \int_V (\vec{R} \times \hat{\omega})^2 dm + 2 \int_V (\vec{R} \times \hat{\omega}) \cdot (\vec{r}' \times \hat{\omega}) dm + \int_V (\vec{r}' \times \hat{\omega})^2 dm \quad (6.28)$$

Având în vedere că:

$$|\vec{R} \times \hat{\omega}| = R|\hat{\omega}| \sin \alpha(\vec{R}, \hat{\omega}) = R \sin \alpha = d, \quad (6.29)$$

iar:

$$|\vec{r}' \times \hat{\omega}| = r'|\hat{\omega}| \sin \beta(\vec{r}', \hat{\omega}) = r' \sin \beta = r'_\perp, \quad (6.30)$$

rezultă că:

$$\int_V (\vec{R} \times \hat{\omega})^2 dm = d^2 \int_V dm = md^2. \quad (6.31)$$

De asemenea:

$$\int_V (\vec{r}' \times \hat{\omega})^2 dm = \int_V r'^2_\perp dm = I_{\delta'}, \quad (6.32)$$

unde (δ') este o axă paralelă cu axa (δ) , dar trecând prin centrul de masă O' al corpului (de aceea se numește *axă centrală*).

Așadar:

$$I_\delta = md^2 + 2d \left(\int_V r' dm \right) \times \hat{\omega} + I_{\delta'}. \quad (6.33)$$

Având în vedere că $\int_V r' dm = mr_{CM/\mathcal{R}'}$, în care $r_{CM/\mathcal{R}'}$ este modulul vectorului de poziție al centrului de masă în sistemul (\mathcal{R}') al centrului de masă, care este, în mod evident, zero, rezultă că:

$$I_\delta = I_{\delta'} + md^2. \quad (6.34)$$

Această ecuație servește la formularea enunțului teoremei Huygens-Steiner:

Momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă externă (δ) este egal cu suma dintre momentul de inerție al aceluiași corp în raport cu axa centrală (δ') , paralelă cu axa externă, și produsul dintre masa corpului și pătratul distanței dintre axele (δ) și (δ') .

Să calculăm în continuare câteva momente de inerție ale unor corpuri frecvent întâlnite în practică:

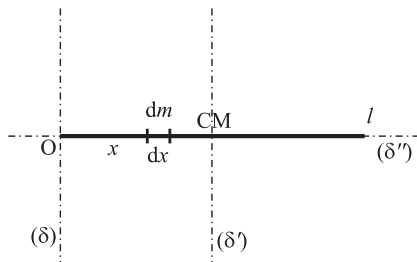


Figura 6.5: Un fir subțire care se rotește în diverse moduri în jurul câtorva axe de rotație posibile.

(a) Distribuție liniară de masă: fir subțire

Să considerăm un fir subțire de masă m și lungime l (Fig. 6.5)

Dacă firul se rotește în jurul unei axe (δ) perpendiculară pe fir și trecând prin O (Fig. 6.5), un element de masă dm , plasat la distanța $r_{\perp} = x$ de la axa (δ) va avea momentul de inerție în raport cu această axă:

$$dI_{\delta} = r_{\perp}^2 dm = x^2 dm = x^2 \lambda dx.$$

Momentul de inerție al întregului fir va fi:

$$I_{\delta} = \int dI_{\delta} = \lambda \int_0^l x^2 dx = \lambda \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^l = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}. \quad (6.35)$$

Dacă firul se rotește în jurul unei axe centrale (δ') (Fig. 6.5), vom avea:

$$I_{\delta'} = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}. \quad (6.36)$$

Din relațiile (6.35) și (6.36) rezultă și valabilitatea teoremei Huygens-Steiner:

$$I_{\delta} = I_{\delta'} + \frac{ml^2}{4} \quad (6.37)$$

Dacă firul se rotește în jurul unei axe (δ'') ce coincide cu firul însuși, cum întreaga sa masă se află chiar pe axa de rotație, ($r_{\perp} = 0$) și, ca urmare, $I_{\delta''} = 0$.

Înainte de a calcula momentele de inerție ale unor corpuri cu distribuție superficială de masă, să demonstrăm enunțul unei alte teoreme importante.

6.4.2 Teorema axelor perpendiculare

Să considerăm un corp de forma unei plăci plane foarte subțiri, a cărei masă este conținută în planul $x'O'y'$ al sistemului de referință propriu (\mathcal{R}') cu originea în centrul de masă al corpului (Fig. 6.6). Să calculăm momentul de inerție $I_{z'}$ al plăcii. Pentru început, momentul de inerție

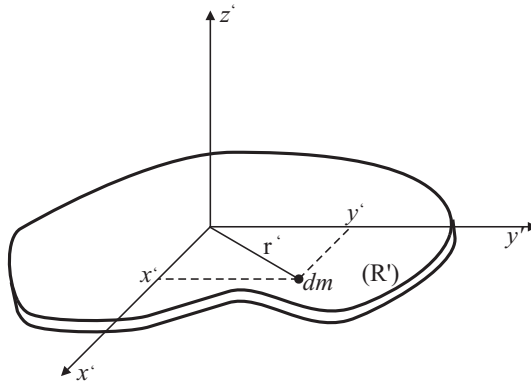


Figura 6.6: O placă subțire de masă m și grosime d (mult mai mică decât celelalte dimensiuni ale acesteia).

al unui element de masă dm care se rotește în raport cu axele Ox' , Oy' și Oz' va fi, respectiv:

$$dI_{x'} = y'^2 dm; \quad dI_{y'} = x'^2 dm; \quad dI_{z'} = r'^2 dm. \quad (6.38)$$

Întrucât $r'^2 = x'^2 + y'^2$, rezultă că:

$$dI_{z'} = dI_{x'} + dI_{y'};$$

sau, după integrare pe întreaga suprafață a plăcii:

$$\int dI_{z'} = \int dI_{x'} + \int dI_{y'} \Leftrightarrow I_{z'} = I_{x'} + I_{y'}. \quad (6.39)$$

Așadar:

Momentul de inerție al unei plăci plane în raport cu o axă centrală perpendiculară pe placă este egal cu suma celorlalte două momente centrale de inerție, calculate în raport cu celelalte axe centrale, reciproc perpendiculare, din planul plăcii.

Aceasta este enunțul teoremei axelor perpendiculare.

(b) Inel

Să calculăm câteva momente principale de inerție în raport cu câteva axe de rotație ale unui inel (vezi Fig. 6.7). Dacă rotația inelului are loc în jurul axei (δ) ce coincide cu axa $O'z'$:

$$I_{z'} = I_{\delta} = \int r_{\perp}^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2. \quad (6.40)$$

Dacă rotația are loc în jurul axei (δ'), conform teoremei axelor paralele, vom putea scrie:

$$I_{\delta'} = I_{\delta} + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2. \quad (6.41)$$

Dacă rotația se produce în jurul axei (δ''), momentul de inerție $I_{\delta''}$ poate fi calculat apelând din nou la teorema axelor paralele:

$$I_{\delta''} = I_{x'} + mR^2. \quad (6.42)$$

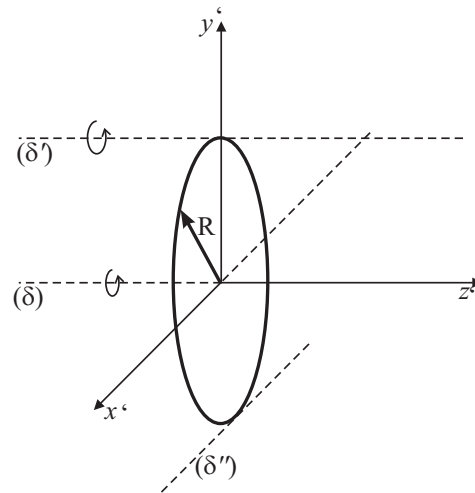


Figura 6.7: Un inel din sârmă subțire, de masă m și rază R și câteva posibile axe de rotație.

Este evident, din motive de simetrie, că $I_{x'} = I_{y'}$. Conform teoremei axelor perpendiculare:

$$I_{z'} = I_{x'} + I_{y'} = 2I_{x'}. \quad (6.43)$$

Din (6.40), (6.42) și (6.43) rezultă că:

$$I_{\delta''} = \frac{I_{z'}}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \quad (6.44)$$

(c) Disc

Să calculăm, pentru început, pe I_{δ} , unde (δ) este o axă perpendiculară pe planul discului, trecând prin centrul de masă al acestuia. Vom considera un element de suprafață dS

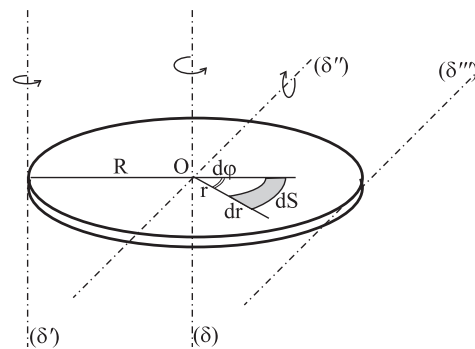


Figura 6.8: Un disc omogen, de masă m și rază R și câteva posibile axe de rotație.

(pe care se va afla o masă $dm = \sigma dS$) delimitat de două arce de cerc de raze r și $r + dr$ și care se vede din centrul discului sub un unghi elementar $d\varphi$ (Fig. 6.8). Momentul de

inerție al acestui element de masă care se rotește în jurul axei (δ) va fi:

$$dI_{\delta} = r_{\perp}^2 dm = r^2 \sigma dS = r^2 \sigma r d\varphi dr. \quad (6.45)$$

Cum $\sigma = m/S = m/\pi R^2$, după integrarea ecuației (6.45) vom obține:

$$I_{\delta} = \sigma \int_S r^3 dr d\varphi = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{mR^2}{2}. \quad (6.46)$$

Folosindu-ne de teorema axelor paralele, găsim imediat:

$$I_{\delta'} = I_{\delta} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2, \quad (6.47)$$

după cum, prin folosirea teoremei axelor perpendiculare:

$$I_{\delta''} = \frac{1}{2}I_{\delta} = \frac{mR^2}{4}. \quad (6.48)$$

Rezultă, în continuare, că:

$$I_{\delta'''} = I_{\delta''} + mR^2 = \frac{5}{4}mR^2. \quad (6.49)$$

(d) Cilindru gol, cilindru plin și pătură cilindrică

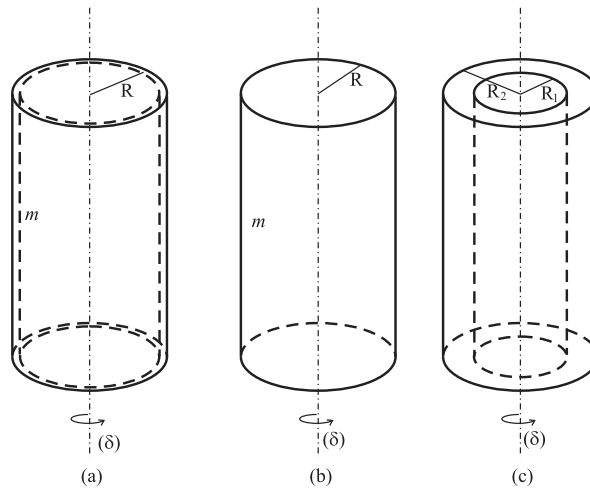


Figura 6.9: (a) un cilindru gol de masă m și rază R ; (b) un cilindru plin de masă m și rază R ; (c) O pătură cilindrică de masă m , raze R_1 și R_2 .

Să considerăm un cilindru de masă m , rază R și înălțime h și să considerăm, pentru început, că masa este în întregime distribuită pe suprafața sa exterioară (Fig. 6.9). Cum $\sigma = m/(2\pi r h)$, iar $dS = r d\varphi dh$, un element de masă dm va avea expresia:

$$dm = \sigma dS = \frac{m}{2\pi r h} \cdot r d\varphi dh = \frac{m d\varphi dh}{2\pi h}. \quad (6.50)$$

dm va fi situat la distanța $r_{\perp} = R$ de axa de rotație, astfel încât:

$$I_{\delta} = \int R^2 dm = R^2 \frac{m}{2\pi h} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dh = mR^2. \quad (6.51)$$

În cazul unui cilindru plin, un element de volum dV (exprimat în coordonate cilindrice) va conține masa:

$$dm = \rho dV = \frac{m}{V} r d\varphi dh dr. \quad (6.52)$$

Momentul de inerție în raport cu axa (δ) va fi, în acest caz:

$$\begin{aligned} I_{\delta} &= \int r_{\perp}^2 dm = \int r^2 \rho dV = \frac{m}{V} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dh; \\ I_{\delta} &= \frac{m}{V} \cdot \frac{R^4}{4} 2\pi h = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \frac{2\pi R^4 h}{4} = \frac{mR^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

După o procedură similară vom calcula momentul de inerție, în raport cu axa de simetrie, al unei pături cilindrice, de masă m , rază interioară R_1 și rază exterioară R_2 (Fig. 6.9c):

$$I_{\delta} = \frac{m}{V} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} \int_0^h dh = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2). \quad (6.54)$$

(e) Sfera

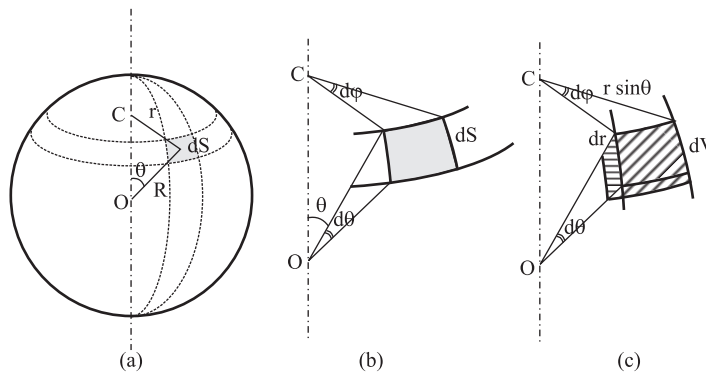


Figura 6.10: (a) O distribuție sferică superficială de masă; (b) un element de suprafață dS și (c) un element de volum, dV în coordonate sferice.

Să considerăm în continuare o sfera goală, cu alte cuvinte masa ei m să fie distribuită pe o suprafață $S = 4\pi R^2$. Densitatea superficială de masă va fi $\sigma = m/4\pi R^2$. Un element de masă $dm = \sigma dS$ se va afla la o distanță $r_{\perp} = r \sin \theta$ față de axa (δ), astfel încât:

$$\begin{aligned} I_{\delta} &= \int_S r^2 \sin^2 \theta \sigma dS = \frac{R^2 m}{4\pi R^2} \int \sin^2 \theta R^2 d\varphi d\theta = \\ &= \frac{mR^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{mR^2}{4\pi} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \\ &= \frac{2}{3} mR^2 \end{aligned} \quad (6.55)$$

În cazul sferei pline, un element de masă va avea expresia:

$$dm = \rho dV = \frac{3m}{4\pi R^3} \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (6.56)$$

Un astfel de element de masă se va afla în permanență în decursul rotației, la distanța $r_{\perp} = r \sin \theta$ cu $0 \leq r \leq R$, astfel încât:

$$\begin{aligned} I_{\delta} &= \int_V r^2 \sin^2 \theta \frac{3m}{4\pi R^3} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \\ &= \frac{3m}{4\pi R^3} \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{3m}{4\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{5} m R^2. \end{aligned} \quad (6.57)$$

(f) Paralelipiped dreptunghic.

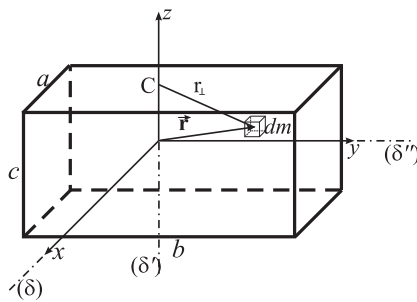


Figura 6.11: Un paralelipiped de masă m și dimensiuni a, b și c , împreună cu cele trei axe centrale ale acestuia.

Fie un paralelipiped omogen de masă m și dimensiuni a, b și c (Fig. 6.11). Să calculăm cele 3 momente principale centrale de inerție ale acestuia. Un element de masă dm va fi exprimat în acest caz:

$$dm = \rho dV = \frac{m}{abc} dx dy dz.$$

Distanța de la dm la axa (δ) este:

$$r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

astfel încât:

$$\begin{aligned} I_{\delta} &= \frac{m}{abc} \int (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{m}{abc} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \\ &+ \frac{m}{abc} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz = \frac{m}{3abc} \left(\frac{a^3}{4} bc + a \frac{b^3}{4} c \right) = \\ &= \frac{m}{12} (a^2 + b^2). \end{aligned} \quad (6.58)$$

În mod similar vom găsi:

$$I_{\delta'} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2); \quad I_{\delta''} = \frac{m}{12} (a^2 + c^2). \quad (6.59)$$

6.5 Rotatorul liniar

Să examinăm în continuare mișcarea unui sistem format din două mase punctiforme, fiecare de valoare m , montate la capetele unei tije de masă neglijabilă și de lungime $2l$ (Fig. 6.12). Un

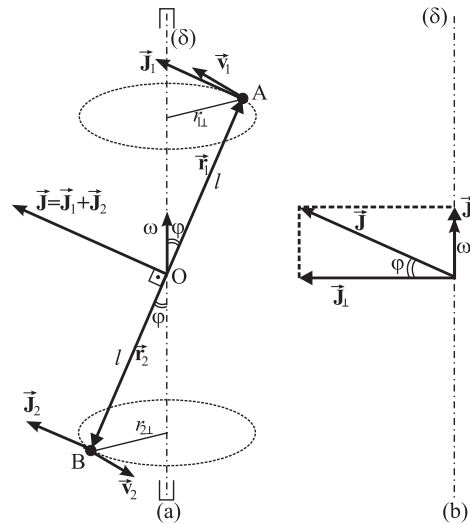


Figura 6.12: (a) Mișcarea de rotație a unui rotator liniar; (b) Orientarea vectorilor momente cinetice corespunzătoare rotației date

astfel de sistem se numește *rotator liniar*. Să considerăm că rotatorul liniar este *constrâns* să efectueze o mișcare de rotație în jurul axei (δ), care face cu tija un unghi arbitrar φ . Notând cu \vec{r}_1 și \vec{r}_2 vectorii de poziție ai celor două mase ($\vec{r}_1 = \vec{OA}$ și $\vec{r}_2 = \vec{OB}$), momentele cinetice ale celor două mase în raport cu punctul O vor fi:

$$\vec{J}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_1 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_1); \quad (6.60)$$

$$\vec{J}_2 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 = \vec{r}_2 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_2). \quad (6.61)$$

Vectorii \vec{J}_1 și \vec{J}_2 sunt perpendiculari pe tija, prin urmare, paraleli între ei, astfel încât momentul cinetic total al rotatorului în raport cu O va fi:

$$\vec{J} = \vec{r}_1 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + \vec{r}_2 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_2). \quad (6.62)$$

Din Fig. 6.12(a) rezultă că vectorii \vec{J} și $\vec{\omega}$ fac un unghi de $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ radiani. Mai mult, din Fig. 6.12(b) rezultă că momentul cinetic total \vec{J} al rotatorului are o componentă \vec{J}_{\parallel} , paralelă cu $\vec{\omega}$ și una, \vec{J}_{\perp} , perpendiculară pe acesta. Pentru a calcula modulul momentului cinetic orbital

\vec{J} să observăm că:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times \vec{r}_1 &= \vec{\omega} \times (\vec{r}_{1\parallel} + \vec{r}_{1\perp}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_{1\perp}; \\ \vec{\omega} \times \vec{r}_2 &= \vec{\omega} \times (\vec{r}_{2\parallel} + \vec{r}_{2\perp}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_{2\perp}.\end{aligned}$$

Cum $\vec{\omega} \perp \vec{r}_{1,2\perp}$ rezultă că:

$$\begin{aligned}|\vec{\omega} \times \vec{r}_{1\perp}| &= \omega r_{1\perp} = \omega l \sin \varphi; \\ |\omega \times \vec{r}_{2\perp}| &= \omega r_{2\perp} = \omega l \sin \varphi.\end{aligned}$$

Folosind aceste ultime două relații și ecuația (6.62) rezultă că modulul momentului cinetic total are valoarea:

$$J = 2m\omega l^2 \sin \varphi. \quad (6.63)$$

Produsul $2ml^2$ reprezintă *momentul de inerție* al rotatorului pentru rotația în jurul unei axe perpendiculare pe tija, trecând prin O . Așadar:

$$J = I\omega \sin \varphi. \quad (6.64)$$

Așa cum am menționat anterior, o astfel de rotație poate continua, în modul examinat aici, numai dacă rotatorul *este constrâns* să-și păstreze unghiul φ constant. O astfel de constrângere o putem realiza în practică dacă, de exemplu, sudăm tija de un ax de rotație (în O) iar axul *îl forțăm* să rămână fix cu ajutorul unor lagăre sau rulmenți montați la cele două capete ale sale (vezi și Fig. 6.12(a)).

Pentru a înțelege *de ce* mișcarea rotatorului are loc în prezența unor constrângeri exterioare, să examinăm efectul forțelor centrifuge de inerție care se manifestă asupra celor două mase (Fig. 6.13). Forțele centrifuge de inerție acționează pe direcția radială (C_1A , respectiv C_2B) și crează un cuplu de forțe care tinde să reorienteze axa (δ) forțând-o să se rotească spre poziția finală arătată în Fig. 6.13. Întrucât brațul fiecărei forțe centrifuge este $b = l \cos \varphi$, momentul cuplului de forțe centrifuge are valoarea:

$$\mathcal{M} = F_{cf1}l \cos \varphi + F_{cf2}l \cos \varphi = m\omega^2 l \sin \varphi l \cos \varphi + m\omega^2 l \sin \varphi l \cos \varphi,$$

sau:

$$\mathcal{M} = 2m\omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi = m\omega^2 l^2 \sin 2\varphi. \quad (6.65)$$

Constatăm, prin urmare, că *este nevoie de un cuplu de forțe exterioare* (de legătură) care să compenseze în efect pe $\vec{\mathcal{M}}$. Cuplul de forțe exterioare este asigurat de lagărele sau rulmenții montați la capetele axului de rotație. Trebuie remarcat că, în acord cu relația (6.65), $\vec{\mathcal{M}}$ are valoarea zero atunci când $\varphi = 90^\circ$ sau $\varphi = 0^\circ$. Aceasta înseamnă că rotația rotatorului în jurul unei axe, fie perpendiculară, fie paralelă cu tija este una *stabilă*, în sensul că în lagăre nu mai este necesar să se dezvolte momente antagoniste cuplului de forțe centrifuge. Cu alte cuvinte, o astfel de axă de rotație ca aceea din Fig. 6.13(c) nu mai necesită lagăre, de aceea ea se numește și *axă liberă*.

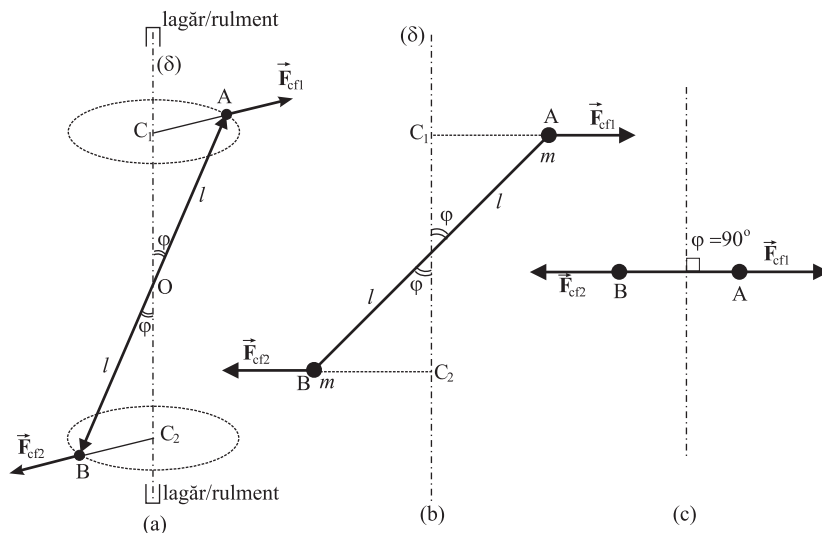


Figura 6.13: Forțele centrifuge \vec{F}_{cf1} și \vec{F}_{cf2} crează un cuplu care tinde să rearanjeze rotatorul, prin creșterea valorii unghiului φ .

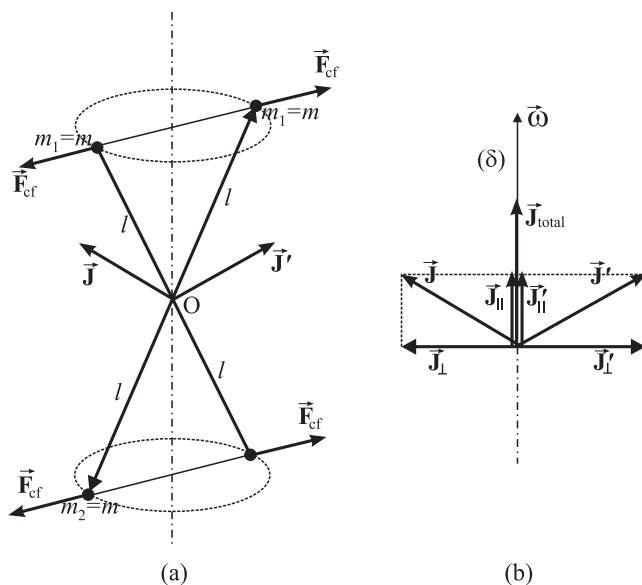


Figura 6.14: Rotatorul linear dublu. În acest caz, momentul cinetic total \vec{J} devine paralel cu $\vec{\omega}$.

În general, axele libere ale corpurilor omogene în rotație sunt *axele lor de simetrie*. Condiția $\vec{M} = 0$ apare nu numai atunci când $\varphi = 90^\circ$, ci și atunci când $\varphi = 0$ (condiție în care $F_{cf1} = F_{cf2} = 0$). În general, în raport cu o axă liberă, momentele centrifugale se compensează reciproc, iar mișcarea este *stabilă (sau permanentă)*.

Un rotator linear se poate roti în jurul axei (δ) numai dacă el este *dublu* (Fig. 6.14). În acest caz forțele centrifuge și momentele lor se compensează reciproc, iar momentul cinetic

total \vec{J}_{total} devine paralel cu $\vec{\omega}$ (Fig. 6.14(b)), întrucât componentele perpendiculare, \vec{J}_{\perp} și \vec{J}'_{\perp} sunt egale și de sens opus. Constatarea că mișcarea de rotație a unui solid rigid (iar rotatorul liniar este exemplul cel mai simplu de solid rigid, fiind format din 2, respectiv 4 puncte) devine stabilă în măsura în care vectorul \vec{J} devine paralel cu $\vec{\omega}$. Această concluzie are o maximă importanță pentru a înțelege caracteristicile unor mișcări de rotație mult mai complicate. De altfel, așa cum am menționat anterior, mișcarea devine stabilă în cazul în care axa de rotație (δ) face un unghi $\frac{\pi}{2}$ cu tija rotatorului, situație în care $\vec{\omega}$ devine paralel cu \vec{J} . În aceste circumstanțe produsul vectorial dintre cei doi vectori paraleli este:

$$\vec{\omega} \times \vec{J} = 0. \quad (6.66)$$

Corpurile reale asimilate solidului rigid vor prezenta o rotație liberă în măsura în care este realizată condiția (6.66). Operația tehnică pentru realizarea ei într-un atelier de service auto, în cazul unei roți de automobil, de exemplu, se numește *echilibrare dinamică*. Aceasta presupune adăugarea pe janta roții, a unor mici mase adiționale din plumb care ajustează simetria roții, până când momentul cinetic al roții în timpul rotației devine paralel cu axa sa de simetrie și, implicit cu $\vec{\omega}$. În absența echilibrării dinamice roata va solicita în mod intens (și nedorit) rulmenții, ducând la uzura lor prematură și chiar uneori la accidente.

6.6 Rotația rigidului în jurul unui punct fix

Să examinăm acum mișcarea de rotație a unui solid rigid în jurul unei axe (δ) care se poate reorienta în spațiu. Singura constrângere impusă axei este aceea de a trece printr-un punct fix O (Fig. 6.15). O astfel de mișcare a rigidului se numește rotație în jurul unui punct fix.

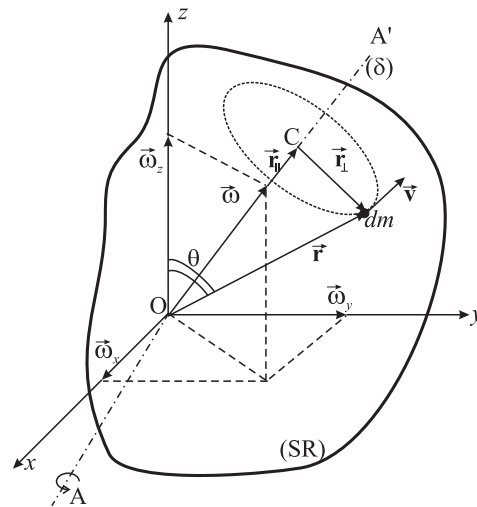


Figura 6.15: Un corp solid aflat, la un moment dat, în rotație în jurul axei instantanee (δ) aflată în poziția AA' .

Să presupunem că, la un moment dat, axa de rotație ocupă poziția arătată în Fig. 6.15. În acel moment, un element de masă dm descrie, pentru un interval de timp dt , un arc de cerc

cu centrul în C , iar momentul său cinetic în raport cu O are valoarea:

$$d\vec{J} = \vec{r} \times \vec{v}dm = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})dm. \quad (6.67)$$

Folosind identitatea dublului produs vectorial:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

vom scrie pe $d\vec{J}$ ca:

$$d\vec{J} = [r^2\vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})]dm. \quad (6.68)$$

Dacă ținem cont că:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}; \\ \vec{\omega} &= \omega_x\hat{x} + \omega_y\hat{y} + \omega_z\hat{z}; \end{aligned} \quad (6.69)$$

ecuația (6.68) devine:

$$d\vec{J} = (x^2 + y^2 + z^2)(\omega_x\hat{x} + \omega_y\hat{y} + \omega_z\hat{z}) - (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z). \quad (6.70)$$

Relația (6.70) este echivalentă cu 3 ecuații scalare:

$$\begin{aligned} dJ_x &= [(x^2 + y^2 + z^2)\omega_x - x^2\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z]dm = \\ &= [(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z]dm; \\ dJ_y &= [(x^2 + y^2 + z^2)\omega_y - xy\omega_x - y^2\omega_y - yz\omega_z]dm = \\ &= [-xy\omega_x + (x^2 + z^2)\omega_y - yz\omega_z]dm; \\ dJ_z &= [(x^2 + y^2 + z^2)\omega_z - xy\omega_x - yz\omega_y - z^2\omega_z]dm = \\ &= [-xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z]dm. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Relația (6.71) se poate scrie mai compact sub formă matriceală:

$$\begin{pmatrix} dJ_x \\ dJ_y \\ dJ_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y^2 + z^2)dm & -xydm & -xzdm \\ -yxdm & (x^2 + z^2)dm & -yzdm \\ -zxdm & -zydm & (x^2 + y^2)dm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (6.72)$$

În relația (6.72) vom face notațiile:

$$\begin{aligned} dI_{xx} &= (y^2 + z^2)dm = (r^2 - x^2)dm; \\ dI_{yy} &= (x^2 + z^2)dm = (r^2 - y^2)dm; \\ dI_{zz} &= (x^2 + y^2)dm = (r^2 - z^2)dm; \end{aligned} \quad (6.73)$$

și:

$$\begin{aligned} dI_{xy} &= dI_{yx} = -xydm; \\ dI_{xz} &= dI_{zx} = -xzdm; \\ dI_{yz} &= dI_{zy} = -yzdm. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Mărimile dI_{xx} , dI_{yy} și dI_{zz} reprezintă *momentele principale de inerție* ale elementului de masă și au semnificația momentelor de inerție ale masei dm , dacă aceasta s-ar roti în jurul axelor Ox , Oy sau Oz . Mărimile dI_{ij} ($i, j = x, y, z, i \neq j$) se numesc *momente centrifugale de inerție* și ele sunt asociate cu efectele forțelor centrifuge de inerție ce apar dacă axa (δ) nu este o axă liberă. Integrând ecuațiile (6.73) și (6.74) pe întregul volum al rigidului, vom găsi că:

$$\vec{J} = \vec{T}\vec{\omega}, \quad (6.75)$$

în care:

$$\vec{J} = J_x\hat{x} + J_y\hat{y} + J_z\hat{z}, \quad (6.76)$$

iar \vec{T} este tensorul momentelor de inerție al rigidului:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.77)$$

Se înțelege că:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V (r^2 - x^2) dm; \\ I_{yy} &= \int_V (r^2 - y^2) dm; \\ I_{zz} &= \int_V (r^2 - z^2) dm; \end{aligned} \quad (6.78)$$

și:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = - \int_V xy dm; \\ I_{xz} &= I_{zx} = - \int_V xz dm; \\ I_{yz} &= I_{zy} = - \int_V yz dm. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Din ecuația (6.75) rezultă că, în general, dacă axa (δ) ocupă o poziție arbitrară în spațiu în raport cu solidul rigid, vectorii \vec{J} și $\vec{\omega}$ nu sunt paraleli. Chiar în cazul simplu, în care axa (δ) este paralelă cu Oz (prin urmare $\omega_x = \omega_y = 0$), momentul cinetic total va avea componentele nenule:

$$J_x = I_{xy}\omega; \quad J_y = I_{yz}\omega; \quad J_z = I_{zz}\omega,$$

cu alte cuvinte va exista o componentă a lui \vec{J} paralelă cu $\vec{\omega}$: $\vec{J}_{\parallel} = I_{zz}\vec{\omega}$. Va exista, de asemenea, o componentă perpendiculară a lui \vec{J} pe $\vec{\omega}$, a cărei modul este $J_{\perp} = \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2}\omega$.

Să deducem acum expresia energiei cinetice de rotație a rigidului cu punct fix. Energia cinetică a unui element de masă dm va fi:

$$dE_c = \frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}dm\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}dm(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{v}. \quad (6.80)$$

În expresia 6.80, în care apare un produs mixt a 3 vectori, vom folosi posibilitatea de permutare ciclică permisă a termenilor, întrucât:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Vom obține:

$$dE_c = \frac{1}{2} dm [\vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v} dm);$$

sau

$$dE_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot d\vec{J}. \quad (6.81)$$

Integrând ecuația (6.81) pe întreg volumul rigidului⁵ vom găsi:

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{J}. \quad (6.82)$$

Trebuie menționat că ecuația (6.82) este analogul ecuației:

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2} mv^2, \quad (6.83)$$

valabilă în cazul mișcării de translație.

6.7 Elipsoidul de inerție

Să presupunem că axa instantanee de rotație (δ) face, la un moment dat, unghiurile α_x, α_y și α_z cu cele 3 axe ale unui referențial $Oxyz$ legat de corp. Vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ se poate scrie sub forma $\vec{\omega} = \omega \hat{\omega}$.

În aceste condiții, versorul $\hat{\omega}$ poate fi scris, în funcție de cele trei unghiuri, ca:

$$\hat{\omega} = \cos \alpha_x \hat{x} + \cos \alpha_y \hat{y} + \cos \alpha_z \hat{z}. \quad (6.84)$$

Momentul de inerție I al rigidului în raport cu axa (δ) va fi:

$$I = \int_V r_{\perp}^2 dm = \int_V (r^2 - r^2 \cos^2 \varphi)^2 dm.$$

Observăm, însă, că produsul $r \cos \varphi$ (vezi Fig. 6.15) se poate scrie și sub forma:

$$r \cos \varphi = \vec{r} \cdot \hat{\omega}, \quad (6.85)$$

astfel încât:

$$I = \int_V [r^2 - (\vec{r} \cdot \hat{\omega})^2] dm. \quad (6.86)$$

⁵Energia este o mărime scalară.

Având în vedere ecuația (6.84), precum și faptul că $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, ecuația (6.86) devine:

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha_x + I_{yy} \cos^2 \alpha_y + I_{zz} \cos^2 \alpha_z + 2I_{xy} \cos \alpha_x \cos \alpha_y + 2I_{xz} \cos \alpha_x \cos \alpha_z + 2I_{yz} \cos \alpha_y \cos \alpha_z. \quad (6.87)$$

Ecuația (6.87) permite exprimarea momentului de inerție al rigidului în raport cu o axă instantanee de rotație *arbitrară*, ca o funcție de 3 momente principale de inerție și de momentele centrifugale date de ecuațiile (6.78) și (6.79).

Alegând un sistem de referință convenabil legat de corp, în așa fel încât:

$$X = \frac{\cos \alpha_x}{\sqrt{I}}; \quad Y = \frac{\cos \alpha_y}{\sqrt{I}}; \quad Z = \frac{\cos \alpha_z}{\sqrt{I}}; \quad (6.88)$$

ecuația (6.87) capătă o formă mai simplă:

$$1 = I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 + 2I_{xy}XY + 2I_{xz}XZ + 2I_{yz}YZ. \quad (6.89)$$

Ecuația (6.89) se numește *a elipsoidului de inerție*. Dacă sistemul de axe legat de corp se alege cu originea în centrul de masă a rigidului iar axele Ox, Oy și Oz sunt paralele cu axele de simetrie ale rigidului, momentele centrifugale se anulează, iar ecuația (6.89) capătă o formă și mai simplă (așa-numita formă canonică):

$$1 = I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2; \quad (6.90)$$

sau, echivalent:

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha_x + I_{yy} \cos^2 \alpha_y + I_{zz} \cos^2 \alpha_z.$$

Cu titlu de exemplu, dacă calculăm momentul de inerție al unui paralelipiped dreptunghic de laturi a, b și c , care se rotește în jurul unei diagonale de volum, se obține expresia:

$$I_d = \frac{I_{xx}a + I_{yy}b + I_{zz}c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (6.91)$$

Observație. Ecuația (6.89) poartă denumirea de ecuația elipsoidului de inerție deoarece ea reprezintă ecuația unui elipsoid de rotație cu axele OX, OY și OZ (Fig. 6.16). Un punct P de pe suprafața acestui elipsoid, care are coordonatele X_P, Y_P, Z_P , va avea poziția pe suprafața elipsoidului, descrisă de un vector de poziție $\vec{\rho}_P(X_P, Y_P, Z_P)$. Putem scrie:

$$\vec{\rho}_P = (X_P\hat{X} + Y_P\hat{Y} + Z_P\hat{Z}) = \frac{1}{\sqrt{I}}(\cos \alpha_x\hat{X} + \cos \alpha_y\hat{Y} + \cos \alpha_z\hat{Z}) = \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{I}}. \quad (6.92)$$

Constatăm că modulul vectorului $\vec{\rho}_P$ este invers proporțional cu radicalul momentului de inerție corespunzător rotației în jurul axei (δ). Afirmția anterioară poate fi reformulată în sensul că momentul de inerție în raport cu axa (δ) este invers proporțional cu puterea a 2-a a lungimii segmentului OP .

Elipsoidul de inerție reprezintă o construcție imaginară care se asociază unui solid rigid real și care permite o reprezentare mai intuitivă a "imaginii" momentelor de inerție ale rigidului în raport cu axe instantanee arbitrare.

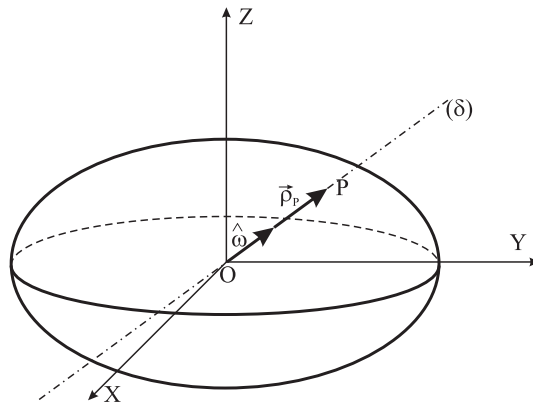


Figura 6.16: Elipsoidul de inerție asociat unui solid rigid aflat în rotație în jurul unei axe instantanee arbitrare.

6.8 Ecuațiile lui Euler

Așa cum am arătat în Partea I când am calculat derivatele versorilor unui sistem de referință mobil (atașat unui corp aflat în rotație în raport cu sistemul laboratorului) am obținut relația:

$$\left(\frac{d\hat{e}_r}{dt}\right)_{SL} = \left(\frac{d\hat{e}_r}{dt}\right)_{SC} + \vec{\omega} \times \hat{e}_r. \quad (6.93)$$

Ecuația (6.93) este, de fapt, mult mai generală, ea permițând exprimarea derivatelor oricărei mărimi vectoriale în raport cu cele două referențiale. De exemplu, între derivatele momentului cinetic în raport cu sistemul laboratorului, respectiv sistemul de referință legat de corp putem scrie relația:

$$\left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_{SL} = \left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_{SC} + \vec{\omega} \times \vec{J}. \quad (6.94)$$

Având în vedere că $\left(\frac{d\vec{J}}{dt}\right)_{SL} = \vec{\mathcal{M}}$ (momentul rezultat ce acționează asupra rigidului), ecuația (6.94) se va scrie sub forma a 3 ecuații scalare plecând de la ecuația vectorială:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix},$$

adică:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \frac{d(I_{xx}\omega_x)}{dt} + \omega_y J_z - \omega_z J_y = I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy}); \\ \mathcal{M}_y &= \frac{d(I_{yy}\omega_y)}{dt} + \omega_z J_x - \omega_x J_z = I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x (I_{xx} - I_{zz}); \\ \mathcal{M}_z &= \frac{d(I_{zz}\omega_z)}{dt} + \omega_x J_y - \omega_y J_x = I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx}). \end{aligned} \quad (6.95)$$

Sistemul de ecuații (6.95) reprezintă așa-numitele *ecuații ale lui Euler* și ele permit, prin integrare, găsirea legii de mișcare în cazul rotației oricărui rigid și analiza stabilității acesteia. Un exemplu în acest sens este prezentat în secțiunea următoare.

6.9 Stabilitatea rotației solidului rigid

Să presupunem că am adus, cu ajutorul unor forțe externe, un solid rigid la o mișcare de rotație în jurul unei axe libere a acestuia. Să atașăm solidului sistemul de referință propriu (SC), având axa Ox paralelă cu (δ) . Dacă vom înlătura forțele exterioare, ne putem pune problema dacă rotația în jurul axei ($Oz = \delta$) va continua în mod stabil sau nu. Natura stabilității rotației se poate afla analizând mișcarea rigidului după aplicarea unei *mici perturbații* care modifică orientarea axei și, implicit a lui $\vec{\omega}$.

Întrucât, înainte se aplicarea perturbației, vectorul $\vec{\omega}$ are componentele $\omega_x = \omega, \omega_y = 0, \omega_z = 0$, după aplicarea perturbației acestea vor fi:

$$\omega'_x = \omega + \Delta\omega_x, \quad \omega'_y = \Delta\omega_y, \quad \omega'_z = \Delta\omega_z.$$

Ecuațiile lui Euler (6.95) se vor scrie, în aceste condiții:

$$\begin{aligned} 0 &= I_{xx} \frac{d(\omega + \Delta\omega_x)}{dt} + \Delta\omega_y \Delta\omega_z (I_{zz} - I_{yy}); \\ 0 &= I_{yy} \frac{d(\Delta\omega_y)}{dt} + \Delta\omega_z (\omega + \Delta\omega) (I_{xx} - I_{zz}); \\ 0 &= I_{zz} \frac{d(\Delta\omega_z)}{dt} + (\omega + \Delta\omega) \Delta\omega_y (I_{yy} - I_{xx}). \end{aligned}$$

Deoarece $\Delta\omega \ll \omega$, $\omega\Delta\omega \approx \omega$. În același timp produsele $\Delta\omega_y \Delta\omega_z$, pot fi considerate egale cu zero, fiecare din termenii din acest produs fiind foarte mic. Ca urmare, ecuațiile precedente devin:

$$0 = I_{xx} \frac{d(\Delta\omega_x)}{dt}; \quad (6.96)$$

$$0 = I_{yy} \frac{d(\Delta\omega_y)}{dt} + \omega (I_{xx} - I_{zz}) \Delta\omega_z; \quad (6.97)$$

$$0 = I_{zz} \frac{d(\Delta\omega_z)}{dt} + \omega (I_{zz} - I_{yy}) \Delta\omega_y. \quad (6.98)$$

întrucât $d(\omega + \Delta\omega_x)/dt = d(\Delta\omega_x)/dt$, ω fiind independent de timp.

Conform ecuației (6.96), $\Delta\omega_x$ rămâne constantă în timp. Ecuațiile diferențiale (6.97) și (6.98) descriu evoluțiile în timp ale perturbațiilor $\Delta\omega_y$ și $\Delta\omega_z$. Substituind, de exemplu, pe $\Delta\omega_z$ din ecuația (6.97) în (6.98) vom obține:

$$\Delta\omega_z = \frac{-1}{\omega(I_{xx} - I_{zz})} I_{yy} \frac{d(\Delta\omega_y)}{dt} \quad (6.99)$$

și

$$\frac{d^2(\Delta\omega_y)}{dt^2} + \frac{(I_{xx} - I_{zz})(I_{xx} - I_{yy})}{I_{yy}I_{zz}} \Delta\omega_y = 0. \quad (6.100)$$

Ecuția diferențială de ordin II ((6.100)) este de tip oscilator armonic dacă fracția din termenul al 2-lea (care are semnificația pulsației proprii a oscilatorului) este în permanență pozitivă. Aceasta se întâmplă dacă *simultan*:

$$I_{xx} > I_{yy}, \quad I_{xx} > I_{zz} \text{ (deci } I_{xx} \text{ este maxim)}$$

sau:

$$I_{xx} - I_{yy} < 0, \quad I_{xx} < I_{zz} \text{ (deci } I_{xx} \text{ este minim) .}$$

Cu alte cuvinte, o axă liberă este stabilă dacă, în raport cu ea, momentul de inerție al rigidului are o valoare extremă (minimă sau maximă).

6.10 Giroscopul. Mișcarea giroscopului în câmp gravitațional

Giroscopul reprezintă un solid rigid care poate efectua o mișcare de rotație în jurul unei axe fixe sau a unui punct fix. Axa fixă este, în cazul giroscopului simetric (variantea cea mai frecvent întâlnită în practică) o axă de simetrie ce trece prin centrul de masă. Adesea această axă se fixează în două lagăre care, la rândul lor, se atașează unei așa numite suspensii cardanice (Fig. 6.17), care îi permite giroscopului să ia orice poziție în spațiu, chiar dacă el se află în câmpul gravitațional al Pământului. Această configurație se numește giroscop liber .



Figura 6.17: O fotografie a unui giroscop montat într-o suspensie cardanică.

Giroscopul execută în cele mai multe cazuri o mișcare de rotație cu punct fix, atunci când se rotește în jurul unei axe instantanee de rotație, în condițiile atracției gravitaționale (Fig. 6.18).

Să considerăm pentru început, că axa de rotație a unui giroscop simetric de forma unui disc este coliniară cu direcția forței de greutate (Fig. 6.18a). În aceste condiții, rezultanta forțelor este nulă:

$$\vec{G} + \vec{N} = 0, \quad (6.101)$$

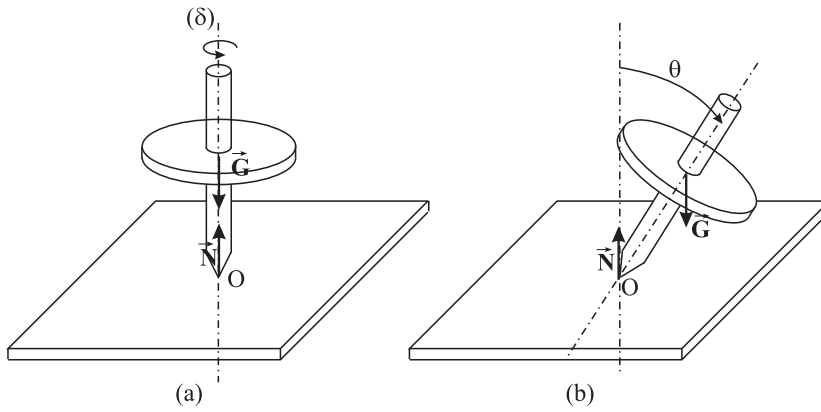


Figura 6.18: Un giroscop simetric în câmp gravitațional.

iar momentul rezultat este, de asemenea, nul, întrucât:

$$\vec{M}_G = \vec{M}_N.$$

Să aplicăm o mică perturbație care să determine, de exemplu, înclinarea axei (δ) cu un unghi θ față de verticală (Fig. 6.18b). În aceste condiții, relația dintre forțe se păstrează ($\vec{G} = -\vec{N}$), însă acum apar doar $\vec{M}_N = 0$, în timp ce $\vec{M}_G \neq 0$. Notând cu C centrul de masă și cu $\vec{r} = \vec{OC}$, vectorul de poziție al centrului de masă al giroscopului, brațul forței G este $b_G = r \sin \theta$, iar momentul lui \vec{G} în raport cu O este $M_G = mgr \sin \theta$. Ca vector:

$$\vec{M}_G = \vec{r} \times m\vec{g}, \tag{6.102}$$

\vec{M}_G este perpendicular atât pe \vec{r} cât și pe \vec{G} . Cum atât \vec{r} , cât și \vec{G} sunt vectori într-un plan vertical, rezultă că \vec{M}_G este un vector orizontal, deci $\vec{M}_G(M_{Gx}, M_{Gy}, 0)$.

Să presupunem că axa de rotație a giroscopului este "înghețată" la un moment dat în planul foii, așa cum este prezentată în Fig. 6.19. În aceste condiții $\vec{\omega}$ și $\vec{J}(t)$ sunt paraleli

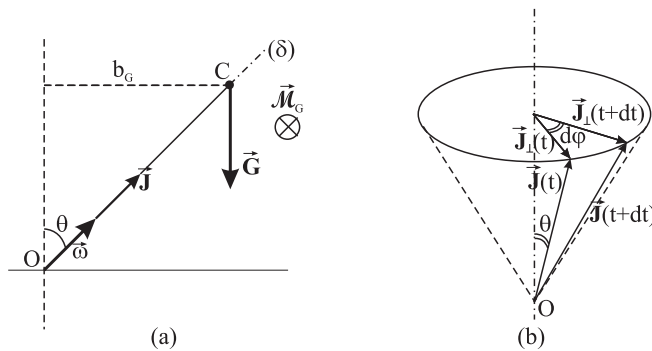


Figura 6.19: (a) Orientarea vectorilor \vec{r} , \vec{J} și \vec{M}_G ; (b) Evoluția în timp a vectorului \vec{J} .

cu axa de rotație. Această stare "înghețată" nu se poate menține, întrucât momentul \vec{M}_G

determină variația lui \vec{J} în timp:

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{\vec{J}(t+dt) - \vec{J}(t)}{dt}. \quad (6.103)$$

Variația lui \vec{J} înseamnă și reorientarea sa în spațiu, întrucât, conform (6.103):

$$\vec{J}(t+dt) = \vec{J}(t) + \vec{\mathcal{M}}dt. \quad (6.104)$$

Pe de altă parte, $\vec{J}(t)$ se consideră a fi suma:

$$\vec{J}(t) = \vec{J}_{\parallel}(t) + \vec{J}_{\perp}(t)$$

iar

$$\vec{J}(t+dt) = \vec{J}_{\parallel}(t) + \vec{J}_{\perp}(t+dt).$$

Întrucât $\vec{\mathcal{M}}_z = 0$, vectorul $d\vec{J}$ are doar componente orizontale de aceea $\vec{J}_{\parallel}(t) = \vec{J}_{\parallel}(t+dt)$, astfel încât:

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \frac{\vec{J}_{\perp}(t+dt) - \vec{J}_{\perp}(t)}{dt}.$$

Prin urmare, efectul momentului forței de greutate se traduce printr-o rotație a vârfului lui $\vec{J}(t)$ printr-un unghi $d\varphi$ în timpul dt , pe un arc de cerc de rază $J_{\perp} = J \sin \theta$. Acest efect se continuă în permanență, de aceea vârful lui \vec{J} va descrie, de fapt un cerc în plan orizontal.

Efectul sus-menționat, care se numește *precesie* a axei giroscopului apare deoarece momentul cinetic \vec{J} al giroscopului are tendința de a se "desprinde" de axa lui de rotație, devansându-i mișcarea de precesie, ca efect al momentului forței de greutate. Așa cum am arătat anterior, în măsura în care \vec{J} nu mai este paralel cu $\vec{\omega}$, intră în joc momentele forțelor centrifugale, care tind să readucă pe $\vec{\omega}$ peste \vec{J} . Așadar într-o descriere calitativă, precesia giroscopului (ca urmare a atracției gravitaționale) are loc datorită desprinderii vectorului \vec{J} de axa giroscopului și datorită efectelor combinate ale forțelor centrifuge care "urmăresc" readucerea lui $\vec{\omega}$ peste \vec{J} .

Pentru a găsi o explicație cantitativă a mișcării de precesie, vom pleca de la faptul că $\vec{\mathcal{M}}_z = 0$. Ca urmare:

$$\vec{\mathcal{M}}_z = \frac{d\vec{J}_z}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{J}_z = \text{constant}. \quad (6.105)$$

În plus, deoarece vectorii $\vec{\mathcal{M}}_G$ și \vec{J} sunt în permanență perpendiculari unul pe altul, produsul lor scalar este zero:

$$\vec{\mathcal{M}}_G \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} \cdot \vec{J} = 0. \quad (6.106)$$

Ecuția precedentă se poate scrie și sub forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(J^2) = 0 \Rightarrow |\vec{J}| = \text{const.} \quad (6.107)$$

Așadar, în timpul precesiei, atât componenta J_z , cât și J își păstrează modulul constant în timp (de aceea spunem că \vec{J} descrie suprafața laterală a unui con cu axa de simetrie axa Oz). Întrucât:

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \quad (6.108)$$

rezultă că și:

$$J_x^2 + J_y^2 = J_{xy}^2 = \text{const.} \quad (6.109)$$

cu alte cuvinte, va exista un vector $\vec{J}_{xy} = \vec{J}_\perp$ al cărui vârf descrie un cerc în plan orizontal.

Să găsim, în continuare, expresia vitezei unghiulare de precesie. Produsul scalar din ecuația (6.106) se poate scrie, având în vedere că $\mathcal{M}_z = 0$, sub forma:

$$\mathcal{M}_x J_x + \mathcal{M}_y J_y = 0, \quad (6.110)$$

sau:

$$\frac{\mathcal{M}_x}{J_y} = -\frac{\mathcal{M}_y}{J_x} = \Omega, \quad (6.111)$$

în care Ω este o mărime constantă, independentă de t . Semnificația acesteia o vom descoperi în cele ce urmează. Din (6.111) rezultă că:

$$\mathcal{M}_x = \Omega J_y \Rightarrow \frac{dJ_x}{dt} = \Omega J_y \quad (6.112)$$

și respectiv:

$$\mathcal{M}_y = -\Omega J_x \Rightarrow \frac{dJ_y}{dt} = -\Omega J_x. \quad (6.113)$$

Derivând, în raport cu timpul, ecuația (6.112) și introducând rezultatul în (6.113) vom găsi:

$$\frac{d^2 J_x}{dt^2} + \Omega^2 J_x = 0; \quad (6.114)$$

$$\frac{d^2 J_y}{dt^2} + \Omega^2 J_y = 0. \quad (6.115)$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale (de tip oscilator armonic) (6.114) și (6.115) se vor scrie, ținând cont și de ecuația (6.109) sub forma:

$$\begin{aligned} J_x &= A \sin(\Omega t + \Psi); \\ J_y &= A \cos(\Omega t + \Psi). \end{aligned} \quad (6.116)$$

Așadar Ω are semnificația vitezei unghiulare de precesie a lui \vec{J} și, implicit, a giroscopului. Având în vedere că:

$$\mathcal{M}_G = \sqrt{\mathcal{M}_x^2 + \mathcal{M}_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dJ_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dJ_y}{dt}\right)^2} \quad (6.117)$$

și ținând cont și de ecuația (6.116), rezultă imediat:

$$mgr \sin \theta = A\Omega. \quad (6.118)$$

Pe de altă parte, folosind relația (6.116), ecuația (6.109) se va scrie, folosind formula fundamentală a trigonometriei:

$$J_{xy}^2 = J^2 - J_z^2 = A^2,$$

adică $A = \sqrt{J^2 - J_z^2}$ (am ales, evident, doar soluția pozitivă, având în vedere semnificația noțiunii de amplitudine).

În aceste condiții, din ecuația (6.118) rezultă expresia vitezei unghiulare de precesie:

$$\Omega = \frac{mgr \sin \theta}{\sqrt{J^2 - J_z^2}}. \quad (6.119)$$

Constatăm că Ω este direct proporțional cu momentul forței de greutate, de aceea precesia va fi lentă atunci când înclinarea θ a axei față de verticală este mică și se va accelera odată cu creșterea lui θ .

În experimentele de laborator este convenabil să se utilizeze un giroscop care evoluează în planul orizontal ($\theta = \pi/2$), deoarece astfel este ușor de compensat momentul greutatei motorului (M) ce antrenează giroscopul, ca și al greutatei proprii a acestuia prin montarea unei contragreutăți (CG în Fig. 6.20). În aceste condiții, giroscopul este echilibrat în poziție

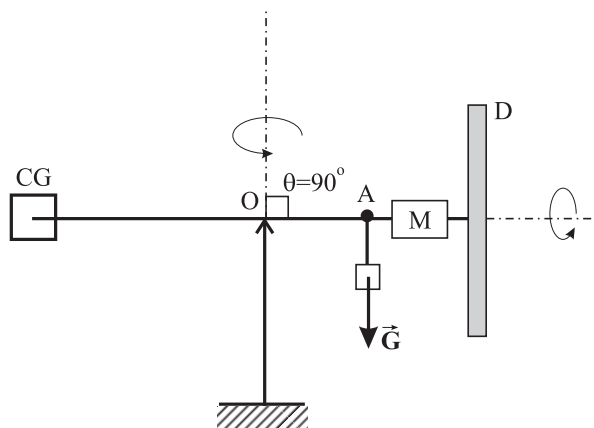


Figura 6.20: Un giroscop orizontal CG =contragreutate, M =motor electric de antrenare D =disc-giroscop, G =greutate externă.

orizontală. Apariția precesiei poate fi provocată de agățarea unei greutatei suplimentare, G , al cărei braț în raport cu O este $b = r = OA$. În acest caz ecuația (6.119) se va scrie:

$$\Omega = \frac{mgr}{J}, \quad (6.120)$$

întrucât $J_z = 0$. În acest caz, pânza de con descrisă de vectorul \vec{J} în exemplul analizat anterior este degenerată într-un plan.

Trebuie menționat că o astfel de tratare simplificată a modelului de giroscop ignoră o altă mișcare a giroscopului, anume aceea în care axa giroscopului execută și o rotație în plan vertical, ($\theta = \theta(t)$), denumită mișcare de *nutație*. Pentru a identifica cine determină nutația să mai examinăm încă o dată precesia. Caracteristica aparent stranie a giroscopului, așa-numitul efect giroscopic, anume apariția unei *rotații în plan orizontal* ca urmare al momentului unei forțe *verticale*, nu este, de fapt, stranie! Este normal, așa cum am văzut mai înainte ca variația lui \vec{J} , adică $d\vec{J}$ să apară într-un plan orizontal, deoarece $d\vec{J}$ și \vec{M}_G sunt legați prin relația:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt}. \quad (6.121)$$

Acest comportament apare straniu, dacă *forțăm* o analogie cu mișcarea de translație, acolo unde efectul (deplasarea accelerată) apare ca fiind coliniară cu forța exterioară. Legea care guvernează acolo mișcarea este însă $\vec{F} = m\vec{a}$, și nu teorema variației momentului cinetic (6.121).

Efectul giroscopic apare ca foarte important în situațiile în care în componența unor mașini există părți în rotație care se comportă întocmai ca un giroscop. Un cuplu de forțe externe care apare, de exemplu, atunci când se dorește virarea unui vapor într-un plan direcție orizontal face ca axa elicei acestuia să răspundă cu o rotație în plan vertical, situație care poate conduce la efecte periculoase dacă nu este contrabalansată. Efectul de giroscop poate fi constatat intuitiv dacă luăm în mâini "haltera" reprezentată de giroscopul din Fig. 6.20. Constatăm că, dacă încercăm să rotim axa giroscopului în plan orizontal, giroscopul ne rotește brațele în plan vertical!

Revenind acum la mișcarea de nutație efectuată de giroscop în plan vertical, rezultă că ea apare atunci când asupra giroscopului acționează un cuplu de forțe, ambele plasate *în plan orizontal*. De regulă, în experimentele de laborator, acestea sunt forțele de frecare la axul giroscopului în dispozitivul de susținere. Se poate ușor constata că, în prezența frecării, prin adăugarea greutății G în A , giroscopul începe mișcarea de precesie, însoțită de o înclinare lentă a axului său în plan vertical ($\dot{\theta} \neq 0$), adică de nutație.

În situații mai generale, asupra cărora nu vom insista aici, e posibil ca și nutația să fie o mișcare periodică. Un astfel de exemplu îl constituie chiar Pământul, care se comportă ca un giroscop uriaș. Precesia Pământului, datorată acțiunii combinate a Soarelui și Lunii face ca axa acestuia să se rotească pe suprafața laterală a unui con cu deschiderea de $23,5^\circ$, o rotație completă durând 26000 de ani. Acest fapt face ca, peste 14000 de ani, o nouă stea (Vega) să devină "Steaua polară" în locul stelei Polaris.

6.11 Probleme

1. Se consideră o moleculă de oxigen ce se rotește în planul xOy în jurul axei perpendiculare Oz , ce trece prin centrul său. Masa atomului de oxigen este $2,66 \times 10^{-26}$ kg iar, la temperatura camerei, distanța dintre cei doi atomi, considerați punctiformi, este $1,21 \times 10^{-10}$ m.
 - (a) Calculați valoarea momentului de inerție al moleculei în raport cu axa de rotație;

- (b) Considerând că viteza de rotație în jurul acestei axe este $4,6 \cdot 10^{12}$ rad/s, determinați energia cinetică de rotație a moleculei;
- (c) Demonstrați că, în cazul în care masele celor doi atomi nu ar fi egale, momentul de inerție în raport cu această axă are valoare maximă doar când această axă trece prin centrul de masă.

Răspuns: (a) $1,95 \times 10^{-46}$ kg m²; (b) $2,06 \times 10^{-21}$ J.

2. Determinați momentul de inerție al unui ansamblu de 3 bare identice, de masă m și lungime L , reciproc perpendiculare, care se rotesc în jurul unei axe paralele cu una din bare situată la capătul alteia (Fig. 6.21).

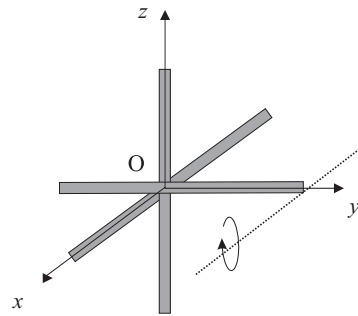


Figura 6.21: Pentru problema 4

Răspuns: $\frac{11mL^2}{12}$.

3. Densitatea Pământului variază cu distanța până la centrul său conform relației:

$$\rho = \rho_0 \left(14,2 - 11,6 \frac{r}{R} \right) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

unde R este raza Pământului. Arătați că momentul de inerție în cazul rotației în jurul unei axe ce trece prin centru său este $I = 0,33MR^2$, M fiind masa Pământului.

4. Două corpuri de forma unui disc și a unui inel, de aceeași masă și rază, sunt așezate unul lângă altul la înălțimea h , în punctul de plecare din vârful unui plan înclinat. Care dintre aceste corpuri va ajunge primul la baza planului, presupunând că ele se rostogolesc fără să alunece?

Răspuns: discul.

5. Pe un plan înclinat de unghi α se rostogolește în jos un cilindru de masă m , rază R și moment de inerție I . Să se afle, în cazul rostogolirii fără alunecare, respectiv în cea cu alunecare, următoarele mărimi:

- (a) forța de frecare și coeficientul de alunecare minim necesar ca alunecarea să nu apară;
- (b) accelerația centrului de masă;
- (c) accelerația unghiulară;

(d) distanța de la axa instantanee de rotație până la centrul de masă a corpului.

Răspuns: (a) $\mu \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+mR^2/I}$; (b) $a = \frac{g \sin \alpha}{1+I/mR^2}$;
 $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$; (c) $\varepsilon = \frac{a}{R}$, $\varepsilon = \mu mgR/I \cos \alpha$;
 (d) $d = \frac{a}{\varepsilon}$; $d = I(\operatorname{tg} \alpha - \mu)/(\mu mR)$.

6. Suprafața unei stele neutronice vibrează ușor, iar momentele de inerție principale sunt funcții armonice de timp, conform relației:

$$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2(1 + \varepsilon \cos \omega t)$$

$$I_{xx} = \frac{2}{5}mr^2(1 - \frac{\varepsilon}{2} \cos \omega t), \quad \varepsilon \ll 1$$

Steaua se rotește cu viteza unghiulară $\Omega(t)$.

(a) Arătați că proiecția pe axa Oz a lui $\Omega(t)$, adică Ω_z , rămâne constantă.

(b) Demonstrați că $\vec{\Omega}(t)$ execută o mișcare de nutație în jurul axei Oz . Determinați frecvența unghiulară a acesteia ($\Omega_z > \omega$).

Răspuns: (a) $\Omega_z = \frac{\Omega_{0z}}{1+\varepsilon \cos \omega t} \approx \text{const.}$; (b) $\omega_n = \frac{3}{2}\varepsilon\Omega_z \cos \omega t$.

Solidul deformabil

7.1 Introducere

Forțele de interacțiune dintre particulele constituente ale unui mediu solid au, în realitate, valori finite, în așa fel încât arareori corpurile solide pot fi considerate *absolut rigide*. Solidele reale, în marea lor majoritate, sunt *deformabile*. Când forțe interne sau externe acționează asupra particulelor componente ale corpului solid, apar astfel deformații, corpul respectiv aflându-se într-o stare de *comprimare* sau *întindere*. Dacă, după înlăturarea acțiunii forțelor sus-menționate, solidul revine la forma inițială, se spune că acea deformație a fost *reversibilă* sau *elastică*.

7.2 Deformația de alungire/compresiune

Să presupunem ca supunem un corp solid unei forțe \vec{F} (Fig. 7.1) orientată arbitrar față de

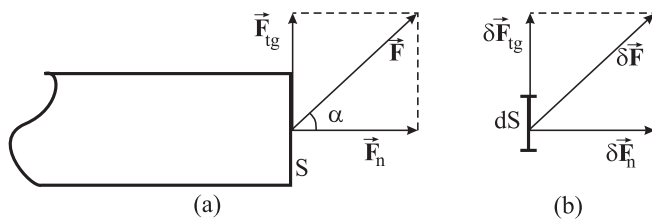


Figura 7.1: (a) O forță externă \vec{F} acționează asupra secțiunii transversale S , a epruvetei; (b) Un detaliu, referitor la secțiunea dS

o secțiune transversală prin acesta¹

Raportul F/S se numește *efort unitar mediu*, iar raportul dF/dS se numește *efort unitar*

¹Corpul de studiat se numește, în acest caz, *epruvetă*.

(sau stress).

$$\Sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (7.1)$$

Așa cum se constată și din Fig. 7.2, corespunzător celor două componente ale forței, vom avea un efort unitar normal:

$$\sigma = \frac{dF_n}{dS} \quad (7.2)$$

și un efort unitar tangențial (sau de forfecare):

$$\tau = \frac{dF_{tg}}{dS}$$

Referitor la definiția efortului unitar normal, să amintim că el este denumit *tensiune*, dacă forța dF este orientată în așa fel încât determină o deformație de alungire². Dacă forța deformatoare determină un efort de *reducere* a dimensiunilor corpului, ea se numește *compresiune*. În Fig. 7.2 sunt prezentate cele 3 tipuri de efort unitar.

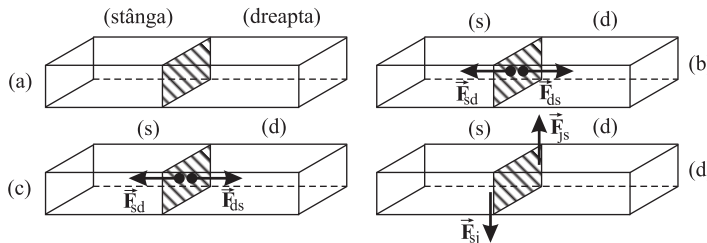


Figura 7.2: (a) O imagine a unei secțiuni într-o epruvetă paralelipedică (b) efort de tensiune; (c) efort de compresiune; (d) efort de forfecare. Am notat cu F_{ds} și F_{sd} forțele ce acționează stânga-dreapta și invers; F_{js} și F_{sj} sunt forțele care (pe desen) acționează sus-jos, respectiv jos-sus

Prezența unei forțe, respectiv a unui efort reprezintă o cauză. Efectul acesteia în termenii deformării se caracterizează cantitativ prin mărimea fizică denumită *alungire/comprimare relativă*. Dacă efortul unitar este de alungire, σ , atunci efectul său:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.3)$$

se numește *alungire relativă*. Invers, dacă efortul este de compresiune, vorbim despre o comprimare relativă (evident, în acest caz, $\varepsilon < 0$, deoarece $l < l_0$). În sfârșit, dacă efortul este de forfecare, vorbim despre o altă mărime, notată cu γ :

$$\gamma = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (7.4)$$

²A nu se confunda tensiunea σ care are semnificația *densității superficiale* de forță cu *forța de tensiune*, notată cu \vec{F}_n în Fig. 7.1 sau cu \vec{T} în multe cazuri.

unde Δd este distanța pe care se produce alunecarea porțiunii dintr-o parte a suprafeței de forfecare, iar d_0 – o dimensiune caracteristică, despre care vom vorbi în detaliu mai jos.

Într-o relație matematică, efortul unitar și alungirea/comprimarea relativă se exprimă sub forma:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (7.5)$$

în care constanta de proporționalitate E se numește *modul de elasticitate sau modulul lui Young*. Întrucât ε este o mărime adimensională, unitatea de măsură în SI a lui E va fi aceeași cu cea a lui σ și anume N/m^2 . Relația (7.5) exprimă legea lui Hooke.

Observație Relația (7.5) este respectată doar în cazul *micilor deformații* ale solidelor, mai precis în situația în care deformația este reversibilă³. Dacă urmărim o situație în care forțele deformatoare depășesc limita de proporționalitate valabilă în cazul relației (7.5), obținem o dependență de forma prezentată în Fig. 7.3.

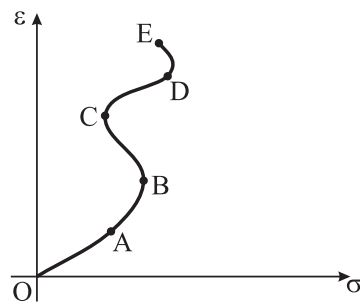


Figura 7.3: Dependența $\varepsilon(\sigma)$ pentru o epruvetă metalică.

Intervalul BC se numește regiune *înmuiere sau de curgere* întrucât în această regiune, deformația se produce printr-o curgere foarte vâscoasă a unor straturi ale solidului pe lângă altele. Scăderea lui σ în porțiunea BC se datorește, în principal, scăderii secțiunii transversale a epruvetei. Intervalul CD se numește regiune de *ecruisaj* și corespunde unui proces invers celui petrecut în porțiunea BC , mai precis unei întăriri a materialului, care într-o astfel de deformare devine mult mai rigid decât în fazele inițiale ale deformării. După depășirea punctului D , are loc, din nou o alungire rapidă a materialului, care în final, se rupe (punctul E).

Observații:

1. Graficul prezentat în Fig. 7.3 se întâlnește, de regulă, în cazul epruvetelor metalice. În multe situații, însă, el este mai simplu, anumite porțiuni lipsind. Materialele casante sau fragile ajung să se rupă, înainte de a ajunge în regiunea de înmuiere.

2. Deformațiile plastice din intervalul BC sunt foarte importante în procesele de prelucrare la rece din metalurgie (laminare, trefilare, extrudare, forjare etc.)

3. Odată cu creșterea lungimii, chiar în cazul deformațiilor elastice din zona OA , are loc o modificare a secțiunii transversale a epruvetei. Sa considerăm (Fig. 7.4) o epruvetă cu secțiune circulară de diametru inițial b_0 .

³Cu toate că, aparent, legea lui Hooke este un caz foarte particular – fiind vorba doar de *micile deformații*, în realitate numărul situațiilor în care această lege rămâne valabilă este foarte mare. Printre exemplele cele mai importante putem aminti aici deformațiile din domeniul undelor elastice liniare în medii solide.

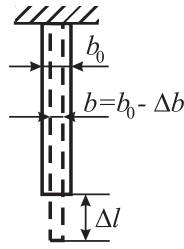


Figura 7.4: Modificarea secțiunii unei epruvete prin alungire

În urma alungirii cu cantitatea Δl , diametrul epruvetei scade cu cantitatea $\Delta b = b - b_0$ ($\Delta b < 0$). Definim raportul $\frac{\Delta b}{b_0}$ ca o modificare relativă a diametrului epruvetei. Acest raport este direct proporțional cu alungirea relativă:

$$\frac{\Delta b}{b_0} = \mu \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.6)$$

Constanta de proporționalitate, μ din ecuația (7.6) se numește coeficientul lui Poisson și el are o valoare practic constantă în cazul metalelor și aliajelor ($\mu \approx 0,4$).

Cu titlu de exercițiu, propunem cititorului să verifice că, în urma alungirii, volumul epruvetei crește (vezi și problemele propuse la acest capitol).

7.3 Deformația de forfecare

Să considerăm un corp solid deformabil de formă paralelipedică (Fig. 7.5) fixat la partea inferioară, AD de un suport rigid. Să aplicăm o forță tangențială, \vec{F} asupra suprafeței BC .

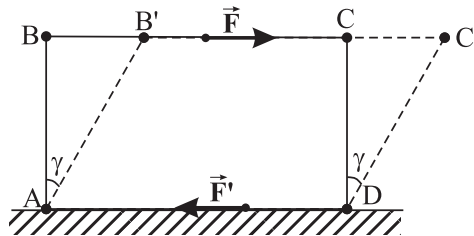


Figura 7.5: Deformația de forfecare a unui corp paralelipedic

Ca urmare a deformației (forfecării), suprafața BC , asupra careia se manifestă forța \vec{F} se va deplasa, ocupând, în final, poziția $B'C'$. Dacă notăm $AB = l_0$, iar deformația $BB' = CC'$ cu Δl , pentru deformații mici putem scrie:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon \quad (7.7)$$

Efortul unitar tangențial este:

$$\tau = \frac{F}{S}, \quad (7.8)$$

astfel încât, o relație de tip Hooke între efortul unitar și deformația relativă se va scrie sub forma:

$$\tau = G\varepsilon \quad (7.9)$$

În relația anterioară, constanta de proporționalitate G se numește *modul de forfecare* al materialului. Evident, unitatea de măsură a lui G în SI este N/m^2 , ca și în cazul modulului de elasticitate a lui Young. De altfel, pentru marea majoritate a metalelor și aliajelor, modulul de forfecare reprezintă aproximativ 40% din valoarea lui E :

$$G \approx 0,4E$$

Observație

1. Deformația de forfecare liniară apare, așa cum vom vedea în capitolele următoare, în mediile solide în care se propagă unde transversale. Ea apare, de asemenea în șuruburi și nituri care servesc ca dispozitive de asamblare a unor plăci plane adiacente, atunci când acestea tind să se deplasează în sensuri contrare, paralel unele față de altele. Deformația de forfecare apare, de asemenea, în cazul foarfecelor care obligă două părți ale unei foi să se deplaseze în sensuri contrarii, față de o suprafață de tăiere.

7.4 Deformația de torsiune (răsucire)

Un caz particular al deformației de forfecare este cea de torsiune, în care alunecarea suprafețelor are loc în cadrul unei simetrii cilindrice. Să considerăm un eșantion de forma unei bare sau fir, de diametru AB (Fig. 7.6), fixată rigid de un suport la partea inferioară.

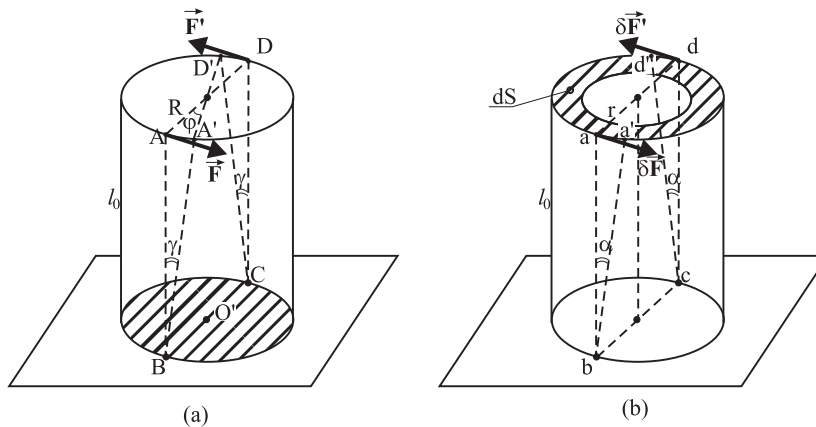


Figura 7.6: (a) Deformația de torsiune a unei bare (fir) (b) Deformația de torsiune a unei pături cilindrice.

Dacă un cuplu de forțe $\vec{F}\vec{F}'$ acționează la capătul inferior al barei, aceasta va determina o rotație a capătului superior al acesteia, punctul A ajungând în A' , iar D în D' . Așadar, ca

urmare a acțiunii cuplului de forțe deformatoare FF' , diametrul AD se rotește (ca și întreaga secțiune superioară a firului) cu un unghi φ :

$$\varphi = \frac{AA'}{R} = \frac{DD'}{R} \quad (7.10)$$

Să considerăm acum o pătură sferică de rază r ($0 < r < R$) și de grosime dr (Fig. 7.6b). Asupra acesteia acționează un cuplu de forțe $\delta\vec{F}$ și $\delta\vec{F}'$ care este de atâtea ori mai mic decât cuplul forțelor $\vec{F} - \vec{F}'$, de câte ori suprafața $dS = 2\pi r dr$ este mai mică decât suprafața totală $S = \pi R^2$.

Aplicând legea lui Hooke pentru deformația de torsiune:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{aa'}{l_0} = \frac{rd\varphi}{l_0}. \quad (7.11)$$

În relația anterioară am notat cu $d\varphi$ unghiul cu care se rotește fața superioară a firului. Efortul unitar tangențial este:

$$\tau = \frac{2\delta F}{2\pi r dr} = \frac{\delta F}{\pi r dr} \quad (7.12)$$

Pe de altă parte, conform ecuației (7.9):

$$\frac{\delta F}{\pi r dr} = G \frac{r\varphi}{l_0} \quad (7.13)$$

Ca urmare:

$$\delta F = \frac{G\pi r^2 \varphi dr}{l_0}$$

Momentul cuplului de forțe va fi:

$$\delta\mathcal{M} = \frac{G\pi r^3 dr \varphi}{l_0} \quad (7.14)$$

Momentul total al forțelor $\vec{F} - \vec{F}'$ ce acționează asupra barei va fi:

$$\mathcal{M} = \int \delta\mathcal{M} = \frac{G\pi\varphi}{l_0} \int_0^R r^3 dr \quad (7.15)$$

adică

$$\mathcal{M} = G \frac{\pi\varphi}{l_0} \frac{R^4}{4} \quad (7.16)$$

Din ecuația (7.16) constatăm că *momentul de torsiune*, \mathcal{M} este direct proporțional cu deformația unghiulară, φ , a barei sau firului:

$$\mathcal{M} = C\varphi. \quad (7.17)$$

Aici constanta de proporționalitate:

$$C = \frac{\pi GR^4}{4l_0} \quad (7.18)$$

se numește *constanta de torsiune* a barei (sau firului).

Se constată că constanta de torsiune este direct proporțională cu R^4 și invers proporțională cu lungimea l_0 a barei/firului de torsiune. Așa cum vom vedea ulterior în studiul fizicii, există un număr însemnat de dispozitive de măsură a forțelor sau cuplurilor de forțe, bazate pe deformația unor fire de torsiune. De altfel, *balanța de torsiune*, amintită în Partea I a prezentului curs ca dinamometru pentru măsurarea forțelor de atracție gravitațională de către Henry Cavendish este un bun exemplu în acest sens. Sensibilitatea unei balanțe de torsiune se reglează *grossier* prin modificarea diametrului firului⁴, iar *fin* prin ajustarea lungimii firului. Alte aplicații ale balanței de torsiune le vom regăsi în electricitate (la construcția galvanometrelor) magnetism (la construcția magnetometrelor de torsiune) ș.a.m.d.

7.5 Deformația de încovoiere (flexiune)

Acest tip de deformație apare atunci când un capăt al unei bare este fixat rigid, iar asupra celuilalt se acționează cu o forță (Fig. 7.7) care acționează perpendicular pe aceasta.

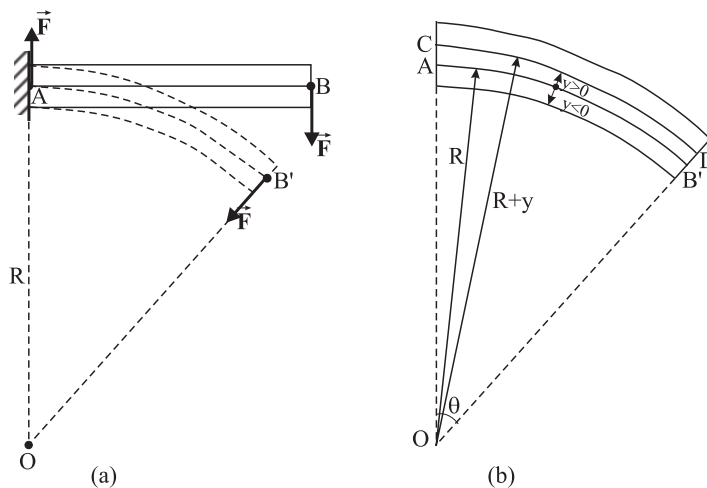


Figura 7.7: (a) deformația de încovoiere; (b) un detaliu pentru calcul

Ca și în cazurile anterioare, deformarea barei încetează în momentul în care cuplul exercitat de forța externă \vec{F} (și de perechea ei \vec{F}' , din zona de încastrare din stânga) este anulat în efect de un cuplu elastic dezvoltat în bara însăși. Ne putem imagina că bara este formată, inițial, din straturi paralelepipedice paralele suprapuse, de grosimi infinitizimale. Ca urmare a încovoierei, deformațiile acestor straturi sunt diferențiate, în funcție de locația lor: straturile din interiorul arcului de cerc AB' astfel format vor fi comprimate, cele din exteriorul acestui arc de cerc

⁴O dublare a diametrului firului de torsiune determină o scădere a sensibilității balanței de $2^4 = 16$ ori!

vor fi alungite, iar stratul AB' va avea aceeași lungime, ca și în starea nedeformată. De aceea stratul AB sau AB' se numește și *strat neutru* al barei.

Alungirea stratului CD aflat la distanța y de stratul neutru (Fig. 7.7b) va fi:

$$\begin{aligned}\Delta l &= (R + y)\theta - R\theta \\ \Delta l &= \theta y\end{aligned}$$

Alungirea relativă a aceluiași strat va fi:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\theta y}{R\theta} = \frac{y}{R}$$

Aplicând legea lui Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{R}y \quad (7.19)$$

cu alte cuvinte, efortul de alungire/comprimare crește direct proporțional cu distanța până la stratul limită. Constatăm, așadar, că efortul unitar va fi maxim la periferia externă a barei, zero la nivelul stratului neutru ($y = 0$) și negativ în zona cuprinsă între stratul neutru și periferia dinspre centrul de curbură, O .

Faptul că efortul de compresiune, respectiv alungire, este minim în vecinătatea stratului neutru permite ca, în cazul grinzilor de construcții sau șinelor de cale ferată, acolo unde apar deformații de încovoiere, secțiunea transversală în această zonă să poată fi aleasă mai redusă, așa cum este reprezentat în Fig. 7.8.

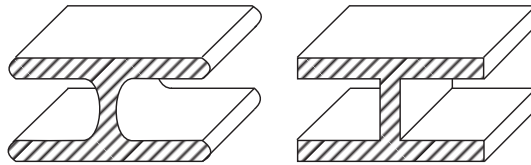


Figura 7.8: Secțiuni transversale printr-o șină de cale ferată și printr-o grindă portantă folosită în construcții.

Se realizează, prin folosirea unor astfel de grinzi, în structură celulară, elemente constructive flexibile și foarte rezistente (aripi de avion, macarale, poduri, hale, etc.)

7.6 Probleme

1. un baston din cauciuc cu lungimea $L = 40$ cm se rotește uniform în plan orizontal în jurul unui capăt, cu viteza unghiulară $\omega = 600$ rot/min. Densitatea cauciucului este $\rho = 1400$ Kg/m³ iar modulul său de elasticitate $E = 10^5$ N/m². Determinați alungirea bastonului determinată de mișcarea de rotație neglijând efectele gravitației.

Răspuns: $\Delta l = \frac{1}{3E}\rho\omega^2 L^3 \approx 5,6$ cm.

2. Un fir de lungime L , modul de elasticitate E și secțiune S , este alungit elastic cu ΔL .

- (a) determinați constanta elastică k ;
(b) calculați lucrul mecanic necesar pentru o astfel de alungire.

Răspuns: (a) $k = \frac{ES}{L}$; (b) $L = \frac{1}{2}ES\frac{\Delta L^2}{L}$.

3. Un cablu de oțel ($E = 2 \times 10^{11} \text{N/m}^2$) cu secțiunea $3,00 \text{cm}^2$ are densitatea liniară de masă $2,4 \text{Kg/m}$. Dacă se folosesc 500m de cablu pentru o escaladă montană și cablul se atârnă vertical pe un perete de stâncă, care este alungirea cablului sub acțiunea propriei greutate?

Răspuns: $\Delta L = \frac{1}{2} \frac{\lambda g L^2}{EA} = 4,9 \text{cm}$.

4. (a) Estimați forța cu care un maestru karate trebuie să lovească o masă de lemn, dacă viteza mâinii în momentul impactului este de 10m/s și scade până la $1,00 \text{m/s}$ în intervalul de $0,002 \text{s}$ cât durează impactul. Masa mâinii se consideră 1Kg . (b) Cât este tensiunea de forfecare ce apare în masa de lemn de pin ce are grosimea de $1,00 \text{cm}$ și o lățime de 10cm . (c) Cunoscând că tensiunea maximă suportată de masa de pin este de $3,60 \times 10^6 \text{N/m}^2$ va avea lovitura efect de rupere?

Răspuns: (a) $F = m \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = 4500 \text{N}$; (b) $\frac{F}{S} = 4,50 \times 10^6 \text{N/m}^2$; (c) da.

Fluide

În capitolul 2 am examinat câteva dintre caracteristicile mișcării unui model idealizat de corp cu distribuție continuă de masă – solidul rigid. În continuare, ne vom ocupa cu studiul echilibrului mecanic și al mișcării unui alt sistem fizic – model idealizat cu distribuție continuă – *fluidul*. Un fluid constituie extrema opusă solidului rigid, în sensul că el este un corp *absolut deformabil*. Dacă, în cazul solidului rigid deformațiile determinate de forțe interioare sau exterioare sunt nule, indiferent de mărimea acestor forțe, în cazul corpurilor fluide (lichide sau gaze), forțe aparent neînsemnate pot produce deformații considerabile. Acest comportament este datorat unor interacțiuni mult mai slabe între atomii sau moleculele ce alcătuiesc fluidul.

În cazul lichidelor, forțele intermoleculare sunt de *rază scurtă*, atracția manifestându-se doar între moleculele vecine de ordinul I. În cazul gazelor, forțele intermoleculare sunt și mai slabe, datorită distanțelor mari dintre molecule sau atomi. Faptul că între moleculele de gaz există distanțe relativ mari (în comparație cu mediile condensate – lichide și solide) face ca studiul gazele să fie abordat, pe de o parte sub forma de model de fluid (în cazul microscopic), pe de altă parte, sub forma de model cinetic (în cazul microscopic) în care o particulă generică este tratată în mod individual, atribuindu-i-se caracteristici fizice statistice. O astfel de abordare în cadrul teoriei cinetico-moleculare se întâlnește, de exemplu, în studiul gazului ideal.

Criteriul după care un corp real poate fi tratat în modelul de fluid sau în modelul cinetic îl reprezintă relația dintre dimensiunea caracteristică a volumului elementar al fluidului și distanța medie parcursă între două ciocniri succesive. Evident, în modelul de fluid această distanță medie este mult mai mică decât orice dimensiune caracteristică a elementului de volum.

Faptul că un fluid reprezintă un corp absolut deformabil face ca acesta să nu aibă formă proprie (iar, în cazul gazului, nici volum propriu). În cadrul modelului de fluid se operează cu mărimi fizice macroscopice, cum sunt: temperatura, presiunea, concentrația de particule, densitatea etc., mărimi care depind, în general, de timp și de poziția în spațiu (adică de coordonatele x, y, z).

Forțele interne dintre particulele constituente ale fluidelor se numesc *forțe de coeziune*. Acestea au valori atât de mari încât, de exemplu, în cazul lichidelor, ele determină o stare de

comprimare permanentă. Presiunile interne pot avea valori de ordinul sutelor sau miilor de atmosfere, astfel încât doar forțe externe foarte mari pot produce efecte de comprimare/dilatate comparabile. De aceea, lichidele sunt considerate, practic, incompresibile. În Fig. 8.1 sunt reprezentate, (mărite din motiv de vizibilitate) două tipuri de molecule de lichid:

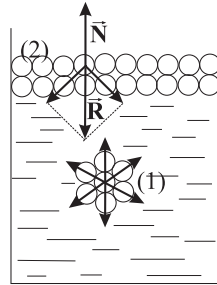


Figura 8.1: Forțele intermoleculare din interiorul lichidului (1) și din stratul superficial (2).

1. cele din volumul lichidului, care rămân în echilibru indiferent, deoarece rezultanta forțelor de atracție exercitate de moleculele vecine este nulă;
2. molecule din stratul superficial (reprezentate la scară mult mai mare), care sunt atrase doar de moleculele din stratul inferior lor (concentrația moleculelor de gaz de deasupra suprafeței libere este practic nulă, în comparație cu moleculele din acel strat inferior).

Rezultanta forțelor de atracție “resimțită” de fiecare moleculă din stratul superficial va fi îndreptată (din motive de simetrie) perpendicular pe suprafața liberă a lichidului.

Forțele de interacțiune dintre moleculele lichidului și pereții vasului în care acestea se găsesc se numesc *forțe de adeziune*. Ele sunt responsabile de modificarea suprafeței libere a lichidelor, care – în regiunea de contact cu solidul – se abate de la forma plană, luând forma de menisc (Fig. 8.2). Din compunerea forțelor de coeziune și adeziune ia naștere o rezultantă, \vec{R} , anulată

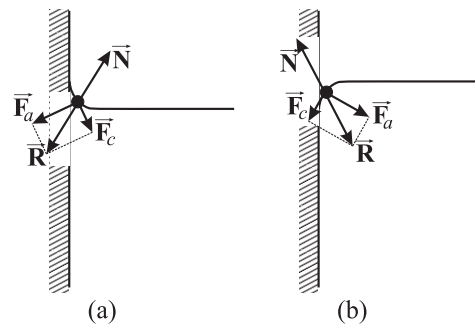


Figura 8.2: (a) Menisc concav (forțe de adeziune de natură atractivă) (b) Menisc convex (forțe de adeziune de natură repulsivă).

în efect de reacțiunea normală, \vec{N} , datorată lichidului. La echilibru,

$$\vec{R} + \vec{N} = 0, \quad (8.1)$$

iar forma meniscului este concavă în cazul în care forțele de adeziune sunt de natură atractivă, sau convexă în cazul în care forțele de adeziune sunt de natură repulsivă. În cazul (a), se spune că lichidul udă vasul, în cazul (b) că acesta nu udă vasul¹.

Vom examina pe scurt, câteva legi care guvernează echilibrul și, respectiv, curgerea fluidelor în cadrul a două secțiuni: statica fluidelor (denumită și hidrostatică) și dinamica fluidelor (denumită și hidrodinamică)².

8.1 Statica fluidelor. Ecuația fundamentală a hidrostatiei

Sa considerăm (Fig.8.3) un volum elementar, dV , în coordonate carteziene, în interiorul unui fluid aflat în repaus. Asupra acestuia acționează două tipuri de forțe:

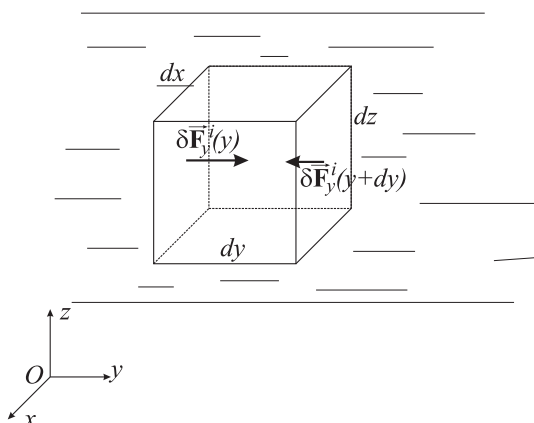


Figura 8.3: Forțele interne ce acționează asupra unui volum elementar $dV = dxdydz$.

- interne – datorate interacțiunii unei particule de fluid cu restul fluidului ce înconjoară pe dV ;
- externe – datorate câmpului gravitațional în care fluidul, inclusiv elementul de volum dV se găsesc în permanență³.

Notând cu $\delta\vec{F}^{(i)}$ și, respectiv $\delta\vec{F}^{(e)}$ rezultantele forțelor interne și externe care acționează asupra lui dV , condiția de echilibru a fluidului (și implicit a lui dV) se va scrie:

$$\delta\vec{F}^{(i)} + \delta\vec{F}^{(e)} = 0. \quad (8.2)$$

¹Fenomenele la interfața lichid-solid au o importanță practică considerabilă în natură și tehnică, ele fiind responsabile de ascensiunea capilară a apei în plante sau de trecerea lichidelor prin membrane, dar și în multe alte exemple ale căror prezentare depășește spațiul ce poate fi alocat în această carte.

²Prefixul *hidro-* din aceste denumiri nu trebuie înțeles *ad literam*, teoria pe care o vom examina referindu-se nu doar la cazul apei, ci a oricărui alt lichid.

³În unele cazuri, fluidele se pot găsi și sub acțiunea unor forțe externe, altele decât cele gravitaționale.

Dacă ținem cont că:

$$\begin{aligned}\delta\vec{F}^{(i)} &= \delta F_x^{(i)}\hat{x} + \delta F_y^{(i)}\hat{y} + \delta F_z^{(i)}\hat{z}; \\ \delta\vec{F}^{(e)} &= \delta F_x^{(e)}\hat{x} + \delta F_y^{(e)}\hat{y} + \delta F_z^{(e)}\hat{z},\end{aligned}$$

atunci relația (8.2) este echivalentă cu trei ecuații scalare:

$$\begin{aligned}\delta F_x^{(i)} + \delta F_x^{(e)} &= 0; \\ \delta F_y^{(i)} + \delta F_y^{(e)} &= 0; \\ \delta F_z^{(i)} + \delta F_z^{(e)} &= 0.\end{aligned}$$

Să examinăm consecințele acestor relații, luând ca exemplu direcția Oy care este cea mai vizibilă în Fig. 8.3. Fața din stânga a lui dV are coordonata y , cea din dreapta ($y + dy$). Forțele interne ce acționează în acest caz sunt $\delta F_y(y)$ și $\delta F_y(y + dy)$. Notând cu p presiunea exercitată de o forță asupra unei suprafețe date, atunci vom avea, de exemplu:

$$p(y) = \frac{\delta F_y^{(i)}(y)}{dx dz} \quad \text{și} \quad p(y + dy) = \frac{\delta F_y^{(i)}(y + dy)}{dx dz}. \quad (8.3)$$

Să observăm, pentru moment, că *presiunea este o mărime scalară*. Ca urmare, rezultanta forțelor interne de-a lungul axei Oy va fi:

$$\delta F_y^{(i)} = \delta F_y^{(i)}(y) - \delta F_y^{(i)}(y + dy) = [p(y) - p(y + dy)] dx dz. \quad (8.4)$$

Dezvoltând în serie Taylor termenul $p(y + dy)$ și neglijând termenii de ordin superior:

$$p(y + dy) = p(y) + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \dots \quad (8.5)$$

relația (8.4) devine:

$$\delta F_y^{(i)} = -\frac{\partial p}{\partial y} dy dx dz = -\frac{\partial p}{\partial y} dV. \quad (8.6)$$

Relații similare vom găsi și pentru direcțiile Ox și Oz :

$$\delta F_x^{(i)} = -\frac{\partial p}{\partial x} dV; \quad \delta F_z^{(i)} = -\frac{\partial p}{\partial z} dV. \quad (8.7)$$

Introducând ecuațiile (8.6) și (8.7) în ecuația (8.3) vom găsi:

$$\delta\vec{F}^{(i)} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) dV = -\text{grad} p dV. \quad (8.8)$$

Având în vedere că și forța exterioară, $\delta\vec{F}^{(e)}$ se poate scrie ca gradientul energiei potențiale gravitaționale:

$$\delta\vec{F}^{(e)} = -\text{grad}(\delta E_{pg}), \quad (8.9)$$

atunci ecuația (8.2) se poate scrie și sub forma:

$$-\text{grad } p \, dV - \text{grad } (\delta E_{pg}) = 0, \quad (8.10)$$

sau:

$$\text{grad } p + \frac{1}{dV} \text{grad } (\delta E_{pg}) = 0. \quad (8.11)$$

Cum potențialul gravitațional, V_g , în locul în care se găsește particula de fluid se poate exprima în funcție de E_{pg} prin relația:

$$V_g = \frac{\delta(E_{pg})}{\rho dV}, \quad (8.12)$$

rezultă că, de fapt ecuația (8.11) se poate scrie și sub forma:

$$\text{grad } p + \rho \text{grad } V_g = 0, \quad (8.13)$$

sau:

$$\nabla p + \rho \nabla V_g = 0. \quad (8.14)$$

Ecuațiile (8.13) și (8.14) exprimă condiția de echilibru static al fluidului. Ea se mai numește și *ecuația fundamentală a hidrostatiei*.

În mod evident, elementul de volum poate avea o formă diferită decât cea paralelipipedică. Să luăm în considerare un element de volum delimitat de cinci suprafețe dreptunghiulare, așa cum este reprezentat într-o imagine bidimensională în Fig. 8.4. Dacă ținem cont că forțele de

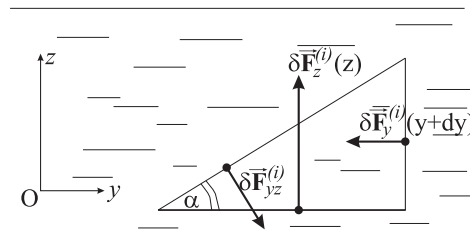


Figura 8.4: O imagine bidimensională a unui element de volum împreună cu forțele de presiune ce se manifestă asupra fețelor acestuia.

natură gravitațională au doar componentă de-a lungul lui Oz , condiția de echilibru a lui dV în câmpul extern este:

$$\begin{aligned} \delta F_{yz}^{(i)} \sin \alpha - \delta F_y^{(i)}(y + dy) &= 0, \\ -\delta F_{yz}^{(i)} \cos \alpha + \delta F_z^{(i)}(z) - \delta G &= 0. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Am avut în vedere că rezultanta forțelor ce acționează după o direcție Ox , perpendiculară pe planul foii, este zero. În relația (8.15b), greutatea elementului de volum dV este:

$$\delta G = \frac{1}{2} \rho dy dz dx \cdot g \quad (8.16)$$

ρ fiind densitatea fluidului.

Întrucât mărimile suprafețelor asupra cărora se exercită forțele $\delta \vec{F}_{yz}^{(i)}$, $\delta \vec{F}_z^{(i)}(z)$ și $\delta \vec{F}_y^{(i)}(y + dy)$ sunt, respectiv: $dx \frac{dz}{\sin \alpha}$, $dx dy$ și $dx dz$, iar presiunile pe fețele pe care acționează $\delta \vec{F}_z^{(i)}$ și $\delta \vec{F}_y^{(i)}(y + dy)$ sunt $p(z)$ și respectiv $p(y + dy)$, ecuațiile (8.15) conduc la relațiile:

$$\begin{aligned} p(z) \frac{dx dz}{\sin \alpha} \sin \alpha - p(y + dy) dx dz &= 0; \\ -p_{xy} \frac{dx dz}{\sin \alpha} \cos \alpha + p(z) dx dy - \frac{1}{2} \rho g dx dy dz &= 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Deoarece după simplificarea prin dx , ultimul termen din ecuația (8.17b) conține un produs de două mărimi infinitezimale, el poate fi neglijat în comparație cu primii doi termeni, astfel încât sistemul anterior devine:

$$\begin{aligned} p(z) &= p(y + dy); \\ p_{xy} dz \operatorname{ctg} \alpha &= p(z) dy. \end{aligned}$$

De aici rezultă:

$$p_{xy} = \frac{p(z) dy}{dz \operatorname{ctg} \alpha} = p(z), \quad (8.18)$$

întrucât $\operatorname{ctg} \alpha = dy/dz$.

Aproximația referitoare la ultimul termen din ecuația (8.17) este cu atât mai justificată, cu cât volumul prisme, dV , este mai mic. În aceste condiții obținem ecuația:

$$p_{xy} = p(z) = p(y + dy). \quad (8.19)$$

Ecuația (8.19) reprezintă demonstrația *legii lui Pascal*⁴ care se enunță astfel:

În orice punct din interiorul unui fluid, presiunea se transmite în toate direcțiile, cu aceeași intensitate.

Evident, presiunea este o mărime scalară, însă produsul $p dS$ reprezintă o forță elementară, iar, din orice punct al fluidului, pleacă astfel de forțe elementare divergente.

8.1.1 Presiunea hidrostatică

Ecuația vectorială (8.13) este echivalentă cu următoarele trei ecuații scalare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial V_g}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial V_g}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial V_g}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

⁴În multe manuale de mecanică se vorbește de *principiul lui Pascal*.

Având în vedere că, în vecinătatea suprafeței Pământului, suprafețele echi-potențiale gravitaționale sunt plane orizontale, rezultă imediat că:

$$\frac{\partial V_g}{\partial x} = \frac{\partial V_g}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (8.21)$$

Ca urmare, pe o suprafață orizontală⁵, presiunea hidrostatică este constantă. În ceea ce privește direcția verticală, este cunoscut că:

$$-\frac{dV_g}{dz} = \Gamma = g, \quad (8.22)$$

(Γ fiind intensitatea câmpului gravitațional). Ca urmare, a treia ecuație din (8.20) se poate scrie sub forma:

$$\frac{dp}{dz} = \rho g \Rightarrow dp = \rho g dz. \quad (8.23)$$

Integrând ecuația precedentă, cu condiția la limită $p(z=0) = p_0$, valabilă în planul suprafeței libere a lichidului (adică pe suprafața de contact cu aerul)(vezi și Fig.8.5), găsim:

$$\int_p^{p_0} dp = \rho g \int_{-z}^0 dz, \quad (8.24)$$

adică:

$$p_0 - p = -\rho g z,$$

sau:

$$p(-z) = p_0 + \rho g z. \quad (8.25)$$

Aceasta înseamnă că, în interiorul lichidului (Fig.8.5), acolo unde $z < 0$, presiunea hidrostatică $+\rho g z$ se adaugă, de fapt, la presiunea atmosferică, p_0 . În cazul apei ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$), la

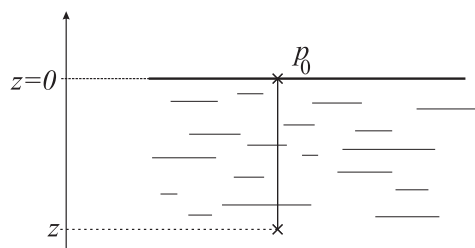


Figura 8.5: Pentru calculul presiunii hidrostactice.

o adâncime de aproximativ 10 m, presiunea totală, p are valoarea $2p_0 = 2 \text{ atm}^6$. De multe

⁵O astfel de suprafață se numește *suprafață de nivel*.

⁶Este cunoscut, de altfel, din manualul de liceu, că presiunea de o atmosferă este echivalentă cu o presiune hidrostatică exercitată de o coloană de mercur de 0,76 m, sau de o coloană de apă de ≈ 10 m

ori, coordonata ($-z$) din ecuația (8.25) se înlocuiește cu adâncimea, h , a coloanei de apă. Presiunea hidrostatică are atunci valoarea:

$$p_h = \rho gh, \quad (8.26)$$

iar presiunea totală la o adâncime h , sub nivelul apei este:

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (8.27)$$

8.1.2 Formula barometrică

În ecuația (8.24) am considerat că densitatea fluidului este constantă, de aceea a fost scoasă factor comun, în fața integralei. Acest lucru este valabil doar în cazul lichidelor (care sunt incompresibile). În cazul gazelor, densitatea se modifică cu presiunea. Folosindu-se de ecuația de stare a gazului ideal, $pV = \frac{m}{\mu}RT$, densitatea gazului se poate scrie:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \quad (8.28)$$

Înlocuim valoarea lui ρ dată de ecuația (8.28) în ecuația (8.23) vom obține:

$$dp = -\frac{p\mu}{RT}gdz. \quad (8.29)$$

Separând variabilele și integrând:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^z dz, \quad (8.30)$$

vom găsi dependența $p(z)$:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gz}{RT}}, \quad (8.31)$$

denumită și *formula barometrică*. Conform ecuației (8.31), presiunea atmosferică descrește exponențial cu înălțimea și temperatura.

8.1.3 Legea lui Arhimede

Ecuația (8.27) servește la deducerea expresiei forței ascensionale ce acționează asupra unui corp solid de o formă arbitrară, scufundat într-un lichid. Să considerăm un astfel de corp (Fig.8.6) și să evaluăm forța rezultantă exercitată de lichidul înconjurător asupra sa. Asupra oricărui element de volum dV al corpului, forțele de presiune ce acționează după direcțiile Ox și Oy se vor compensa în efect (conform legii lui Pascal, aplicată oricărei suprafețe de nivel). Dacă notăm cu dS aria bazei unui paralelipiped elementar de volum dV , forța rezultantă ce acționează asupra lui dV este:

$$dF = dF_z = (p_2 - p_1)dS = \rho g(h_2 - h_1)dS. \quad (8.32)$$

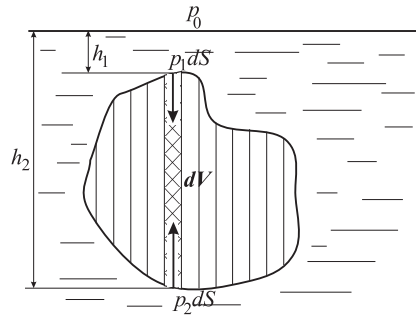


Figura 8.6: Un corp solid scufundat într-un fluid, divizat în volume elementare.

Forța rezultantă, ce se manifestă asupra întregului solid scufundat se obține integrând ecuația (8.32) pe întreaga suprafață a corpului:

$$F = F_z = \rho g(h_2 - h_1)S = \rho gV = m_l g \quad (8.33)$$

în care am notat cu $m_l = \rho V$ masa de lichid dezlucuit de corpul scufundat.

Ecuația (8.33) exprimă legea lui Arhimede, care se enunță astfel:

Un corp solid scufundat într-un fluid este împins de jos în sus, pe verticală, de o forță ascensională (denumită și forță arhimedică), egală cu greutatea fluidului dezlucuit de acel corp.

8.2 Dinamica fluidelor

Fiind sisteme cu distribuție continuă de masă, întocmai ca și în cazul solidului rigid fluidele pot fi tratate ca ansambluri cu un număr infinit de componente. Se înțelege că pentru găsirea ecuațiilor de mișcare nu putem integra ecuațiile care rezultă din aplicare principiului II al dinamicii, nici măcar pentru fiecare element de volum dV (care, așa cum arătam anterior, conține un număr enorm de particule, atomi sau molecule).

În mecanica fluidelor, Euler⁷ a arătat că putem aborda studiul dinamicii fluidelor din două puncte de vedere distincte:

- Să considerăm o particulă de fluid de volum infinitesimal dV și să-i urmărim coordonatele (de exemplu, x, y, z) ca funcție de timp, plecând, evident, de la forțele ce acționează asupra sa⁸, folosind principiul al II-lea al dinamicii. Această abordare ce pleacă de la legile mecanicii newtoniene a primit numele de abordare lagrangeană⁹.
- Să ne prestabilim poziții în spațiul ocupat de fluidul în mișcare și să "monitorizăm" mărimile fizice de interes (densitatea fluidului, viteza, presiunea etc.) în timp. Această

⁷Leonhard Euler (1707-1783) fizician elvețian, considerat cel mai mare matematician al secolului XVIII-lea. Lucrările sale ocupă circa 80 de volume (peste 886 de articole și cărți), cele mai multe scrise în ultimele decenii ale vieții, când era complet orb. Cele mai cunoscute contribuții ale lui L. Euler sunt în mecanică: unghiurile Euler (ce specifică orientarea unui rigid), ecuațiile ce descriu mișcarea fluidului, ecuațiile Euler-Lagrange din mecanica analitică etc.

⁸Această abordare am urmat-o în cazul solidului rigid.

⁹După numele lui Joseph Lagrange (1736-1813).

a doua abordare a primit numele de abordarea *euleriană*. Așa cum vom vedea în cele ce urmează, ea este mai convenabilă în studiul mișcării fluidelor, în comparație cu abordarea lagrangeană.

Observație Un exemplu care ilustrează cele două tipuri de abordări îl avem dacă ne propunem să urmărim studiul curgerii apei dintr-un fluviu. În abordarea lagrangeană ar fi nevoie să urmărim mișcarea unei particule generice de fluid, de la izvor până la vărsarea în mare. În abordarea euleriană, curgerea este studiată monitorizând viteza fluidului, nivelul apei etc. în punctele alese pe parcursul fluviului¹⁰.

8.2.1 Derivata substanțială a unei mărimi fizice

Așa cum vom vedea în continuare, există două tipuri de derivate ale mărimilor fizice ce caracterizează curgerea fluidului. De exemplu, dacă monitorizăm viteza în decursul mișcării unei particule de fluid *de-a lungul traiectoriei* sale (denumită și *linie de curent*), variația vitezei în raport cu timpul reprezintă o derivată totală, $d\vec{v}/dt$. Componentele vitezei \vec{v} sunt, la rândul lor, funcții de timp (vezi și Fig. 8.7). Variația vitezei într-un interval de timp dt este:

$$d\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \vec{v}(x, y, z, t). \quad (8.34)$$

Dezvoltând pe $\vec{v}(x + dx, y + dy, z + dz)$ în serie Taylor¹¹ și neglijând termenii de ordin superior vom avea:

$$d\vec{v} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt. \quad (8.35)$$

Împărțind ecuația (8.35) prin dt vom obține:

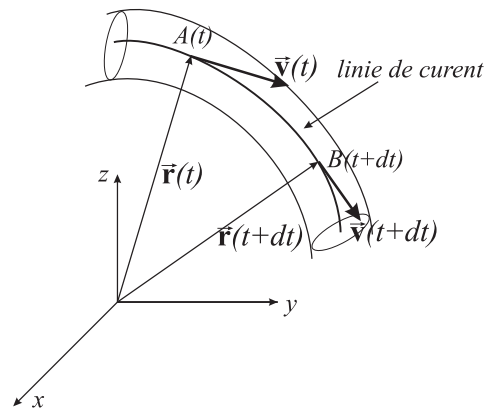


Figura 8.7: O particulă de fluid are, la momentul t , coordonatele $A(x, y, z)$, iar după un timp dt ajunge în $B(x + dx, y + dy, z + dz)$. Evident, distanțele au fost reprezentate exagerat de mari, din motiv de vizibilitate.

¹⁰Unele din datele culese de stațiile de monitorizare ne sunt oferite prin stații de radiofuziune la emisiunea "Cotele apelor Dunării"

¹¹Aceasta dacă $\vec{v}(r, t)$ este o funcție derivabilă, iar derivata sa în vecinătatea lui B este definită.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}, \\ &= v_x \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (8.36)$$

Constatăm că, în ecuația (8.36), a apărut și raportul $\partial\vec{v}/\partial t$, care exprimă variația vitezei în timp *într-un loc fixat* din volumul lichidului (abordarea euleriană). Ecuația (8.36) poate fi scrisă și sub o altă formă, dacă scoatem *formal* pe \vec{v} ca factor comun:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}.\quad (8.37)$$

În paranteză, recunoaștem imediat un produs scalar între un vector $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ și un altul $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$. Ecuația 8.37 se scrie, mai compact, sub forma:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}.\quad (8.38)$$

Definim astfel operatorul:

$$\frac{d}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) + \frac{\partial}{\partial t},\quad (8.39)$$

denumit *derivata substanțială* a unei mărimi fizice. Acest operator se poate aplica nu numai unei mărimi vectoriale (viteza \vec{v} , în exemplul anterior), ci și unor mărimi scalare, ca, de exemplu, presiunea:

$$\frac{dp}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla)p + \frac{\partial p}{\partial t}.\quad (8.40)$$

Ecuația (8.40) ne va fi utilă, în cele ce urmează, pentru stabilirea ecuației de curgere a unui fluid.

8.2.2 Ecuația de curgere a unui fluid

Vom recurge la același exemplu de particulă de fluid, pe care l-am folosit pentru deducerea ecuației fundamentale a hidrostatiei. Evident, pentru ca particula să se miște accelerat, este nevoie ca rezultanta forțelor de presiune ($-\text{grad}p \, dV$) și a forțelor externe $\delta\vec{F}^{(e)}$ să fie diferită de zero.

Aplicând legea a II-a a dinamicii pentru mișcarea de-a lungul unei linii de curent:

$$dm\vec{a} = -\text{grad}p \, dV + \delta\vec{F}^{(e)}\quad (8.41)$$

și exprimând pe \vec{a} conform ecuației (8.38), vom găsi:

$$\rho dV \left[(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \right] = -\text{grad}p \, dV + \vec{f}dV\quad (8.42)$$

adică:

$$\rho \left[(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = -\nabla p + \vec{f}. \quad (8.43)$$

În ecuațiile (8.42) și (8.43) am introdus mărimea $\vec{f} = \delta \vec{F}^{(e)} / dV$, având semnificația densității volumice de forță exterioară ce acționează asupra fluidului.

Ecuția (8.43), scrisă de obicei sub forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\vec{f}}{\rho}, \quad (8.44)$$

se numește *ecuația lui Euler*. Ea reprezintă *ecuația generală de curgere a unui fluid ideal* (lipsit de vâscozitate).

Integrarea ecuației (8.44), în cazul general, este dificilă. Ecuția (8.44) este echivalentă cu 3 ecuații scalare, însă aici avem 7 necunoscute: v_x, v_y, v_z, ρ, p , și f_x, f_y, f_z . Dintre acestea, componentele forțelor externe sunt cunoscute, însă mai rămân încă 4 necunoscute. Așa cum vom vedea în cele ce urmează, trei ecuații scalare suplimentare pot fi deduse din legea conservării masei (exprimată sub forma așa-numitei *ecuații de continuitate*). Cea de a 7-a necunoscută din lista amintită mai sus trebuie aflată dintr-o altă lege fizică, de la caz la caz.

8.2.3 Ecuția de continuitate

Ecuția de continuitate reprezintă, în fapt, legea de conservare a masei, aplicată în cazul curgerii unui fluid. Să considerăm un punct P din interiorul fluidului, aflat în interiorul unui volum elementar $dV = dxdydz$ (Fig. 8.8).

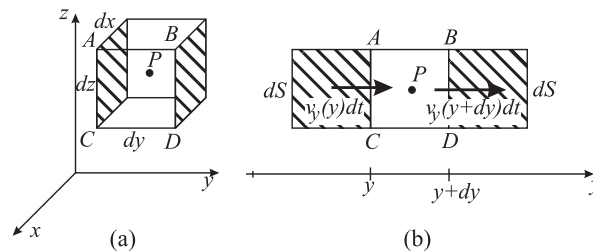


Figura 8.8: (a) Un volum elementar, dV , de fluid (b) O imagine bi-dimensională a elementului de volum, cu detalii privind curgerea după direcția Oy .

Viteza particulelor conținute în interiorul lui dV o vom considera reprezentată în mod complet de vectorul \vec{v}_P , viteza unui punct generic P , din interiorul lui dV :

$$\vec{v}_P = \vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}. \quad (8.45)$$

Să examinăm, în continuare, curgerea fluidului de-a lungul unei direcții date (de exemplu, de-a lungul direcției Oy , care este convenabilă din punct de vedere al vizibilității în Fig. 8.8). La intrare, pe suprafața AC , componenta vitezei fluidului și densitatea sa au, respectiv, valorile $v_y(y)$ și $\rho(y)$, iar la ieșire, pe suprafața BD , $v_y(y + dy)$, respectiv $\rho(y + dy)$. Dacă există o

masă netă "izvorâtă" din dV , de-a lungul direcției Oy , atunci aceasta se va putea scrie sub forma:

$$\begin{aligned} dm_y^{(+)} &= dm(y+dy) - dm(y) = \\ &= \rho(y+dy)dSv_y(y+dy)dt - \rho(y)dSv_y(y)dt. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Rezultatul anterior se scrie sub acea formă, deoarece masa de fluid care iese din volumul elementar fix, dV , este conținută într-un paralelipiped de arie a bazei $dS = dx dz$ și de înălțime egală cu spațiul parcurs de o particulă într-un timp dt , în mișcare uniformă cu viteza $v_y(y+dy)$. În mod similar, masa de fluid care intră în volumul elementar fix prin suprafața din stânga este conținută într-un paralelipiped de arie $dS = dx dz$ și înălțime $v_y(y)dt$. Ecuația (8.46) se rescrie astfel:

$$dm_y^{\pm} = [\rho(y+dy)v_y(y+dy) - \rho(y)v_y(y)] dx dz dt. \quad (8.47)$$

Dezvoltând în serie Taylor pe $\rho(y+dy)$ și $v_y(y+dy)$ și reținând doar termenii de ordinul I din dezvoltare, vom avea:

$$\rho(y+dy) \simeq \rho(y) + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy; \quad v_y(y+dy) \simeq v_y(y) + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy. \quad (8.48)$$

Introducând ecuațiile (8.48) în (8.47) și efectuând calculele în ecuația (8.47), vom obține:

$$dm_y^{(+)} = \left[v_y(y) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho(y) \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] dV dt. \quad (8.49)$$

Relații similare vom găsi, de asemenea, pentru curgerea pe direcțiile Ox și Oz :

$$dm_x^{(+)} = \left[v_x(x) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho(x) \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] dV dt; \quad (8.50)$$

$$dm_z^{(+)} = \left[v_z(z) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho(z) \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] dV dt. \quad (8.51)$$

Ca urmare, masa totală "izvorâtă" din dV în total, după cele trei direcții, Ox , Oy și Oz va fi, conform ecuațiilor (8.49-8.51):

$$\begin{aligned} dm^{(+)} &= dm_x^{(+)} + dm_y^{(+)} + dm_z^{(+)} = \\ &= \left[v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] dV dt \\ &= [(\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho(\nabla \cdot \vec{v})] dV dt. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Relația (8.52) se poate scrie și mai compact, sub forma:

$$dm^{(+)} = [\nabla \cdot (\rho \vec{v})] dV dt = \text{div}(\rho \vec{v}) dV dt. \quad (8.53)$$

Pe de altă parte, dacă definim intensitatea curentului masic care trece printr-o suprafață elementară dS ca:

$$I = \frac{dm}{dt},$$

atunci:

$$I = \frac{\rho v dt dS}{dt} = \rho v dS. \quad (8.54)$$

Putem, de asemenea, defini densitatea de curent masic:

$$\begin{aligned} j &= \frac{dm}{dt dS}; \\ \vec{j} &= \rho \vec{v}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Atunci relația (8.53) se poate scrie sub forma:

$$dm^{(+)} = \operatorname{div} \vec{j} dV dt. \quad (8.56)$$

Ecuția (8.56) permite să definim operatorul divergență:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{dm^{(+)}}{dV dt}. \quad (8.57)$$

Divergența vectorului densitate de curent masic \vec{j} reprezintă cantitatea de fluid izvorâtă dintr-un element de volum ales ca unitate, în unitatea de timp. Cu alte cuvinte, divergența reprezintă productivitatea de flux de curent masic al unității de volum elementar de fluid. Acest lucru este valabil și în concordanță cu teorema Gauss-Ostrogradski:

$$\int_{(V)} \operatorname{div} \vec{j} \cdot dV = \int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (8.58)$$

Menționăm că în ecuația (8.58), cu (V) și (S) s-au notat volumul și respectiv suprafața ce mărginește un volum de fluid.

Va trebui să răspundem acum la întrebarea: de unde provine masa $dm^{(+)}$? Dacă masa de fluid se conservă, masa izvorâtă nu poate proveni decât din scăderea densității fluidului în interiorul volumului elementar considerat. Notând cu $dm^{(-)}$ masa care părăsește pe dV , va fi:

$$dm^{(-)} = [\rho(t + dt) - \rho(t)] dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt. \quad (8.59)$$

Dacă masa de fluid se conservă¹², legea conservării masei, se va scrie sub forma:

$$dm^{(+)} + dm^{(-)} = 0 \quad (8.60)$$

adică, având în vedere ecuațiile (8.53) și (8.59):

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (8.61)$$

Ecuția (8.61) constituie formularea locală (sau diferențială) a *ecuației de continuitate*.

Observații

¹²În sensul că fluidul nu este creat prin procese fizice sau chimice în interiorul lui dV .

1. Dacă fluidul este incompresibil ($\partial\rho/\partial t = 0$), atunci ecuația (8.61) se reduce la:

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0. \quad (8.62)$$

2. Din ecuația (8.61) se poate obține, în cazul lichidelor, (considerate fluide practic incompresibile), prin integrare:

$$\int_{(V)} \operatorname{div}\vec{j}dV = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (8.63)$$

Integrala a 2-a din ecuația (8.63) se poate scrie, de exemplu, în cazul curgerii unui lichid printr-o conductă de forma celei din Fig. 8.9, sub forma:

$$\int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{(S_1)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_{(S_2)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_{(S_{lat})} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (8.64)$$

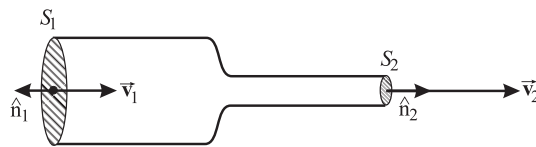


Figura 8.9: Curgerea fluidelor printr-o conductă îngustată

În ecuația (8.64) am notat cu (S_{lat}) suprafața laterală a conductei, prin care, evident, nu iese/intră fluid, astfel încât $\int_{(S_{lat})} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$. Ecuația (8.64) se reduce la:

$$\int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{(S_1)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_{(S_2)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.65)$$

sau:

$$\int_{S_1} \rho\vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \rho\vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2 dS = 0. \quad (8.66)$$

Ținând cont de orientarea versorilor normali la suprafață vom găsi, în final:

$$-\rho v_1 S_1 + \rho v_2 S_2 = 0 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (8.67)$$

Relația (8.67) constituie *formularea integrală* a ecuației de continuitate, în cazul fluidului ideal (lipsit de vâscozitate) incompresibil. Așa cum vom discuta în Secțiunea 4.5, în cazul fluidelor vâscoase viteza unei particule din fluid nu mai are aceeași valoare în orice punct al unei secțiuni date (de exemplu, v_1 în orice punct din S_1 respectiv v_2 în secțiunea S_2). Din cauza frecării interne, viteza particulelor de fluid este maximă la axul conductei și tinde la zero, pe măsura apropierii de peretele conductei.

8.2.4 Ecuația (legea) lui Bernoulli

O altă lege de conservare din fizică, anume legea conservării energiei mecanice are o exprimare concretă în dinamica fluidelor, denumită ecuația lui Bernoulli¹³. Ea este valabilă, așa cum vom constata în cele ce urmează, în cazul curgerii fluidelor ideale incompresibile, într-un câmp de forțe conservativ, în regim laminar.

Denumim curgere laminară a unui fluid, situația în care liniile de curent nu se intersectează, iar pături adiacente de fluid în mișcare nu se întrepătrund.

Pentru deducerea ecuației lui Bernoulli, vom pleca de la ecuația generală de curgere a unui fluid (8.44), pe care, pentru început, o vom înmulți scalar cu vectorul viteză:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \nabla p \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (8.68)$$

Primul termen din ecuația anterioară poate fi scris și sub forma:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} &= \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\rho}{dt}. \end{aligned} \quad (8.69)$$

Ce de al doilea termen poate fi scris, la rândul său, sub forma:

$$\nabla p \cdot \vec{v} = \frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial y} v_y + \frac{\partial p}{\partial z} v_z = (\vec{v} \cdot \nabla) p = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (8.70)$$

în care am folosit expresia derivatei substanțiale (8.40). În cazul fluidului incompresibil, $\partial \rho / \partial t = 0$, astfel încât:

$$\nabla p \cdot \vec{v} = \frac{dp}{dt}. \quad (8.71)$$

În consecință, ecuația (8.68) devine:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \vec{f} \cdot \vec{v}. \quad (8.72)$$

Dacă lichidul curge într-un câmp de forțe externe cu caracter conservativ, (deci derivă dintr-un potențial scalar, V_0), atunci:

$$\vec{f} = -\text{grad } V_0, \quad (8.73)$$

în care V_0 reprezintă *energia potențială a unității de volum*. În aceste condiții, înmulțind cu dt ecuația (8.72), vom găsi:

$$dp + d \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \vec{f} \cdot \vec{v} dt. \quad (8.74)$$

¹³Daniel Bernoulli (1700 - 1782), născut într-o familie de matematicieni elvețieni, este cunoscut pentru contribuțiile sale la studiul proprietăților fluidelor. Cea mai importantă lucrare, *Hidrodinamica*, apărută în 1738, conține studii teoretice și practice legate de echilibrul, presiunea și viteza fluidelor.

Integrând ecuația (8.74) *de-a lungul unei linii de curent*, între două puncte de pe traiectorie și ținând cont că $\vec{v}dt = d\vec{r}$, vom obține:

$$\int_1^2 dp + \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r}, \quad (8.75)$$

sau:

$$p_2 - p_1 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \int_1^2 \left(-\frac{dV_0}{dr}\right) dr = -V_{02} + V_{01}. \quad (8.76)$$

Relația anterioară o vom scrie sub forma:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + V_{02} = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + V_{01}. \quad (8.77)$$

În cazul în care forțe externe sunt de tip gravitațional:

$$V_0 = \frac{mgh}{V} = \rho gh, \quad (8.78)$$

iar relația (8.77) se poate scrie sub forma:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const.} \quad (8.79)$$

Ecuația (8.79) exprimă legea lui Bernoulli. Aici:

- p reprezintă *presiunea statică* din fluid. Aceasta este datorată acțiunii forțelor cu care restul fluidului acționează asupra elementului de volum de fluid dV ;
- $\frac{1}{2}\rho v^2$ se numește *presiune dinamică* și ea este asociată forțelor active, care pun fluidul în mișcare;
- ρgh se numește *presiune de poziție* și ea este asociată cu efectul forțelor conservative externe fluidului¹⁴.

Trebuie neapărat subliniat că, pe lângă semnificația presiunilor, fiecare termen din ecuațiile (8.77) și (8.79) are și semnificația *energiei unității de volum*:

- termenul p reprezintă, în același timp și *energia potențială a unității de volum*. Ea este legată de acțiunea câmpului forțelor interne din fluid;
- termenul ρgh reprezintă, în același timp și *energia potențială a unității de volum*. Ea este legată de acțiunea câmpului de forțe din exteriorul fluidului;
- termenul $\frac{1}{2}\rho v^2$ reprezintă, în același timp și *energia cinetică a unității de volum a fluidului*.

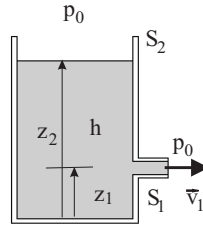


Figura 8.10: Curgerea unui lichid printr-un orificiu lateral.

8.2.5 Aplicațiile legii lui Bernoulli

Există un număr apreciabil de aplicații tehnice ale legii lui Bernoulli, dintre care, în continuare, vom aminti doar câteva.

a) **Formula lui Torricelli.** Să calculăm viteza de curgere a unui lichid printr-o deschidere a vasului care îl conține, ca în Fig. 8.10. Secțiunea vasului umplut cu lichid până la cota z_2 este S_2 , iar a orificiului aflat la cota z_1 este S_1 . Dacă vasul este descoperit, suprafața liberă este în contact direct cu atmosfera care acționează asupra lichidului cu presiunea p_0 , la nivelul ambelor deschideri. Deși forma liniilor de curent nu este simplă, chiar și în cazul vaselor cu formă simetrică, totuși este suficient să știm că viteza particulelor de fluid rămâne constantă la nivelul fiecărei secțiuni (S_1 și S_2).

Dacă scriem ecuația Bernoulli:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1, \quad (8.80)$$

rezultă că:

$$v_1^2 = v_2^2 + 2g(z_2 - z_1). \quad (8.81)$$

Folosind și ecuația de continuitate a curgerii:

$$S v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

deducem că:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}}}. \quad (8.82)$$

În condițiile în care $S_2 \gg S_1$, raportul $S_1^2/S_2^2 \rightarrow 0$ și viteza de curgere devine:

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (8.83)$$

Relația (8.83) este cunoscută sub numele de *ecuația lui Torricelli*.

b) **Pulverizatorul** (Fig.8.12a). Un jet de aer care iese din zona îngustată a unei conducte C , denumită și *ajutaj*, crează în zona A o depresiune statică ($p_A < p_{atm}$), care face ca lichidul

¹⁴A nu se confunda presiunea de poziție cu presiunea hidrostatică, deși ambele au aceeași formulă de calcul!

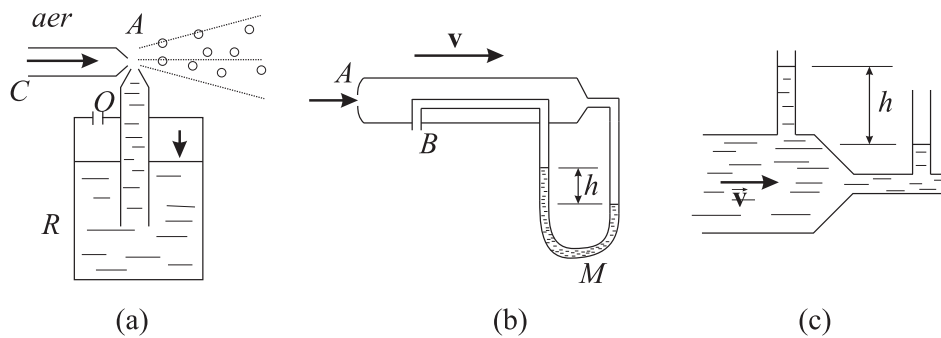


Figura 8.11: (a) Pulverizatorul; (b) Tubul Pitot; (c) Tubul Venturi.

din rezervorul R să urce în conducta verticală. La capătul superior al conductei, lichidul va fi rupt în particule fine (aerosoli), care sunt antrenate, împreună cu aerul. Pe acest principiu se obțin aerosoli în medicină. Dispozitivul se utilizează și la pulverizarea benzinei în carburatorul motoarelor Otto, a vopselei în procesul de acoperire protectoare etc.

c) **Tubul Pitot. Tubul Venturi.** (Fig.8.12b,c). În cazul tubului Pitot, orificiul de intrare, A , este expus jetului de fluid, în timp ce orificiul lateral B , nu. La nivelul orificiului A se manifestă atât presiunea dinamică, cât și cea statică, în timp ce la nivelul orificiului B – doar presiunea statică. Denivelarea h din manometrul cu lichid, M va măsura doar presiunea dinamică, $p_d = \rho v^2/2$. Cunoscând densitatea fluidului în condițiile curgerii, se poate determina viteza fluidului. În cazul tubului Venturi (Fig.8.12c), denivelarea h este o măsură a diferenței dintre presiunile statice ale fluidului între cele două zone ale conductei. Evident, folosind expresiile presiunii hidrostactice, cunoscând secțiunile conductei în cele două zone și aplicând ecuația de continuitate, se poate determina, și în acest caz, viteza de curgere a fluidului.

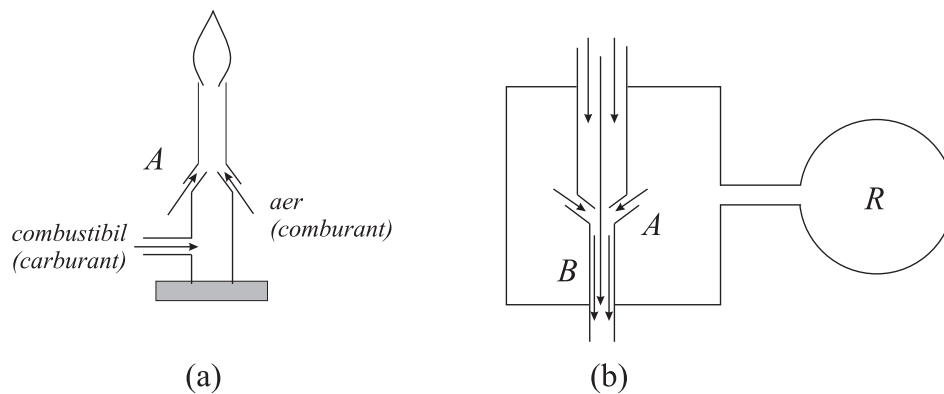


Figura 8.12: (a) Becul cu gaz; (b) Trompa de apă.

d) **Becul cu gaz. Trompa de apă.** Deoarece obținerea unei temperaturi cât mai ridicate la arderea unui gaz combustibil presupune asigurarea unei cantități adecvate de gaz care întreține arderea (comburant), introducerea carburantului pe fluxul becului cu gaz se face așa cum este arătat în Fig. 8.12(a). În zona ajutorajului A se crează o depresiune statică, care

antrenează aerul înconjurător, odată cu gazul metan (sau butan) și face ca temperatura de ardere să crească. Reglarea temperaturii de ardere se face prin reglarea lărgimii zonei de admisie a aerului, A . Același procedeu se folosește la arzătoarele din laboratorul de chimie (așa numitul bec Teclu)¹⁵, dar și la construcția arzătorului de aragaz etc. Un alt exemplu interesant îl oferă dispozitivul denumit *trompa de apă* (Fig. 8.12(b)), care este un exemplu de pompă de vid: aici aerul din atmosfera ce înconjoară ajutorul A (inclusiv din rezervorul R ce se dorește a fi vidat) este scos, prin antrenare odată cu apa în conducta inferioară, B . De fapt, trompa de apă este un fel de bec de gaz cu funcționare inversată.

e) **Forța portantă.** Aripa oricărui avion dirijează spre "în jos" o anumită cantitate de aer, creând prin aceasta, o anumită *forță portantă*, care împinge întreg avionul spre în sus. Totuși, portanța este creată într-o măsură mult mai mare prin alegerea *forme adecvate* a aripii. Văzută în secțiune transversală, aripa de avion (sau elicea, care este în fond o aripă rotitoare) arată ca în Fig.8.13.

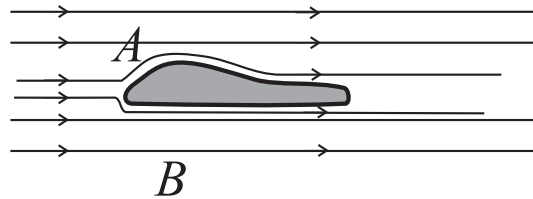


Figura 8.13: Curgerea particulelor de aer în vecinătatea aripii de avion. Vezi și coperta.

În zona convexă, A , din cauza îndesirii liniilor de curent, crește presiunea dinamică, deci scade presiunea statică. În zona B presiunea statică este mare, datorită vitezei mai mici decât în zona A . Diferența dintre presiunile statice ale zonelor B și A , înmulțită cu suprafața (orizontală) pe care se manifestă acestea, dau naștere la o forță portantă considerabilă, care poate ridica în aer avioane cu greutatea de ordinul zecilor de tone. Cum valoarea diferenței de presiune statică este egală cu diferența de presiune dinamică (deci este proporțională cu v^2), decolarea și zborul avioanelor grele au loc la viteze de ordinul sutelor de m/s . Tot în scopul creșterii portanței, suprafața aripilor se alege cât mai mare¹⁶.

Fără să constituie aplicații, ci doar efecte ale legii lui Bernoulli, putem aminti aici forțele de "atracție" laterală pe care le resimt vehiculele care se deplasează pe traiectorii paralele, la distanțe relativ mici unul de celălalt (efect periculos mai ales în cazul remorcilor tractate) sau a vapoarelor.

¹⁵După numele chimistului român Nicolae Teclu (1839-1916), academician, contribuții în domeniul producerii ozonului, al dioxidului de carbon solid.

¹⁶În cazul avioanelor utilitare, care trebuie să zboare cu viteze relativ mici, creșterea portanței se realizează prin folosirea aripilor duble.

8.3 Fluide vâscoase

8.3.1 Introducere

Fluidele reale sunt vâscoase datorită frecării interne: straturi adiacente de fluid se mișcă unele în raport cu altele, iar la interfața dintre ele apar forțe de frecare și, ca urmare *eforturi tangențiale*. Aceste forțe de frecare tind să reducă viteza relativă dintre particule sau pături de fluid. Fără a intra în detaliu în fenomenele de transport ale impulsului care au loc la scară microscopică¹⁷, vom modela frecarea internă prin forțe de frecare dintre pături adiacente de fluid.

Să considerăm un fluid care curge laminar de-a lungul axei Ox (Fig.8.14), de exemplu apa dintr-un râu. Vom împărți fluidul în pături de grosime infinitezimală, aflate unele deasupra

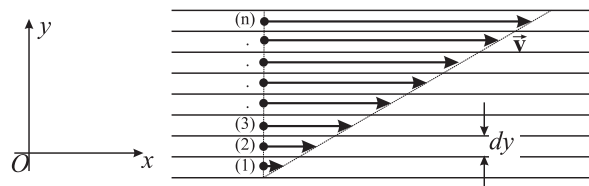


Figura 8.14: Profilul vitezei în cazul curgerii unui fluid vâscos.

celorlalte. Pătura (1) va avea viteză apropiată de zero, ea fiind în contact cu albia râului, aflată în repaus și suferind acțiunea frecării cu aceasta. Pătura (2) va avea o viteză mică dar mai mare decât pătura (1), pătura (3) o viteză mai mare decât a 2-a ș.a.m.d. În Fig. 8.14 am reprezentat un așa-numit profil al vitezelor, în care am figurat mărimea vitezei fiecărui strat de lichid, ca o funcție de coordonata y .

Într-un model simplificat (așa-numita *abordare newtoniană*) se consideră că viteza crește liniar cu coordonata y . Forța de frecare vâscoasă se presupune a fi direct proporțională cu suprafața păturilor în contact și cu rata de variație a modulului vitezei după direcția perpendiculară pe strat (în cazul nostru, Oy). O expresie matematică a acestei forțe se poate scrie introducând un coeficient de proporționalitate, η , denumit *coeficient de vâscozitate dinamică*:

$$F_r = \eta S \frac{dv}{dz}. \quad (8.84)$$

Curgerea în regimul menționat aici, în prezența forței de frecare de tip (8.84), se numește *newtoniană* iar fluidele care respectă o lege de tip (8.84) se numesc *newtoniene*. În cazul lichidelor newtoniene, coeficientul de vâscozitate dinamică, η este funcție *de natura fluidului* și *de temperatură*. Unitatea de măsură a lui η în SI va fi:

$$\langle \eta \rangle_{SI} = \frac{1Nm}{m^2 \frac{m}{s}} = 1 \frac{kg}{m \cdot s} = 1 \text{ Poise}.$$

Denumirea de Poise vine de la numele lui Poisseuille¹⁸ un fizician francez care s-a ocupat intens de studiul curgerii fluidelor newtoniene vâscoase.

¹⁷ Acest subiect este tratat în detaliu la disciplina de Fizică moleculară și termodinamică.

¹⁸ Jean Louis Marie Poiseuille (1799 - 1869), fizician francez, cunoscut pentru cercetările legate de curgerea fluidelor prin tuburi cilindrice.

8.3.2 Curgerea fluidelor vâscoase prin conducte cilindrice. Ecuația lui Poisseuille-Hagen

Sa considerăm, în cele ce urmează, curgerea staționară a unui fluid newtonian printr-o conductă cilindrică de rază R (Fig. 8.15). Fiecare strat de fluid are forma unei pături cilindrice de rază r ($r \in [0, R]$) și grosime dr , și este paralelă cu axul conductei. Toate particulele dintr-o astfel de pătură cilindrică au viteza $v(r)$; la trecerea de la un strat la altul (curgerea fiind laminară) vom avea un salt infinitesimal dv al vitezei. În interiorul păturii de

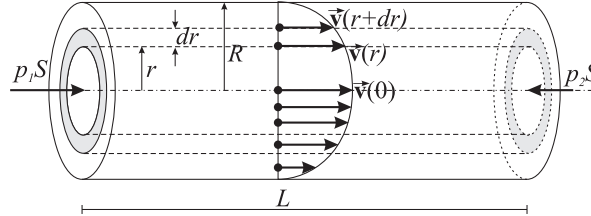


Figura 8.15: Profilul vitezei în cazul curgerii vâscoase printr-o conductă orizontală.

fluid case se mișcă cu viteza periferică $v(r)$ se află un cilindru de rază r care se mișcă cu viteza $\vec{v} + d\vec{v}$. Suprafața externă a cilindrului acționează cu o forță F_r asupra păturii cilindrice care îl înconjoară antrenând-o în mișcare cu viteza $v(r)$. Forța F_r are expresia:

$$F_r = \eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}, \quad (8.85)$$

în conformitate cu legea lui Newton ((8.84)). Aici $S = 2\pi rh$, iar z este înlocuit aici de coordonata r . Dacă mișcarea cilindrului de rază r este uniformă (acelerația este nulă) atunci forța activă care determină curgerea este egală în modul și de sens contrar cu forța F_r . Forța activă este datorată *diferenței de presiune* de la capetele conductei:

$$ma = \pi r^2 \Delta p + 2\pi r \eta L \frac{dv}{dr} = 0. \quad (8.86)$$

Rezultă:

$$r \Delta p + 2\eta L \frac{dv}{dr} = 0. \quad (8.87)$$

În ecuația (8.87) vom separa variabilele și vom obține:

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta L} r dr. \quad (8.88)$$

Integrând ecuația (8.88) între 0 și r , după ce notăm cu $v(0)$ viteza fluidului la axul conductei găsim:

$$\int_{v(0)}^{v(r)} dv = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \int_0^r r dr, \quad (8.89)$$

adică:

$$v(r) = v(0) - \frac{\Delta p r^2}{4\eta L}. \quad (8.90)$$

Valoarea lui $v(0)$ o putem afla integrând ecuația (8.88) între $r = 0$ (acolo unde $v = v(0)$) și R (acolo unde $v = 0$):

$$\begin{aligned} \int_{v(0)}^0 &= -\frac{\Delta p}{2\eta L} \int_0^R r dr \Rightarrow \\ v(0) &= \frac{\Delta p R^2}{4\eta L}. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Ținând seama de ecuația (8.91) ecuația (8.90) devine:

$$v(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (8.92)$$

Conform ecuației (8.92), profilul vitezei este parabolic, întrucât v depinde pătratic de r . Vârful vectorilor vitezei, într-o secțiune oarecare a conductei, se situează pe un paraboloid de rotație (Fig.8.15).

Ecuația (8.92) permite, de asemenea calculul debitului volumic de fluid prin întreaga conductă. Printr-o pătură cilindrică, debitul volumic (elementar) este:

$$dq_v = \frac{2\pi\Delta p R^2}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr. \quad (8.93)$$

Prin integrare în raport cu r (adică adunând volumele de fluid ce curg în unitatea de timp printr-o secțiune transversală a conductei prin toate păturile cilindrice) obținem:

$$Q_v = \int dq_v = \frac{\pi\Delta p R^4}{2\eta L} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p. \quad (8.94)$$

Ecuația (8.94) se numește *ecuația lui Poiseuille*. Conform acesteia, Q_v este direct proporțional cu diferența dintre presiunile statice de la capetele conductei și cu puterea a 4-a (!) a razei conductei. Această dependență dramatică a debitului de diametrul conductei face ca variații relativ mici ale lui R să se reflecte în *variații foarte mari ale debitului de fluid*, pentru o diferență de presiune constantă. Pe acest mecanism se bazează reglarea debitului de sânge din artere către țesuturi. Se știe că, la un moment dat, creierul sau alte organe ale corpului consumă mai mult oxigen, în unitatea de timp în condițiile unui efort fizic intens¹⁹.

O alta concluzie importantă legată de legea lui Poiseuille rezultă dacă rescriem ecuația (8.94) sub forma:

$$Q_v = \frac{\Delta p}{\frac{8\eta}{R^2} \frac{L}{\pi R^2}} = \frac{\Delta p}{\frac{8\eta}{R^2} \frac{L}{S}}. \quad (8.95)$$

¹⁹Să menționăm, totuși, că sângele nu este un lichid riguros newtonian decât într-o primă aproximație. Vâscozitatea acestuia depinde de mai mulți parametri biofizici. Există o ramură distinctă a mecanicii fluidelor, numită *reologie*, care se ocupă de curgerea lichidelor non-newtoniene, așa cum este, în mod riguros vorbind, sângele.

Ecuția (8.95) are o formă identică cu *legea lui Ohm* din electrocinetică:

$$I = \frac{\Delta V}{\rho \frac{L}{S}} = \frac{U}{R}, \quad (8.96)$$

cu

$$\Delta V = U, \text{ care se numește tensiune electrică și } R = \rho \frac{L}{S}, \quad (8.97)$$

În ecuația (8.95) putem defini o *rezistență* (mecanică) *la curgere*:

$$R_m = \frac{8\eta L}{R^2 S} = \rho_m \frac{L}{S}, \quad (8.98)$$

unde rezistivitatea mecanică, ρ_m , este nu doar o constantă de material ca în electricitate, ci depinde și de raza conductei. În rest, raportul L/S apare exact ca și în cazul legii lui Ohm, în cazul curgerii curentului electric. Mărima echivalentă intensității curentului electric este aici debitul de fluid, care conform ecuației (8.95), este direct proporțional cu diferența de presiune de la capetele conductei, tot așa cum I este proporțional cu diferența de potențial $\Delta V = U$ (ΔV fiind diferența de potențial la capetele unui conductor).

Având în vedere profilul parabolic al vitezei, putem defini în cadrul acestui tip de curgere, o viteză medie, \bar{v} , a fluidului din conductă. Pentru aceasta vom exprima debitul volumic prin relația:

$$Q_v = S\bar{v}. \quad (8.99)$$

Egalând pe Q_v din relațiile (8.94) și (8.99) vom găsi:

$$\bar{v} = \frac{R^2}{8\eta L} \Delta p = \frac{v(0)}{2}. \quad (8.100)$$

Așadar, în cazul curgerii vâscoase prin conducte cilindrice, viteza medie a fluidului este de două ori mai mică decât viteza aceluiși fluid la axul conductei.

8.3.3 Forțe de frecare vâscoasă la interfața solid-lichid. Legea lui Stokes

Să examinăm acum mișcarea uniformă a unei sfere într-un fluid vâscos. Cum mișcarea este uniformă, accelerația sferei este nulă, adică forțele externe care pun sfera în mișcare sunt egale în modul cu rezultanta forțelor de frecare vâscoasă. Vom deduce o expresie a forțelor de frecare vâscoasă pe baza unei *analize dimensionale*, un procedeu larg utilizat atunci când un model teoretic este dificil de construit pe baza unor legi fizice.

Pe baza celor discutate anterior, vom presupune că forța de frecare vâscoasă (forța de rezistență la înaintarea în fluid) dintre sferă și fluidul înconjurător depinde de viteza acesteia în raport cu fluidul, de rază și de proprietățile de vâscozitate ale fluidului, exprimate prin coeficientul de vâscozitate dinamică:

$$F_r = kv^\alpha r^\beta \eta^\gamma, \quad (8.101)$$

în care k este o constantă adimensională. Înlocuind în (8.101) dimensiunile mărimilor fizice care intervin acolo, se obține:

$$LMT^{-2} = (LT^{-1})^\alpha L^\beta (ML^{-1}T^{-1})^\gamma. \quad (8.102)$$

Egalând exponenții lui L , M și T din cei 2 membri vom găsi:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1 \quad (8.103)$$

adică, de fapt, ecuația (8.101) se scrie sub forma:

$$F_r = kvr\eta. \quad (8.104)$$

În urma unor măsurători riguroase, Stokes²⁰ a descoperit că, în cazul sferei, constanta k din ecuația precedentă are valoarea $k = 6\pi$, așa încât:

$$F_r = 6\pi\eta vr. \quad (8.105)$$

Ecuația (8.105) exprimă cantitativ *legea lui Stokes*. Trebuie menționat că, în cazul unor corpuri cu forme diferite de cea sferică, ecuația (8.104) își păstrează valabilitatea, cu observația că valoarea lui k nu mai este 6π , ci ea diferă, în funcție de forma corpului.

8.3.4 Efectul Magnus

În secțiunea precedentă am examinat mișcarea printr-un fluid a unei sfere care execută o mișcare de translație în raport cu fluidul. Dacă, însă, simultan cu mișcarea de translație, corpul execută și o rotație în jurul unei axe, atunci efectul interacțiunii sferei cu fluidul devine mai complex, datorită frecării.

Să considerăm că sfera se deplasează de-a lungul axei Ox într-un fluid aflat în repaus. Pentru simplificarea raționamentului, putem considera că, invers, sfera se află în repaus, iar fluidul se deplasează în sens contrar axei Ox , cu viteza $-\vec{v}$ (Fig.8.16). În regiuni din fluid suficient de îndepărtate de sferă, liniile de curent rămân rectilinii, neperturbate de prezența sferei. Pe măsura ce ne apropiem de suprafața exterioară a sferei, forma liniilor de curent se modifică din ce în ce mai mult, acestea fiind obligate să ocolească sfera. În zone din ce în ce mai apropiate de sferă se manifestă din ce în ce mai pronunțat antrenarea aerului de către sfera în rotație. Datorită acestei antrenări, de exemplu, în zona B din partea inferioară, viteza de curgere a fluidului pe lângă sferă este $-(v - \omega R)$, R fiind raza sferei. În același timp, în zona A , viteza corespunzătoare a fluidului va fi $-(v + \omega R)$. Presiunea dinamică în zona A va fi deci mai mare decât în zona B . Dacă sfera are dimensiuni mici (pentru a neglija efectul presiunii de poziție), conform legii lui Bernoulli, presiunea statică, p_{sA} , din zona A va fi mai mică decât cea din zona B . Apare astfel o forță $F = S\Delta p_s = S(p_{sB} - p_{sA})$ (S fiind suprafața transversală pe care se manifestă diferența de presiune îndreptată perpendicular pe direcția fluxului de fluid, spre A). Aceasta va determina o mișcare accelerată, cu o accelerație perpendiculară pe direcția de mișcare a fluidului.

²⁰Sir George Gabriel Stokes (1819–1903), matematician și fizician irlandez, recunoscut pentru contribuțiile importante în dinamica fluidelor, optică și fizica matematică.

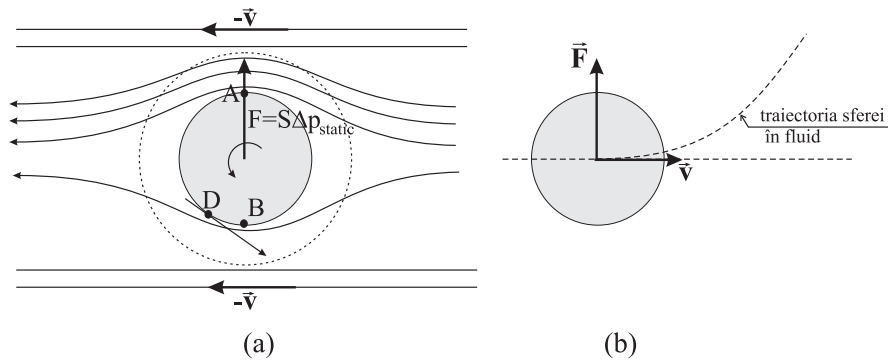


Figura 8.16: Mișcarea compusă (translație- rotație) a unei sfere într-un fluid.

Așadar, o sferă care inițial, în absența rotației se deplasează rectiliniu cu viteza \vec{v} , în prezența rotației va urma o traiectorie curbată spre A (Fig. 8.16(b)). Pentru deplasarea în acest regim, de exemplu, a unei mingi de fotbal, sau tenis, în aer²¹ este nevoie să lovim "razant" mingea în zona D .

8.3.5 Formarea vârtejurilor. Curgerea turbulentă

Efectul combinat al forțelor de frecare și forțelor de presiune din fluid face ca, în cele mai multe cazuri, mișcarea fluidului în vecinătatea unor obiecte să piardă caracterul laminar, mai ales dacă viteza relativă a fluidului față de acel obiect depășește o anumită valoare critică. Curgerea capătă în acest caz un caracter *turbulent*. Să considerăm din nou cazul unei sfere aflată în repaus, într-un fluid care se deplasează în raport cu sfera cu viteza \vec{v} (Fig. 8.17). Regiunea în care liniile de curent sunt perturbate de la forma lor rectilinie de către prezența

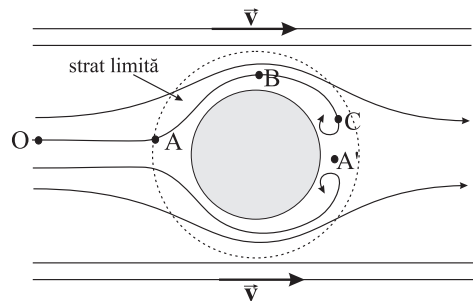


Figura 8.17: Formarea vârtejurilor în spatele unei sfere. Stratul limită este mărginit la exterior de suprafața desenată cu linie întreruptă.

corpului C se numește *strat limită*.

O particulă de fluid care se deplasează pe traiectoria $OABC$ va avea o mișcare complexă, din următoarele motive. Din cauza aglomerării de fluid în zona A , aici viteza particulelor

²¹O astfel de execuție, care presupune o anumită îndemânare a sportivului, se numește "lovitură cu efect" în fotbal, sau "tăiată" în tenis.

scade, iar presiunea statică în fluid crește. Dimpotrivă, în zona B , acolo unde liniile de curent se îndesesc (întocmai ca într-o conductă care se îngustează) viteza particulelor și, implicit, presiunea dinamică cresc substanțial. Conform legii lui Bernoulli, în B apare o regiune de depresiune statică, iar particula de curent ce urmează traiectoria AB va fi accelerată spre B , întocmai ca în cazul "căderii într-o groapă de potențial". Efectul forțelor de presiune este, în zona AB , mult mai important decât al forțelor de frecare fluid-solid.

Din motive de simetrie, ne-am aștepta ca fenomenele să se desfășoare în sens invers între regiunile B și A' , deci particula să ajungă în A' cu aceeași valoare \vec{v}_A a vitezei. Lucrurile nu stau în realitate așa, deoarece particula de fluid nu mai poate "urca" bariera de energie potențială determinată de creșterea de presiune statică din zona BA' , din cauza pierderii de energie mecanică determinată de frecare. Particula se va opri în zona C înainte de a fi ajuns în A' și va fi obligată să se întoarcă spre B ²².

Apare, datorită opririi "premature" a particulelor de fluid, tendința de formare a vârtejurilor în spatele unor astfel de obiecte. Aceasta determină transformarea unei părți însemnate din energia cinetică asociată mișcării dirijate a fluidului, în căldură. Astfel de vârtejuri care se formează, de exemplu, în spatele vehiculelor care se deplasează în aer sau în apă, determină creșterea dramatică a forțelor de rezistență la înaintarea în regiuni de viteză ridicată. Pe lângă lucrul mecanic cheltuit pentru învingerea frecării cu aerul, un lucru mecanic suplimentar se consumă pentru punerea în mișcare turbulentă (care în final se stinge, după trecerea vehiculului) a aerului sau a apei. Se înțelege că în urma stingerii mișcării turbulente a vârtejurilor, energia lor cinetică se transformă în căldură, dacă din punctul de vedere al mecanicii, aceasta este o *energie pierdută*.

Există, așadar, două tipuri de forțe de rezistență la înaintarea într-un fluid:

- Forțe de *frecare vâscoasă* (F_v), proporționale cu viteza

$$F_v = kv; \quad (8.106)$$

- Forțe de presiune (sau de antrenare), de *natură inerțială*, legate de antrenarea fluidului în mișcare cu viteze considerabile, proporționale cu v^2 :

$$F_a = k'v^2. \quad (8.107)$$

Întrucât acest al doilea tip de forțe este legat de apariția și menținerea unei diferențe de presiune între partea frontală și cea posterioară a obiectului mobil, astfel de forțe vor depinde, de asemenea de secțiunea obiectului, normală pe liniile de curent, precum și de densitatea fluidului. De aceea este normal să recurgem din nou la o analiză dimensională, incluzând într-o formulă factorii sus-menționați:

$$F_a = bv^\alpha S^\beta \rho^\gamma. \quad (8.108)$$

Înlocuind în ecuația precedentă dimensiunile mărimilor care intervin, vom avea:

$$LMT^{-2} = (LT^{-1})^\alpha L^{2\beta} (ML^{-3})^\gamma$$

²²Situația este similară aruncării unui corp pe un plan înclinat, caz în care bariera de energie potențială este de natură gravitațională.

obținem: $1 = \alpha + 2\beta - 3\gamma$; $1 = \gamma$ și $-2 = -\alpha$. Ca urmare: $\alpha = 2$; $\gamma = 1$, $\beta = 1$. În aceste condiții expresia forței de antrenare va fi:

$$F_a = b\rho S v^2. \quad (8.109)$$

Constanta b depinde de forma corpului: ea are valori mici ($\approx 0,01$) în cazul corpurilor aerodinamice (așa cum este forma de picătură) și poate atinge valori mult mai mari în cazul corpurilor concave ($b = 0,4$ în cazul parașutei desfăcute).

Trebuie să menționăm că, la viteze mici de mișcare în raport cu fluidul, forța de rezistență la înaintare este de natură predominant vâscoasă $F_r \approx F_v$. Dimpotrivă, la viteze mari, rolul predominant îl joacă forțele de antrenare care, conform ecuației (8.107) sunt proporționale cu v^2 . Există un regim intermediar al vitezelor, în care are loc trecerea de la curgerea laminară la cea turbulentă, când, practic, cele două tipuri de forțe, F_v și F_a , au valori comparabile. Se poate defini, în acest regim, o *viteză critică*, de trecere de la regimul laminar la cel turbulent, v_c . Procedeu pentru deducerea vitezei critice și a regimului la care apare turbulența a fost propusă de O. Reynolds²³, pentru cazul curgerii unui fluid într-o conductă. Reynolds a constatat, pe cale empirică, că această viteză critică depinde de vâscozitatea fluidului, de densitatea acestuia și de diametrul conductei:

$$v_c = R\rho^\alpha \eta^\beta d^\gamma. \quad (8.110)$$

Coefficientul de proporționalitate, R , din ecuația (8.110) se numește *coeficientul sau numărul lui Reynolds*. Aplicând, din nou, procedeul analizei dimensionale, vom găsi că $\alpha = -1$; $\beta = 1$ și $\gamma = -1$, cu alte cuvinte că:

$$v_c = \frac{R\eta}{\rho d}. \quad (8.111)$$

Determinarea pe cale experimentală a numărului lui Reynolds presupune măsurarea vitezei critice v_c . Aceasta reprezintă valoarea medie a curgerii fluidului prin conductă. Așa cum am demonstrat anterior în ecuația (8.100) viteza medie este jumătate din viteza fluidului la axul conductei.

Reynolds a constatat că, pentru majoritatea fluidelor vâscoase, intervalul valorilor critice a lui R la care apare turbulența este cuprins între $R_1 = 2000$ și $R_2 = 4000$. Numărul lui Reynolds are o relevanță importantă în aplicațiile tehnice ale aero și hidrodinamicii.

8.4 Probleme

1. Să se calculeze poziția punctului de aplicație al forței rezultante ce acționează asupra unui baraj din partea apei din lacul de acumulare care îl acoperă până la înălțimea H .

Răspuns: $H/3$

²³Osborne Reynolds (1842-1912), inginer și fizician englez, cu contribuții importante în studiul regimului de curgere a fluidelor vâscoase

2. Să se găsească ecuația matematică a suprafeței libere a unui lichid incompresibil, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei de rotație verticală (Oz). Se cunoaște accelerația gravitațională g .

$$\text{Răspuns: } z(x, y) = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$$

3. Pe o suprafață orizontală se află un vas cilindric cu lichid de densitate și vâscozitate cunoscute (ρ, η) . Nivelul lichidului este menținut constant la înălțimea h . Pe suprafața laterală este montat un tub orizontal de lungime l și rază interioară r la înălțimea h_1 de bază. Să se afle distanța pe orizontală, d , măsurată de la capătul capilarului până la punctul în care lichidul cade pe plan.

$$\text{Răspuns: } d = \frac{r^2 \rho g (h - h_1)}{8\eta l} \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

4. Între doi cilindri coaxiali, verticali, de aceeași înălțime $h = 2,5$ cm și diametre $d_1 = 10$ cm și $d_2 = 10,4$ cm se află aer. Cilindrul exterior se rotește cu turația $\nu = 360$ rot/min. Pentru a fi menținut fix, cilindrul interior este acționat cu forța tangențială $F = 1,38 \cdot 10^{-3} N$. Să se afle valoarea coeficientului de vâscozitate a aerului.

$$\text{Răspuns: } \eta = F(d_2 - d_1)/2\pi^2 \nu h d_2 d_1$$

5. Care este viteza minimă de curgere turbulentă a fluidului în jurul unei bile cu raza R_2 , care cade într-un lichid de densitate ρ_2 și vâscozitate η_2 , știind că, pentru o bilă cu raza R_1 , curgerea laminară într-un lichid de densitate ρ_1 și vâscozitate η_1 are loc pentru viteze mai mici decât v_1 .

$$\text{Răspuns: } v_2 > v_1 \rho_1 R_1 \eta_2 / \rho_2 R_2 \eta_1$$

6. Raza secțiunii unei conducte se micșorează conform legii $r = r_0 e^{-\alpha x}$, unde $\alpha = 0,50$ m iar x - distanța măsurată de la capătul conductei. Determinați raportul numerelor Reynolds între secțiunile aflate la distanța $\Delta x = 3,2$ m.

$$\text{Răspuns: } e^{\alpha \Delta x} = 5$$

7. Un cilindru de rază R și lungime l este traversat de un fluid în curgere staționară. Densitatea fluidului este ρ iar coeficientul de vâscozitate η . Știind că viteza de curgere depinde de distanța până la axa principală a tubului conform relației $v = v_0(1 - r^2/R^2)$, determinați:

- (a) volumul de fluid ce traversează secțiunea tubului în unitatea de timp;
- (b) energia cinetică a fluidului conținut în tub;
- (c) forța de frecare exercitată de fluid asupra tubului;
- (d) diferența de presiune la extremitățile tubului.

$$\text{Răspuns: (a) } Q = \frac{1}{2} \pi v_0 R^2; \text{ (b) } E_c = \frac{1}{6} \pi l R^2 \rho v_0^2; \text{ (c) } F_{fr} = 4\pi \eta l v_0; \text{ (d) } \Delta p = 4\eta l v_0 / R^2$$

8. Un vas cilindric cu secțiunea S conține un anumit volum de lichid. La baza acestuia există un mic orificiu de curgere, de secțiune s ($s < S$). Să se afle raportul dintre timpul

de curgere a primei jumătăți și timpul de curgere a celei de a doua jumătăți a lichidului din vas.

Răspuns: $\sqrt{2} - 1$.

9. Să se calculeze timpul necesar unei sfere de rază r și densitatea ρ să atingă viteza limită când cade într-un lichid cu vâscozitatea dinamică η . Sfera pleacă din repaus de la suprafața lichidului iar viteza limită se consideră ca fiind un procent din valoarea exactă.

Răspuns: $t = \frac{4\rho r^2}{9\eta} \ln 10$.

10. Un balon umplut cu heliu este legat de un fir cu lungimea $L = 2$ m și masa $m_f = 0.05$ Kg. Balonul are o formă sferică $R = 4$ m. Atunci când este eliberat, el ridică lungimea h din fir și apoi rămâne în echilibru. Știind că masa anvelopei balonului este $m_b = 0,25$ Kg, determinați valoarea h a porțiunii din fir ridicat de balon.

Răspuns: $h = \frac{(\rho_{\text{aer}} - \rho_{\text{He}})V - m_b}{m_f} L = 1.91$ m.

11. Un disc subțire, orizontal, de rază $R = 10$ cm, se rotește uniform cu viteza unghiulară $\omega = 60$ s⁻¹, într-o cavitate cilindrică plină cu ulei având coeficientul de vâscozitate $\eta = 0,08$ Poise. Distanța dintre disc și baza orizontală a cavității este $h = 1,0$ mm. Determinați puterea dezvoltată de forțele vâscoase. Se neglijează efectele de margine.

Răspuns: $P = \frac{\pi\eta\omega^2 R^4}{h} = 9$ W.

Elemente de mecanică analitică

Mecanica clasică permite analiza problemelor de mișcare a corpurilor reale folosind modele de tip punct material, sisteme de puncte materiale, solid rigid ori deformabil, fluid etc., prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării. Așa cum s-a discutat în capitolele din cuprinsul volumelor I și II, dacă se cunosc forțele ce acționează asupra sistemului și condițiile la limită (caracterizată de ansamblul (\vec{r}_0, \vec{v}_0)) se poate determina starea sistemului la orice moment ulterior. Pentru descrierea mișcării este nevoie, de obicei, de un număr de desene care să precizeze orientarea forțelor, a momentelor acestora, direcția de mișcare etc.

O abordare alternativă celei newtoniene este cea propusă de *mecanica analitică*, dezvoltată de către Lagrange¹ și Hamilton². Mecanica analitică oferă soluții mai rapide decât cea newtoniană, mai ales atunci când sistemul analizat conține un număr mare de componente, iar evoluția lui este afectată de restricții ale mișcării, datorate unor constrângeri mecanice. Așa cum afirma Lagrange în introducerea lucrării sale *La mécanique analytique* (1788), mecanica analitică nu mai are neapărată nevoie de reprezentări grafice, ea folosind doar relații analitice și calcul algebric în care sunt implicate viteze, coordonate și energii.

Vom prezenta, în cele ce urmează două formalisme specifice mecanicii analitice pentru studiul sistemelor mecanice:

1. formalismul Lagrange - în spațiul coordonate generalizate-timp: $\{q_i, t\}$;
2. formalismul Hamilton - în spațiul coordonate generalizate-impulsuri generalizate: $\{q_i, p_i\}$.

Aceste metode permit atât determinarea legilor de mișcare, prin rezolvarea unor ecuații diferențiale de ordinul doi (metoda Lagrange) sau de ordinul întâi (metoda Hamilton), cât și calcularea forțelor de reacție care produc restricții în mișcarea sistemelor.

¹Joseph Louis Lagrange (1736-1813) este cunoscut ca fondator al mecanicii analitice datorită lucrării *La mécanique analytique* (1788). Printre contribuțiile sale științifice se numără fundamentarea calculului variațional cu aplicații în dinamică (1760), studii legate de problema celor trei corpuri (1772), o serie de rezultate în teoria numerelor etc.

²Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) matematician irlandez. Hamilton și-a început studiile în 1824, iar în 1827, înainte de a și le termina devine profesor de astronomie și astronomul regelui Irlandei. Contribuțiile sale în optica geometrică și în mecanica clasică sunt de o importanță remarcabilă.

9.1 Mărimi caracteristice

Să examinăm un sistem de N particule care se mișcă într-un spațiu 3-dimensional. Conform mecanicii clasice newtoniene, fiecare particulă, j (cu $j = 1 \dots N$), este descrisă de 3 coordonate carteziene (x_j, y_j, z_j) astfel că, în total, numărul de coordonate care descriu sistemul este $3N$. Cunoscând toate forțele care acționează și toate condițiile inițiale:

- $3N$ pentru pozițiile inițiale (x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}) ;
- $3N$ pentru vitezele inițiale $(\dot{x}_{j0}, \dot{y}_{j0}, \dot{z}_{j0})$;

se poate cunoaște în orice moment poziția fiecărei particule și implicit a sistemului ca întreg. Punctul de pornire îl reprezintă aplicarea ecuației fundamentale a dinamicii newtoniene:

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j, \quad (9.1)$$

unde, vectorul de poziție al particulei j (\vec{r}_j), într-un sistem de coordonate carteziene este:

$$\vec{r}_j = x_j \hat{x} + y_j \hat{y} + z_j \hat{z}. \quad (9.2)$$

Rezolvarea sistemului (9.1), constituit din $3N$ ecuații diferențiale de ordinul doi, este posibilă în practică pentru un număr N de particule finit și suficient de mic.

9.1.1 Legături

În cazul unui sistem liber (pentru care nu există nici un fel de restricții asupra coordonatelor și vitezelor particulelor), numărul coordonatelor carteziene care descriu sistemul este $3N$. Dacă există restricții care restrâng domeniul valorilor posibile ale coordonatelor³, se spune că sistemul este *legat*. Restricțiile se exprimă prin anumite relații matematice ($k = \overline{1, l}$), care pot avea fie forma unor egalități⁴, fie cea a unor inegalități⁵:

$$f_k(\vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_j, t) = 0; \quad (9.3)$$

$$f_k(\vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_j, t) \geq 0. \quad (9.4)$$

Legăturile pot fi clasificate după tipul dependențelor pe care le implică:

- dacă depind de timp ca funcție explicită, se numesc *reonome*; în cazul în care nu depind de timp, se numesc *scleronome*;
- dacă depind de coordonate și de timp sau de componentele *integrabile* ale vitezei, se numesc *olonome*; în caz contrar se numesc *neolonome*. Ca urmare, legăturile neolonome sunt descrise de coordonate care nu pot varia independent una de cealaltă.

³De exemplu, mișcarea bilelor pe o masă de biliard este restrânsă la o mișcare într-un plan.

⁴Un solid rigid este un sistem caracterizat de valoarea constantă a distanței între oricare două puncte din interiorul său, deci de restricția $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$.

⁵De exemplu, mișcarea moleculelor de gaz dintr-un recipient sferic de rază R este restricționată de condiția: $r_i < R, i = \overline{1, N}$.

O constrângere *reonomă* este, de exemplu, atunci când o particulă se deplasează de-a lungul unei curbe care se deformează în timp sau în cazul moleculelor de gaz închise într-o sferă cu raza variabilă în timp. Mișcarea unei sfere mici pe suprafața unei sfere de rază mai mare este supusă unei restricții care nu poate fi definită decât până în momentul în care particula părăsește sfera mare, deci mișcarea este supusă unei *legături neolome*. Deoarece timpul nu apare explicit în relația de legătură, aceasta este și *scleronomă*.

Să luăm, spre exemplu, o legătură care depinde doar de coordonate și de timp:

$$f_k(x_j, t) = 0. \quad (9.5)$$

Prin derivarea sa în raport cu timpul rezultă:

$$\frac{df_k}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial f_k}{\partial t}, \quad (9.6)$$

adică o expresie care include și vitezele \dot{x}_i . Această relație permite o nouă modalitate de definire a legăturilor. Dacă toate relațiile care conțin vitezele se pot obține prin derivarea în raport cu timpul a unor ecuații în care apar numai coordonatele de poziție (și eventual timpul) se spune că sistemul este supus unor *legături olome*. În caz contrar, se spune că sistemul este supus la *legături neolome*.

Vom considera, în cele ce urmează, numai sisteme de particule supuse unor legături olome, exprimate prin relații de forma:

$$f_k(\vec{r}_j, t) = 0; \quad k = \overline{1, l}; \quad j = \overline{1, N}, \quad (9.7)$$

unde l reprezintă numărul de legături.

Trebuie făcută observația că numărul l nu poate fi arbitrar de mare, deoarece, dacă:

- $l > 3N$, sistemul devine incompatibil și nu are sens fizic;
- $l = 3N$, sistemul poate fi rezolvat și se pot determina cele $3N$ necunoscute;
- $l < 3N$, sistemul este compatibil nedeterminat.

Acest ultim caz este cel mai interesant din punct de vedere fizic. Vom nota prin:

$$n = 3N - l, \quad (9.8)$$

diferența dintre numărul necunoscutelor și numărul legăturilor (ecuațiilor). Acest număr întreg și pozitiv reprezintă *numărul gradelor de libertate* ale sistemului considerat. Ca urmare, dintre variabilele x_j , pot fi alese în mod arbitrar n variabile independente, iar restul $l = 3N - n$ pot fi determinate în funcție de primele, prin rezolvarea sistemului de ecuații:

$$f_k(\vec{r}_j, t) = 0 \quad k = \overline{1, l} < 3N. \quad (9.9)$$

9.1.2 Coordonate generalizate și viteze generalizate

Eliminarea dependențelor dintre coordonatele carteziene x_j, y_j, z_j ale celor N particule se poate face prin alegerea unui număr de n de coordonate independente $q_i, i = \overline{1, n}$. Astfel, se poate scrie:

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \quad (9.10)$$

$$y_j = y_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \quad (9.11)$$

$$z_j = z_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \quad (9.12)$$

sau, prin relația vectorială echivalentă:

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_i, t). \quad (9.13)$$

Relațiile de trecere de la setul de variabile \vec{r}_j la setul q_i și invers poate fi considerat ca o reprezentare parametrică a lui \vec{r}_j .

În cazul legăturilor scleronome, relațiile nu depind explicit de timp, ci prin intermediul coordonatelor independente q_i :

$$x_j = x_j(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)); \quad (9.14)$$

$$y_j = y_j(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)); \quad (9.15)$$

$$z_j = z_j(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)). \quad (9.16)$$

Sub formă restrânsă, relațiile anterioare se scriu:

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_i(t)), \quad (9.17)$$

unde $j = \overline{1, N}$ iar $i = \overline{1, n}$.

Coordonatele independente $\{q_i\}$ care descriu sistemul se numesc *coordonate generalizate*. În cazul unor sisteme, altele decât cele mecanice, coordonatele q_i pot reprezenta altceva decât lungimi sau unghiuri (de exemplu pot fi sarcini, curenți electrici sau masici, polarizație electrică etc.).

Vitezele carteziene ale particulelor sistemului se pot exprima în funcție de *vitezele generalizate*. Pentru aceasta, să considerăm o deplasare infinitesimală reală oarecare, $d\vec{r}_j$, ce se obține variind în mod arbitrar variabilele q_i de la valoarea q_i , la valoarea $q_i + dq_i$. În cazul legăturilor scleronome, putem scrie:

$$d\vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dq_i. \quad (9.18)$$

Împărțind ecuația precedentă la intervalul de timp dt în care variază $d\vec{r}_j$, obținem relațiile de transformare de la setul de viteze carteziene, la cele generalizate, $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, i = \overline{1, n}$:

$$\dot{\vec{r}}_j = \vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (9.19)$$

Să definim acum o *deplasare virtuală* a sistemului considerat, notată $\delta\vec{r}_j$, ca fiind orice variație continuă posibilă a vectorilor \vec{r}_j în acord cu relațiile matematice care definesc legăturile impuse sistemului, la o valoare constantă a variabilei t . Trebuie să facem distincția între deplasările virtuale ($\delta\vec{r}_j$), care se produc la $\delta t = 0$ și deplasările reale ($d\vec{r}_j$), care se produc într-un interval finit de timp, $dt \neq 0$, și de-a lungul cărora forțele sau constrângerile se pot modifica.

Deplasările virtuale pot fi exprimate în funcție de coordonatele independente conform relațiilor de transformare deja scrise:

$$\delta\vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (9.20)$$

9.1.3 Forțe generalizate

(a) Cazul unei singure particule

Să considerăm, pentru început, că asupra unei singure particule acționează o singură forță \vec{F} care determină o deplasare virtuală, $\delta\vec{r}$. Lucrul mecanic elementar virtual efectuat este:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (9.21)$$

unde F_x, F_y, F_z sunt componentele vectorului forță într-un sistem cartezian ortogonal de coordonate. Dacă exprimăm deplasările elementare virtuale $\delta x, \delta y, \delta z$ în funcție de coordonate generalizate, vom avea:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (9.22)$$

unde

$$Q_i = F_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_i}, \quad (9.23)$$

se numește *forța generalizată* asociată coordonatei generalizate q_i .

Observație: Dacă forța \vec{F} derivă dintr-o energie potențială, U , atunci:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (9.24)$$

Revenind în expresia forței generalizate dată de expresia (9.23), se obține:

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i}, \quad (9.25)$$

ceea ce înseamnă derivata parțială a funcției U în raport cu q_i . În cazul sistemelor conservative, forțele generalizate se pot determina cu ajutorul relației:

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.26)$$

(b) Cazul unui sistem de N particule

Să generalizăm analiza pentru cazul unui sistem format din N particule. Lucrul mecanic elementar al forțelor care ar produce o deplasare virtuală $\delta\vec{r}_j$ este:

$$\delta L = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \delta\vec{r}_j = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (9.27)$$

Relația (9.27) se poate scrie, în mod formal, ca un produs între o forță generalizată Q_i care produce modificarea coordonatei generalizate q_i , cu cantitatea δq_i :

$$dL = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (9.28)$$

unde:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}. \quad (9.29)$$

Mărimea:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \left(F_{jx} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{jy} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right) \quad (9.30)$$

se numește *forța generalizată* Q_i , corespunzătoare coordonatei generalizate q_i ($i = \overline{1, n}$). Deoarece, în general,

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j(\vec{r}_j, \dot{\vec{r}}_j, t), \quad (j = \overline{1, N}) \quad (9.31)$$

și forțele generalizate pot avea o dependență de tipul:

$$Q_i = Q_i(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (i = \overline{1, n}). \quad (9.32)$$

Așa cum am discutat, coordonatele generalizate nu au neapărat dimensiunea unor lungimi, de aceea nici forțele generalizate nu reprezintă neapărat o forță, însă, întotdeauna, produsul exprimat de relația (9.28) trebuie să aibă semnificația unui lucru mecanic!

Observație: Dacă forțele \vec{F}_j sunt conservative, relația (9.26) este valabilă și în acest caz.

9.1.4 Spațiul configurațiilor

Variabilelor generalizate q_i ($i = \overline{1, n}$) li se poate asocia un spațiu matematic, numit *spațiul configurațiilor*. Acest spațiu reprezentativ se poate vizualiza așezând pe o axă mulțimea coordonatelor generalizate $\{q_i\}$ iar pe axa perpendiculară, coordonata timp, t . Dimensiunea acestei reprezentări este $3N + 1$ pentru un sistem liber sau $(3N - l) + 1 = n + 1$, pentru un sistem legat.

Configurația sistemului este dată de valorile tuturor coordonatelor independente, q_i , la un moment dat. Unei configurații instantanee a sistemului de N particule îi corespunde un punct în spațiul configurațiilor, numit *punct reprezentativ*. Odată cu schimbarea în timp a configurației sistemului rezultă o schimbare a poziției punctului reprezentativ, astfel încât el

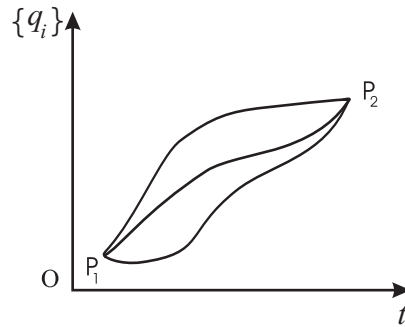


Figura 9.1: Evoluția în timp a sistemului din starea P_1 în starea P_2 de-a lungul unor traiectorii posibile.

descrie, în timp, o curbă. Curba descrisă de punctul reprezentativ este definită prin ecuațiile parametrice:

$$q_i = q_i(t) \quad i = \overline{1, n}, \quad (9.33)$$

și se numește *traiectorie generalizată*. Așadar, în acest spațiu, starea unui sistem este reprezentată de un punct, iar evoluția sistemului corespunde unei traiectorii (Fig.9.2).

Spațiul configurațiilor are avantajul de a reduce mișcarea celor N puncte materiale ale sistemului la mișcarea unui singur punct. Evoluția în timp a sistemului este descrisă de mișcarea punctului reprezentativ de-a lungul unei traiectorii generalizate în spațiul configurațiilor.

9.2 Formalismul lui Lagrange

9.2.1 Principiul lucrului mecanic virtual

În continuare, să considerăm o deplasare virtuală infinitezimală carteziană oarecare, δx_j , a unui punct din sistemul considerat. Acesta va trece, la momentul de timp t , de la coordonatele x_j la coordonatele $x_j + \delta x_j$ astfel încât să fie satisfăcute relațiile:

$$f_k(x_j + \delta x_j, t) = 0, \quad k = \overline{1, l}; \quad j = \overline{1, N}. \quad (9.34)$$

În reprezentarea din spațiul fazelor, o deplasare virtuală ar corespunde unei comutări verticale (salt) instantaneu de pe o traiectorie generalizată, pe alta. Dacă dezvoltăm după puterile lui δx_j și păstrăm numai termenii de ordinul întâi, vom obține:

$$f_k(x_j + \delta x_j, t) = f_k(x_j, t) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j + \dots \quad (9.35)$$

Folosind ec. (9.7), rezultă:

$$f_k(x_j + \delta x_j, t) \approx \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0, \quad (9.36)$$

relație ce specifică condițiile pentru ca deplasările δx_j să fie virtuale. Existența legăturilor atrage după sine apariția unor noi forțe, denumite *reacții de legătură*. Să le notăm pe acestea prin \vec{R}_j . Ecuațiile de mișcare trebuie să includă și aceste forțe, de aceea trebuie scrise sub forma:

$$m\ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j + \vec{R}_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (9.37)$$

Spre deosebire de forțele \vec{F}_j , care sunt cunoscute, reacțiile \vec{R}_j sunt necunoscute, fiind necesar ca ele să fie determinate din condițiile problemei. Pentru a depăși dificultățile legate de necunoașterea expresiilor forțelor de legătură, se propune un formalism analitic. Un indiciu al unei astfel de proceduri o oferă solidul rigid. Lucrul mecanic al forțelor interne, care țin sistemul legat păstrând distanța dintre oricare două puncte constantă, este nul. În mod similar, pentru orice deplasare virtuală infinitezimală ce satisface condițiile (9.36), lucrul mecanic al forțelor de reacție trebuie să fie nul:

$$\sum_{j=1}^N \vec{R}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0. \quad (9.38)$$

Această afirmație constituie enunțul *principiului lucrului mecanic virtual* sau *principiul lui d'Alembert*⁶ care stă la baza formalismului Lagrange. Pe baza lui se pot elimina reacțiile de sprijin \vec{R}_j din ecuațiile de mișcare (9.37).

Dacă se efectuează produsul scalar cu $\delta \vec{r}_j$ în ambii membri ai ecuației (9.37) și apoi se sumează după toate valorile indicelui j , se obține:

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{\vec{r}}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j. \quad (9.39)$$

Principiul lucrului mecanic virtual se mai poate scrie și sub forma:

$$\sum_{j=1}^N \left(m_j \ddot{\vec{r}}_j - \vec{F}_j \right) \cdot \delta \vec{r}_j = 0. \quad (9.40)$$

9.2.2 Ecuațiile lui Lagrange

Să înlocuim în expresia principiului d'Alembert (9.40) valorile deplasărilor infinitezimale virtuale (9.20) și să ne folosim de expresia forței generalizate (9.29):

$$\sum_{j=1}^N \left(m_j \ddot{\vec{r}}_j - \vec{F}_j \right) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \quad (9.41)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n m_j \ddot{\vec{r}}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0. \quad (9.42)$$

⁶Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) matematician și filozof francez este cunoscut ca fondator, alături de Denis Diderot, al *Enciclopediei*. De asemenea el a adus contribuții deosebit de importante în teoria ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale.

Primului termen al acestei ultime relații poate fi scris și sub forma:

$$\sum_{j=1}^N m_j \ddot{\vec{r}}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_j \dot{\vec{r}}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) - m_j \dot{\vec{r}}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \right]. \quad (9.43)$$

Avem, pe de altă parte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t \partial q_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_k \partial q_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right), \end{aligned} \quad (9.44)$$

iar din (9.19) se observă că:

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \frac{d\vec{v}_j}{dq_i}. \quad (9.45)$$

Revenim cu aceste substituții în (9.42), care devine:

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_j \vec{v}_j \cdot \frac{d\vec{v}_j}{dq_i} \right) - m_j \vec{v}_j \cdot \frac{d\vec{v}_j}{dq_i} \right] - Q_i \right] \delta q_i = 0. \quad (9.46)$$

Dacă legăturile sunt olonome, δq_i sunt arbitrari și independenți și ca urmare:

$$\sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_j \vec{v}_j \cdot \frac{d\vec{v}_j}{dq_i} \right) - m_j \vec{v}_j \cdot \frac{d\vec{v}_j}{dq_i} \right] = Q_i. \quad (9.47)$$

Introducem expresia energiei cinetice a sistemului:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j^2, \quad (9.48)$$

și vom ajunge la setul de ecuații diferențiale de ordin doi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9.49)$$

care reprezintă *ecuațiile Lagrange*. Dacă forțele generalizate provin dintr-o energie potențială U :

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (9.50)$$

ecuațiile lui Lagrange (9.49) devin:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.51)$$

Ele se pot scrie sub formă mai compactă, introducând *funcția Lagrange* a sistemului, prin relația:

$$L \equiv E_c - U. \quad (9.52)$$

Observație. Deoarece energiile sunt mărimi scalare, rezultă că și funcția Lagrange este o mărime scalară.

Ecuțiile Lagrange capătă atunci forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.53)$$

În concluzie, formalismul Lagrange ne oferă o metodă de rezolvare a problemelor de mecanică urmând următoarele etape:

1. stabilirea numărului gradelor de libertate și alegerea coordonatele generalizate q_i care descriu configurația sistemului;
2. determinarea vitezelor generalizate și exprimarea energiei cinetice E_c ;
3. dacă sistemul este conservativ, exprimarea forțelor generalizate în funcție de energia potențială; în caz contrar, aceste forțe se contruiesc;
4. scrierea ecuațiilor lui Lagrange și precizarea condițiilor inițiale $q_i(t_0)$ și $\dot{q}_i(t_0)$, ($i = \overline{1, n}$);
5. integrarea ecuațiilor lui Lagrange, obținându-se în final soluția $q_i = q_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$);
6. determinarea coordonatelor $x_j(t)$ ($j = \overline{1, N}$) și apoi a reacțiunilor de sprijin \vec{R}_j ($j = \overline{1, N}$).

9.2.3 Cazul legăturilor neolonome. Metoda multiplicatorilor Lagrange

În cazul legăturilor olonome, coordonatele dependente au putut fi eliminate prin introducerea coordonatelor generalizate. Acest lucru nu se mai poate realiza dacă legăturile sunt neolonome. Deși nu există o metodă generală de analiză pentru cazul legăturilor neolonome, să considerăm, în cele ce urmează, doar constrângeri ce pot fi exprimate sub formă diferențială.

Urmărind același raționament de deducere a ecuațiilor Lagrange folosind principiul d'Alembert (9.40), vom folosi expresia deplasării virtuale, care, în acest caz, nu mai conține doar termeni ce variază în mod independent. De aceea, în urma efectuării calculelor, se ajunge la relația:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0. \quad (9.54)$$

Pentru sisteme conservative, avem:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \quad (9.55)$$

Pentru a considera doar deplasările individuale independente se introduc niște mărimi cu valori arbitrare, numite *multiplicatori Lagrange*, $\lambda_k, k = \overline{1, s}$ (unde k corespunde numărului de relații de legătură dintre variabilele q_i). Deplasările virtuale se produc la momente de timp constante, ca urmare, relația diferențială a legăturilor este:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (9.56)$$

Folosind multiplicatorii Lagrange se elimină deplasările dependente conform relației:

$$\sum_{k=1}^s \lambda_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \quad (9.57)$$

sau:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (9.58)$$

Ca urmare, scăzând relațiile (9.54) și (9.58) se obține:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} - Q_i - \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \quad (9.59)$$

Ecuțiile Lagrange pentru legături neolonome devin:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} - Q_i = \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}. \quad (9.60)$$

Pentru cazul câmpului conservativ, ecuațiile Lagrange se scriu sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i}. \quad (9.61)$$

Ecuțiile Lagrange pentru legături neolonome conțin n variabile q_i dintre care s sunt dependente și $n - s$ sunt independente. Pentru coordonatele dependente indicele i are valorile $i = \overline{1, s}$ iar pentru cele independente, indicele i are valorile $i = \overline{s + 1, n}$.

9.3 Formalismul lui Hamilton

Cea de-a doua modalitate analitică de studiu a sistemelor de particule constă în folosirea ansamblului: *coordonate generalizate-impulsuri generalizate*. În acest caz se consideră că impulsurile și coordonatele trebuie tratate ca seturi independente de variabile⁷.

Acest formalism, deși mărește dimensiunea sistemului la $2n$, are marele avantaj de a lucra cu două seturi de ecuații diferențiale de ordinul întâi, mult mai ușor de integrat. Un set de ecuații ne spune cum variază în timp *poziția* diferitelor particule din sistem iar celălalt set ne spune cum variază în timp *impulsul* lor generalizat. În fiecare caz, vitezele de variație sunt determinate cunoscând diferitele poziții sau impulsuri la *momente* de timp specificate.

9.3.1 Principiul lui Hamilton

Să presupunem că sistemul trece dintr-o stare P_1 în care se află la momentul inițial t_1 , într-o stare P_2 la momentul t_2 . Evoluția sistemului poate avea loc printr-o multitudine de stări intermediare *posibile*. În Fig.9.2 sunt reprezentate trei dintre acestea. În spațiul configurațiilor

⁷Ne putem imagina că impulsurile *ar putea fi* complet independente de schimbările de poziție.

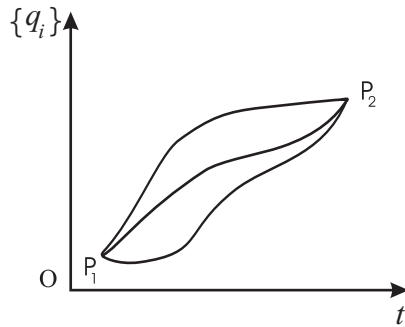


Figura 9.2: Traiectorii în spațiul configurațiilor

se pot imagina mai multe traiectorii virtual posibile. În realitate însă, sistemul evoluează pe o singură cale. Această cale se găsește cu ajutorul principiului formulat de Hamilton. Pentru orice sistem mecanic, dintre toate drumurile posibile este realizabil cel pentru care funcția acțiune, definită prin relația:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (9.62)$$

admite un extremum. Condiția de extremum este:

$$\delta S = 0, \quad (9.63)$$

și aceasta se poate calcula dacă se cunoaște funcția Lagrange $L(q_i, \dot{q}_i, t)$:

$$L = E_c - U = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2 - U(q_i, t), \quad (9.64)$$

unde E_c — reprezintă energia cinetică totală iar U — energia potențială.

Vom arăta în continuare că ecuațiile Lagrange pot fi obținute și folosind principiul Hamilton.

Să considerăm o abatere infinitesimală de la traiectoria virtuală, de la $q_i(t)$ la $q_i(t) + \delta q_i(t)$. Impunând condiția de extrem (9.63) și dezvoltând în serie de puteri ale lui δq_i și $\delta \dot{q}_i$ din care

reținem doar termenii de ordinul întâi, se obține:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (9.65)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \dots \right) dt \quad (9.66)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \dots \right] dt \quad (9.67)$$

$$\approx \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt \quad (9.68)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (9.69)$$

Deoarece $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, se obține⁸:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \quad (9.70)$$

Relația precedentă este adevărată la orice moment din intervalul de timp considerat. În cazul legăturilor olonome δq_i sunt variații independente, astfel că se obțin direct ecuațiile Lagrange (9.53).

9.3.2 Ecuațiile canonice

Hamilton introduce în anul 1834 un alt mod de a determina starea mecanică a unui sistem, precum și evoluția acesteia în timp. În formularea lui Hamilton, starea unui sistem de puncte materiale se poate descrie cu ajutorul a $2n$ variabile: q_1, q_2, \dots, q_n , care sunt *coordonatele generalizate* ale lui Lagrange și variabilele p_1, p_2, \dots, p_n , denumite *impulsuri generalizate*.

Hamilton definește impulsurile generalizate prin relațiile:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.71)$$

În cazul cel mai simplu, în care impulsurile p_i au expresiile⁹:

$$p_i = m_i \dot{q}_i. \quad (9.72)$$

⁸deplasarea virtuală este echivalentă cu saltul de pe o traiectorie pe alta la un moment de timp precizat

⁹Aici L este o funcție pătratică, dar nu și omogenă, în \dot{q}

și se mai numesc *impulsurile conjugate* variabilelor de poziție q_i . Folosind ecuația Lagrange (9.53) se observă că:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (9.73)$$

Gruparea (q_i, p_i) se numește pereche de *variabile conjugate*. Dacă

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (9.74)$$

coordonata q_i se numește *coordonată ciclică*. Folosind ecuația (9.53), variabila conjugată lui q_i satisface relația:

$$\frac{d}{dt}(p_i) = 0 \Rightarrow p_i = \text{const}. \quad (9.75)$$

Ca urmare, impulsul generalizat, conjugat unei coordonate ciclice, se conservă.

Funcția Lagrange depinde în general de coordonatele generalizate, q_i , vitezele generalizate, \dot{q}_i și timp, t . Ca urmare, deoarece $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ variația în timp se determină conform relației:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (9.76)$$

Folosind ecuațiile Lagrange (9.53) rezultă:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} = \quad (9.77)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (9.78)$$

Deoarece în acest caz suma și derivata comută între ele, grupând termenii și ținând seama de (9.71), se obține:

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i \right) = \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (9.79)$$

Se definește *funcția lui Hamilton* cu ajutorul expresiei:

$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L. \quad (9.80)$$

De cele mai multe ori (dar nu întotdeauna!), funcția Hamilton a sistemului coincide cu energia totală. În general însă, funcția lui Hamilton depinde de coordonatele generalizate, impulsurile generalizate și de timp.

$$H = H(q_i, p_i, t). \quad (9.81)$$

Relația (9.79) devine:

$$-\frac{dH}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (9.82)$$

Se observă că dacă funcția Lagrange nu depinde în mod explicit de timp, atunci funcția Hamilton se conservă:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const.} \quad (9.83)$$

Diferențiind relația (9.80) și folosind diferențiala funcției Lagrange, rezultă:

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^n d\dot{q}_i p_i - dL \quad (9.84)$$

$$= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^n d\dot{q}_i p_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (9.85)$$

care devine, utilizând definiția impulsului generalizat:

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (9.86)$$

Această expresie o comparăm cu diferențiala funcției $H(p_i, q_i, t)$:

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (9.87)$$

Prin identificare, se obține:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad (9.88)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad (9.89)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (9.90)$$

Dacă vom ține cont de ecuațiile Lagrange precum și de definiția impulsului generalizat, relațiile (9.88) și (9.89) capătă formele:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad (9.91)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, i = \overline{1, n}. \quad (9.92)$$

Ecuațiile (9.91) și (9.92) se numesc *ecuațiile canonice* sau *ecuațiile lui Hamilton*¹⁰. Ele formează un sistem de $2n$ ecuații diferențiale de ordinul întâi. Rezolvarea lor necesită cunoașterea a $2n$ condiții inițiale referitoare la coordonatele generalizate și la impulsurile generalizate la momentul de inițial, t_0 și anume:

$$q_i(t_0) = q_{i0}; \quad (9.93)$$

$$p_i(t_0) = p_{i0}. \quad (9.94)$$

¹⁰Se observă o simetrie a acestor ecuații: dacă în membrul întâi apare derivata în raportul cu timpul a unei mărimi, în cea de a doua apare derivata în raport cu variabila conjugată.

Soluția sistemului reprezintă dependențele de timp ale coordonatelor și impulsurilor generalizate:

$$q_i = q_i(t); \quad (9.95)$$

$$p_i = p_i(t). \quad (9.96)$$

Este remarcabil faptul că ecuațiile lui Hamilton sunt valabile pentru orice sistem fizic, cu condiția alegerii adecvate a hamiltonianului. Chiar și teoria relativității poate fi pusă sub forma hamiltoniană. Mai mult decât atât, această formulare reprezintă punctul de pornire în deducerea ecuațiilor mecanicii cuantice.

9.3.3 Semnificația funcției Hamilton

În cazul cel mai simplu, în care funcția Lagrange are forma (9.64), atunci, conform definiției:

$$H = \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i^2 - L; \quad (9.97)$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i^2 + U(q_i, t). \quad (9.98)$$

Ca urmare, hamiltonianul sistemului este determinat ca suma energiilor cinetice și potențiale ale sistemului. Cu alte cuvinte, el reprezintă *energia totală* a sistemului de puncte materiale supus la legături olonome. Aceeași semnificație se obține și în cazul *legăturilor scleronome*.

Dacă însă legăturile impuse sistemului depind explicit de timp, adică sunt *legături reonome*, atunci, în expresia energiei cinetice apar și termeni de gradul întâi față de vitezele generalizate. În acest caz, funcția Hamilton nu mai coincide cu energia totală a sistemului.

9.3.4 Spațiul fazelor

În formalismul lui Hamilton, evoluția sistemului poate fi descrisă cu ajutorul unui spațiu cu $2n$ dimensiuni¹¹, care are drept axe, coordonatele generalizate și impulsurile generalizate. Un punct reprezentativ din acest spațiu se numește *fază*. El determină complet starea sistemului prin fixarea tuturor perechilor $\{q_i, p_i\}$ la un moment dat.

Evoluția în timp a sistemului este determinată de traiectoria punctului reprezentativ din spațiul $\{q_i, p_i\}$, numit *spațiul fazelor*¹² (Fig.9.3). Fiecărui punct din spațiul fazelor îi corespunde o anumită traiectorie, iar două traiectorii diferite nu se pot intersecta. Datorită unicității soluțiilor ecuațiilor Hamilton, sistemul evoluează, plecând din diferite condiții inițiale pe traiectorii diferite. Pentru sistemele conservative, mișcarea în spațiul fazelor este restrânsă pe o hiper-suprafață determinată de condiția:

$$H(p_i, q_i) = E = \text{const.} \quad (9.99)$$

¹¹Nu există o speranță prea mare în a vizualiza acest spațiu! De fapt marele secret constă în nici măcar a nu încerca a face acest lucru.

¹²Noțiune introdusă în fizică de J. W. Gibbs

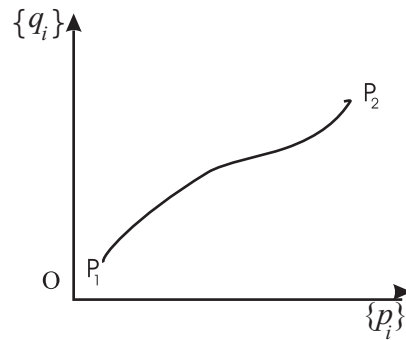


Figura 9.3: O traiectorie posibilă în spațiul fazelor.

Deoarece sistemul este finit, are volum și energie finită (coordonata și impulsul au un domeniu finit de variație), suprafața de energie constantă este o suprafață închisă. Ne putem imagina că se poate selecta o regiune din spațiul fazelor care să corespundă unui domeniu de valori posibile ale coordonatelor sau impulsurilor generalizate ale tuturor particulelor din sistem. Se pot defini următoarele mărimi:

- Volumul elementar în spațiul fazelor, cu valori ale coordonatei generalizate în intervalul $(p_i, p_i + dp_i)$ și ale impulsului generalizat în intervalul $(q_i, q_i + dq_i)$ are valoarea:

$$d\Gamma = dp_1 dp_2 \dots dp_n dq_1 dq_2 \dots dq_n = \prod_{i=1}^n dp_i dq_i. \quad (9.100)$$

- Volumul total în spațiul fazelor mărginit de suprafața (9.99) este:

$$\Gamma = \int \dots \int_{H(p_i, q_i) \leq E} dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n. \quad (9.101)$$

După cum se observă, volumul în spațiul fazelor este o funcție monoton crescătoare de energia totală:

$$\Gamma = \Gamma(E). \quad (9.102)$$

Din caracteristicile generale ale unui sistem conservativ rezultă faptul că fiecare stare posibilă și implicit fiecare traiectorie posibilă a sistemului considerat este situată pe hipersuprafața de energie constantă (9.99).

9.3.5 Teorema lui Liouville

Să considerăm un volum elementar în spațiul fazelor și să urmărim evoluția în timp a acestuia. Conform ecuațiilor lui Hamilton rezultă că, pentru o valoare dată a funcției Hamilton, traiectoriile a două puncte diferite nu se pot intersecta. O consecință imediată a acestei observații este conservarea numărului de puncte reprezentative ale ansamblului. Acest lucru înseamnă că, pentru un volum elementar, variația în timp a numărului de particule se face

doar pe seama traversării ”pereților” (flux de puncte prin suprafața care mărginește volumul considerat). Putem scrie așadar o relație similară celei de conservare a masei fluidelor, adică

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}). \quad (9.103)$$

Operatorul divergență în acest spațiu $2n$ - dimensional se calculează cu ajutorul relației:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \vec{v}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \vec{v}). \quad (9.104)$$

Ținând cont de ecuațiile canonice (9.80), (9.81) se poate scrie:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \sum_{i=1}^n \left(\rho \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \rho \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) \quad (9.105)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\rho \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \rho \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) \quad (9.106)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right), \quad (9.107)$$

adică:

$$-\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) \quad (9.108)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) \quad (9.109)$$

$$= \{H, \rho\}. \quad (9.110)$$

Paranteza $\{H, \rho\}$ din ecuația anterioară este numită paranteza Poisson și este explicată în paragraful următor. Ecuația obținută se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad (9.111)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} \right] \rho = 0; \quad (9.112)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (9.113)$$

Interpretăm relația (9.113) ca o evoluție în spațiul fazelor, în așa fel, încât ”lichidul” fazic să își păstreze densitatea constantă. Cu alte cuvinte, *volumul în spațiul fazelor rămâne constant* (Fig.9.4). Dacă la momentul t_1 toate punctele caracteristice sunt distribuite în spațiul fazelor astfel încât ocupă regiunea hașurată în Fig.9.4 și notată G_1 , atunci volumul hașurat poate să-și schimbe doar forma, nu și valoarea. La momentul t_2 el poate ocupa, spre exemplu, regiunea hașurată G_2 . Această afirmație constituie *teorema lui Liouville*¹³.

¹³Joseph Liouville (1809-1882) fost profesor de matematică și mecanică la École Polytechnique și la Sorbona din Paris. A fost considerat cel mai bun matematician francez din perioada 1840-1870, contribuțiile sale în domeniul mecanicii statistice, problemelor de geometrie diferențială și funcțiilor speciale fiind considerate de o importanță deosebită.

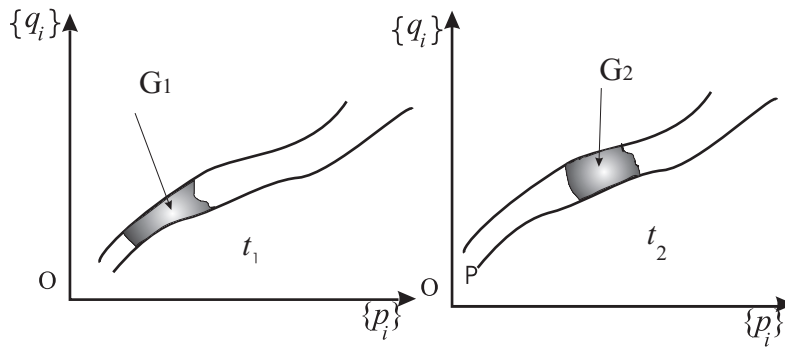


Figura 9.4: Conservarea volumului în spațiul fazelor.

Așadar:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{H, \rho\} = 0. \quad (9.114)$$

Pentru ansamblurile staționare densitatea nu depinde de timp și ca urmare:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \{H, \rho\} = 0. \quad (9.115)$$

Această relație se realizează nu numai când $\rho = const$, ci și atunci când $\rho = \rho(H)$. Dependența $\rho = \rho(H)$ se exprimă în funcție de condițiile concrete în care se află sistemul studiat.

9.3.6 Parantezele lui Poisson

Fie o funcție oarecare $f = f(q_i, p_i, t)$. Derivata totală în raport cu timpul se scrie sub forma:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (9.116)$$

Folosind ecuațiile lui Hamilton (9.91) și (9.92), rezultă:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (9.117)$$

Se definește *paranteza Poisson* dintre funcția f și funcția H , relația matematică:

$$\{H, f\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (9.118)$$

În aceste condiții expresia (9.116) se poate scrie sub forma:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \quad (9.119)$$

Pentru cazul în care funcția f este constantă în timp:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0. \quad (9.120)$$

Funcția f care îndeplinește condiția (9.120) se numește *integrală primă*. Dacă în plus, funcția f nu depinde în mod explicit de timp ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$), atunci condiția de integrală primă devine:

$$\{H, f\} = 0. \quad (9.121)$$

Pentru două funcții oarecare, f și g , paranteza Poisson se scrie:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (9.122)$$

Parantezele Poisson ale variabilelor canonice au valorile:

$$\{q_i, q_j\} = 0; \quad (9.123)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0; \quad (9.123)$$

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \quad (9.124)$$

unde $\delta_{ij} = 1$ pentru $i = j$ și $\delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$.

În cazul în care g (sau f) este coordonata generalizată q_i sau impulsul generalizat p_i , se obține:

$$\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}; \quad (9.125)$$

$$\{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (9.126)$$

Dacă funcția f este chiar funcția Hamilton, relațiile obținute sunt tocmai ecuațiile canonice:

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\}; \quad (9.127)$$

$$\dot{p}_i = \{H, p_i\}. \quad (9.128)$$

9.4 Teoria Hamilton-Jacobi

9.4.1 Transformările canonice

Alegerea convenabilă a variabilelor care descriu mișcarea unui sistem poate aduce simplificări considerabile ale calculelor matematice. De aceea, vom căuta în cele ce urmează, acele transformări de coordonate care să simplifice cât mai mult problema. Să ne amintim faptul că, pentru coordonate ciclice, impulsurile generalizate conjugate acestora se conservă.

Fie un sistem de puncte materiale cu n grade de libertate, a cărui mișcare este caracterizată de ecuațiile canonice (9.80) și (9.81). Să urmărim cum se transformă aceste ecuații dacă asupra variabilelor facem o transformare de forma:

$$P_i = P_i(p_i, q_i, t); \quad (9.129)$$

$$Q_i = Q_i(p_i, q_i, t), \quad (9.130)$$

unde funcțiile P_i, Q_i admit derivate parțiale de ordinul doi, continue.

Condiția necesară și suficientă ca și variabilele p_i și q_i să poată fi exprimate în funcție de variabilele P_i și Q_i este ca jacobianul variabilelor P_i, Q_i față de variabilele p_i, q_i să fie diferit de zero:

$$J \equiv \frac{\partial(P_1, P_2, \dots, P_n; Q_1, Q_2, \dots, Q_n)}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, q_2, \dots, q_n)} \neq 0. \quad (9.131)$$

Dacă diferențiem relațiile (9.129), (9.130), obținem:

$$dP_i = \frac{\partial P_i}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial P_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt; \quad (9.132)$$

$$dQ_i = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt. \quad (9.133)$$

Se observă că jacobianul J este chiar determinantul termenilor din membrul drept al ecuațiilor:

$$dP_i - \frac{\partial P_i}{\partial t} dt = \frac{\partial P_i}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial P_i}{\partial q_j} dq_j; \quad (9.134)$$

$$dQ_i - \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j. \quad (9.135)$$

Să scriem acum ecuațiile canonice, folosind noile variabile:

$$H' = H'(P_i, Q_i, t) \quad i = \overline{1, n} \quad (9.136)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}; \quad (9.137)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}. \quad (9.138)$$

Pentru ca ecuațiile de mișcare scrise în variabilele P_i, Q_i să aibă forma canonică, trebuie impuse unele restricții. Acestea rezultă din aplicarea principiului lui Hamilton ambelor sisteme de variabile:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right] dt = 0; \quad (9.139)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - H'(P_i, Q_i, t) \right] dt = 0. \quad (9.140)$$

Valabilitatea simultană a acestor relații nu înseamnă neapărat egalitatea integranzilor, ci ei pot să difere printr-o derivată totală a unei funcții arbitrare, F . Ca urmare se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - H'(P_i, Q_i, t) + \frac{dF}{dt} \quad (9.141)$$

sau:

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i \right) + (H' - H) dt = dF(p_i, q_i, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (9.142)$$

unde $F(p_i, q_i, t)$ se numește *funcție generatoare* a transformării. Restricția impusă se numește *condiția de canonicitate*. De aici rezultă imediat că:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}; \quad (9.143)$$

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i}; \quad (9.144)$$

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (9.145)$$

În concluzie, cunoscând funcția generatoare F , se pot stabili relațiile dintre vechile și noile variabile canonice ale sistemului și totodată se poate afla noua funcție Hamilton. În cazul în care acesta nu depinde de timp în mod explicit:

$$H' = H. \quad (9.146)$$

Dacă considerăm, în continuare, două mărimi mecanice oarecare f și g , se poate demonstra că parantezele Poisson ale acestor mărimi scrise cu setul de variabile p_i, q_i și respectiv P_i, Q_i sunt egale, dacă cele două seturi de variabile pot fi găsite printr-o transformare canonică de tipul:

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q}.$$

Această proprietate se numește *invarianța parantezelor Poisson la transformările canonice*.

9.4.2 Ecuația Hamilton-Jacobi

Transformările canonice permit găsirea acelor coordonate care să conducă la o formă simplificată a ecuațiilor Hamilton. Deoarece forma cea mai simplă pe care o poate avea un sistem canonic corespunde cazului în care hamiltonianul H' este identic nul, sistemul canonic considerat (P, Q) conduce la relațiile:

$$\dot{Q}_i = 0; \quad (9.147)$$

$$\dot{P}_i = 0, \quad (9.148)$$

Aceste condiții impun necesitatea ca variabilele Q_i, P_i să fie constante în timp.

Să considerăm $S(P, q, t)$ ca o funcție generatoare a transformării, care satisface ecuațiile:

$$p_i = \frac{\partial S(P, q, t)}{\partial q_i}; \quad (9.149)$$

$$H' - H = \frac{\partial S(P, q, t)}{\partial t}. \quad (9.150)$$

Condiția de anulare a hamiltonianului H' conduce la relația:

$$\frac{\partial S(P, q, t)}{\partial t} + H(p, q, t) = 0.$$

Dacă vom înlocui în hamiltonianul $H(p_i, q_i, t)$ variabilele p_i prin expresiile date de (9.149), se obține, pentru funcția generatoare S a transformării, ecuația:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0, \quad (9.151)$$

cunoscută sub numele de *ecuația Hamilton-Jacobi*¹⁴.

Ecuația Hamilton-Jacobi este o ecuație cu derivate parțiale pentru funcția S ¹⁵ și reprezintă o exprimare echivalentă a legilor mișcării pentru sistemul mecanic considerat. O soluție a acestei ecuații, se numește *integrală completă*.

9.5 Teoreme de conservare în mecanica analitică

Teoremele de conservare care se vor deduce în cele ce urmează rezultă din invarianța funcției Lagrange la diferite proprietăți de simetrie ale spațiului și timpului.

- Proprietatea de uniformitate a timpului determină legea de conservare a energiei.
- Proprietatea de omogenitate a spațiului (invarianța la translații) determină legea de conservare a impulsului.
- Proprietatea de izotropie a spațiului (invarianța la rotații) determină conservarea momentului unghiular.

9.5.1 Conservarea energiei

Dacă funcția Lagrange nu depinde în mod explicit de timp, atunci $\partial L/\partial t = 0$. Din ecuațiile Lagrange, rezultă:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (9.152)$$

sau:

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (9.153)$$

Funcția

$$E = L - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

care este tocmai funcția Hamilton a sistemului, își păstrează în aceste condiții valoarea constantă. Deoarece pentru sisteme conservative funcția lui Lagrange a unui sistem mecanic este:

$$L = E_c - U, \quad (9.154)$$

¹⁴Carl Gustav Jacobi (1804-1851), fizician german cunoscut pentru contribuțiile sale fundamentale în domeniul algebrei, în teoria funcțiilor eliptice și a ecuațiilor cu derivate parțiale.

¹⁵Funcția generatoare S din ecuația Hamilton-Jacobi diferă de *acțiunea* din formalismul Lagrange doar printr-o constantă aditivă și are dimensiunea de energie×timp.

unde E_c – energia cinetică, U – este energia potențială, iar expresia funcției Hamilton este dată de relația (9.80) se obține pentru (9.153):

$$\frac{d}{dt}(E_c + U) = 0. \quad (9.155)$$

Ca urmare:

$$E_c + U = \text{const.} \quad (9.156)$$

adică energia totală pentru un sistem conservativ se conservă.

9.5.2 Conservarea impulsului total

Să considerăm un sistemul simplu constituit dintr-o singură particulă, caracterizată de funcția Lagrange $L(q_k, \dot{q}_k)$, unde $k = x, y, z$. Să considerăm o deplasare infinitezimală (translație) a sistemului, astfel încât coordonata generalizată q_k să se modifice cu o cantitate foarte mică (ε):

$$q'_k = q_k + \varepsilon. \quad (9.157)$$

Impunând condiția ca funcția Lagrange să rămână neschimbată, deoarece:

$$\delta q_k = q'_k - q_k = \varepsilon, \quad (9.158)$$

rezultă:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k = \varepsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (9.159)$$

Deplasarea ε fiind independentă și arbitrară, condiția de invarianță, $\delta L = 0$ conduce la:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (9.160)$$

Din ecuațiile Lagrange se obține:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad (9.161)$$

adică:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const.} \quad (9.162)$$

Deoarece $L = E_c - U$, relația anterioară se mai poate scrie:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial(E_c - U)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \right) = m \dot{q}_k = p_k = \text{const.} \quad (9.163)$$

Deoarece am considerat o singură particulă, impulsul generalizat p_k reprezintă pe oricare dintre cele trei componente ale vectorului \vec{p} într-un sistem de referință. Generalizând, se poate afirma că, dacă funcția Lagrange este invariantă în raport cu translația sistemului, impulsul sistemului pe direcția translației se conservă.

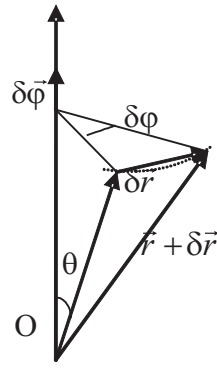


Figura 9.5: O rotație infinitesimală.

9.5.3 Conservarea momentului cinetic

Să considerăm, în cele ce urmează, că sistemul execută o rotație cu un unghi infinitesimal și să impunem condiția de invarianță a funcției Lagrange. Numim vector de rotație infinitesimală, $\delta\vec{\varphi}$, vectorul paralel cu axa de rotație, ce are ca valoare absolută - mărimea $\delta\varphi$, adică unghiul de rotație în jurul unei axe.

După cum se observă din Fig. (9.5):

$$|\delta\vec{r}| = r \sin \theta \cdot d\varphi \quad (9.164)$$

sau, în scriere vectorială:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}. \quad (9.165)$$

Variația infinitesimală de viteză, corespunzătoare acestei rotații este:

$$\delta\vec{v} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{v}. \quad (9.166)$$

Din condiția de invarianță a funcției Lagrange, rezultă:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_k} \delta \vec{r}_k + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_k} \delta \vec{v}_k \right) = 0. \quad (9.167)$$

După înlocuirea expresiilor deplasărilor infinitesimale, obținem:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_k} (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_k) + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_k} (\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_k) \right] = 0, \quad (9.168)$$

sau:

$$\sum_{i=1}^n \left[\dot{\vec{p}}_k (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_k) + \vec{p}_k (\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_k) \right] = 0. \quad (9.169)$$

Deoarece $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ se obține:

$$\sum_{i=1}^n \delta\vec{\varphi} \cdot \left[(\vec{r}_k \times \dot{\vec{p}}_k) + (\vec{v}_k \times \vec{p}_k) \right] = 0, \quad (9.170)$$

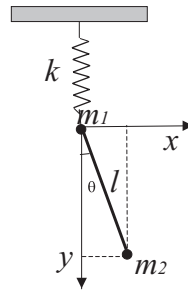


Figura 9.6

sau:

$$\delta\vec{\varphi} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = 0. \quad (9.171)$$

Deoarece $\delta\vec{\varphi}$ este ales arbitrar, relația anterioară este adevărată, dacă:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = 0, \quad (9.172)$$

ceea ce înseamnă că:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = \text{const.} \quad (9.173)$$

Dacă funcția Lagrange rămâne invariantă la rotație, momentul unghiular total al sistemului se conservă.

9.6 Probleme

- Un pendul matematic cu masa m_2 este suspendat de o bară rigidă foarte ușoară, de lungime l . La rândul ei, bara este prinsă de un corp de masă m_1 agățat de un resort cu constanta elastică k (vezi Fig.9.6). Se presupune că mișcarea sistemului are loc doar în planul figurii. (a) să se construiască funcția Lagrange a sistemului, $L = L(y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta})$; (b) Să se scrie ecuația de mișcare a sistemului.

Răspuns: $L = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2 [\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{y} \sin \theta] - \frac{1}{2}ky^2 + m_1gy + m_2g(y + l \cos \theta)$;
 (b) $(m_1 + m_2)(\ddot{y} - g) - m_2l(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + ky = 0$; $\ddot{\theta} + \frac{1}{l}(g - \ddot{y}) \sin \theta = 0$.

- Să se scrie ecuațiile lui Lagrange pentru pendulul dublu din Fig.9.7 ce execută oscilații în planul xy . Se consideră $m_1 = m_2 = m$ și $l_1 = l_2 = l$.

Răspuns: $2\ddot{\theta}_1 l - l\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + l\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g \sin \theta_1 = 0$;
 $\ddot{\theta}_2 l + l\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) + l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g \sin \theta_2 = 0$

- Un punct material se mișcă pe o cicloidă descrisă de ecuațiile: $x = a(\theta - \sin \theta)$; $y = a(1 + \cos \theta)$ cu $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(a) Să se construiască lagrangeanul sistemului ; (b) Să se scrie ecuațiile de mișcare.

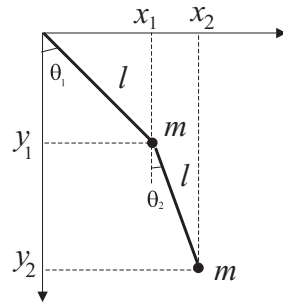


Figura 9.7:

Răspuns: (a) $L = ma^2(1 - \cos \theta)\dot{\theta}^2 - mga(1 + \cos \theta)$; (b) $\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ctg\left(\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a}ctg\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$.

4. Găsiți ecuațiile diferențiale de mișcare ale unei particule de masă m , aflată sub acțiunea unei forțe atractive invers proporționale cu pătratul distanței ($F = -\frac{k}{r^2}$):

(a) folosind formalismul Lagrange;

(b) folosind formalismul Hamilton.

Răspuns: $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} = 0$; $mr^2\dot{\theta} = const.$

Capitolul 10

Noțiuni de relativitate restrânsă

Timp de peste 200 de ani, mecanica newtoniană a oferit mijlocul esențial pentru explicarea cu succes a unui număr impresionant de fenomene din natură. Cu toate acestea, s-a constatat că rezultatele precise de mecanica newtoniană în cazul mișcării unor corpuri ale căror viteze se apropie de viteza luminii sunt eronate. Fizicianul german Albert Einstein¹ este cel ce a propus ajustarea mecanicii newtoniene prin câteva postulate, fundamentând astfel ceea ce s-a numit apoi *teoria relativității*. Mai exact, Einstein a formulat două teorii distincte: Teoria relativității restrânse (1905) și Teoria relativității generalizate (1915)².

10.1 Relativitatea în mecanica clasică

Un *sistem de referință* este constituit dintr-un corp sau sistem de corpuri cărui i se asociază un instrument pentru măsurarea timpului, precum și instrumente pentru măsurarea distanțelor.

Să considerăm două sisteme de referință carteziane cu originile în puncte diferite: (Σ) - un sistem de referință inerțial³, pe care să-l considerăm aici ca fiind fix și (Σ') - un sistem aflat în mișcare în raport cu (Σ) . În cele două sisteme se află doi observatori ce urmăresc mișcarea unui punct material aflat, la un moment dat, în P (Fig.10.1).

Presupunând că ambii observatori au instrumente pentru măsurarea distanțelor și timpului bazate pe aceleași fenomene, poziția punctului material este descrisă de următorii vectori de poziție (Fig.10.1):

¹Albert Einstein (1879-1955) este considerat unul dintre cei mai mari oameni de știință ai tuturor timpurilor. În 1905, la vârsta de 26 de ani, a publicat patru lucrări științifice care au revoluționat fizica clasică. Două dintre acestea se referă la teoria relativității restrânse. În cinstea sa, comunitatea internațională a declarat anul 2005 ca anul Einstein.

²Aceasta din urmă este o extindere a teoriei relativității, ce ia în calcul și fenomenul gravitației. Teoria relativității generalizate nu constituie subiectul manualului.

³Reamintim faptul că un sistem de referință inerțial este cel în care sunt valabile principiile mecanicii, în particular principiul inerției. Dacă un corp este liber, atunci el se află în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă.

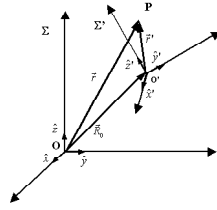


Figura 10.1: Coordonatele punctului material P în două sisteme de referință diferite Σ și Σ' .

- $\vec{r} = \vec{r}(t)$ în referențialul (Σ);

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \quad (10.1)$$

- $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$ în referențialul (Σ').

$$\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'. \quad (10.2)$$

Poziția originii O' a sistemului (Σ') este precizată de către observatorul din sistemul (Σ), prin vectorul de poziție \vec{R}_0 :

$$\vec{R}_0 = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}, \quad (10.3)$$

unde (X, Y, Z) sunt coordonatele lui O' măsurate din Σ .

Principala ipoteză cu care lucrează mecanica clasică este aceea că timpul ”*curge*” la fel în cele două sisteme de referință⁴. Ca urmare, considerând că masa este independentă de mișcare, iar distanțele se măsoară la fel în orice sistem de referință, mecanica clasică operează cu noțiunile de *timp absolut* și *masă absolută*.

Să analizăm în continuare modul cum se transformă coordonatele punctului material atunci când sunt măsurate în raport cu sisteme de referință diferite.

10.1.1 Transformările lui Galilei

(a) Transformarea coordonatelor

Să considerăm că sistemul de referință (Σ') se află în mișcare de translație față de (Σ)⁵ cu viteza:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}_0}{dt}. \quad (10.4)$$

Din Fig. 10.1 se observă că:

$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}', \quad (10.5)$$

unde:

$$\vec{R}_0 = \int \vec{v} dt + \text{const.} \quad (10.6)$$

⁴Teoria relativității reinterpretează noțiunile de spațiu și timp, considerându-le mărimi dependente una de cealaltă.

⁵În mod simetric, putem considera că Σ se află în mișcare cu viteza $-\vec{v}$ față de Σ' .

În cazul particular în care direcțiile axelor celor două sisteme de referință coincid:

$$\hat{x} = \hat{x}'; \hat{y} = \hat{y}'; \hat{z} = \hat{z}'. \quad (10.7)$$

Conform ecuației (10.5), legătura dintre coordonate măsurate de observatorii aflați în sistemele de referință (Σ) și (Σ') poate fi scrisă matricial, sub forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

În cazul și mai particular, în care originea O' a sistemului (Σ') , aflat inițial în origine, se deplasează de-a lungul axei Ox :

$$\vec{v} = \frac{dX}{dt} \hat{x} \Rightarrow X = vt. \quad (10.9)$$

Alegând constanta din ec. (10.6) egală cu zero, se obțin coordonatele lui P măsurate de observatorul din sistemul (Σ) :

$$x = vt + x'; \quad (10.10)$$

$$y = y'; \quad (10.11)$$

$$z = z'. \quad (10.12)$$

În mod evident, coordonatele măsurate de observatorul din (Σ') sunt:

$$x' = x - vt; \quad (10.13)$$

$$y' = y; \quad (10.14)$$

$$z' = z. \quad (10.15)$$

(b) Transformarea vitezelor

Legea de transformare a vitezei se obține derivând în raport cu timpul relația (10.5):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (10.16)$$

Ținând cont de definiția vitezei și de ecuația (10.4), rezultă:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}'. \quad (10.17)$$

Relația (10.17) exprimă faptul că *viteza absolută*, \vec{u} , măsurată de observatorul din sistemul fix este egală cu suma vectorială dintre *viteza de transport*, \vec{v} și *viteza relativă* \vec{u}' , măsurată de observatorul din sistemul în mișcare, Σ' .

Legea de transformare a vitezei din sistemul aflat în mișcare în cel fix este, în mod evident:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \quad (10.18)$$

Relația (10.18) este cunoscută ca *relația de transformare Galilei* a vitezelor.

În mod similar, ecuația vectorială (10.17) mai poate fi scrisă și sub forma matricială:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}. \quad (10.19)$$

În cazul particular al translației în lungul axei Ox cu viteza de transport v , relațiile de transformare ale vitezei devin:

$$u_x = v + u'_x; \quad (10.20)$$

$$u_y = u'_y; \quad (10.21)$$

$$u_z = u'_z, \quad (10.22)$$

sau:

$$u_x = v + u'_x; \quad (10.23)$$

$$u_y = u'_y; \quad (10.24)$$

$$u_z = u'_z. \quad (10.25)$$

(c) Principiul relativității al lui Galilei

Până acum am aflat că observatori aflați în sisteme de referință diferite măsoară valori diferite pentru poziția și viteza punctului material. Să analizăm, în continuare, ce pot spune aceștia despre accelerațiile și implicit forțele ce acționează asupra punctului material în mișcare. Derivând în raport cu timpul expresia vitezei (10.17) se obține expresia accelerației:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}', \quad (10.26)$$

unde

$$\vec{a}_{tr} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

sau:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{tr}. \quad (10.27)$$

Într-un sistem de coordonate cartezian, expresia (10.26) se scrie matricial sub forma:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}. \quad (10.28)$$

Să considerăm că punctul material aflat în P este liber în sistemul inerțial (Σ). Atunci, conform principiului fundamental al mecanicii:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = 0. \quad (10.29)$$

Pentru ca el să fie liber și în sistemul mobil, cu alte cuvinte pentru ca și sistemul de referință (Σ') să fie inerțial, trebuie respectată o condiție similară:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt} = 0. \quad (10.30)$$

Din relația (10.26) rezultă imediat că:

$$\vec{a}_{tr} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0, \quad (10.31)$$

adică:

$$\vec{v} = \overrightarrow{const.} \quad (10.32)$$

Relația obținută permite definirea sistemelor de referință inerțiale. Orice sistem de referință care execută o mișcare rectilinie și uniformă față de un sistem de referință inerțial constituie, la rândul său, un *sistem de referință inerțial*. Ca urmare, dacă ambele sisteme de referință sunt inerțiale rezultă că:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (10.33)$$

Înmulțind relația anterioară cu masa inertă, care, în mecanica newtoniană se postulează a fi constantă, se obține:

$$m\vec{a} = m\vec{a}' \Rightarrow \quad (10.34)$$

$$\vec{F} = \vec{F}'. \quad (10.35)$$

În concluzie, forța care acționează asupra unui punct material este aceeași în orice sistem de referință inerțial sau, mai general, legile mecanicii sunt aceleași⁶ în orice sistem de referință inerțial. Această afirmație constituie *principiul relativității a lui Galilei*. Cu alte cuvinte, toate sistemele de referință inerțiale sunt echivalente.

Dacă ecuațiile matematice care descriu un fenomen au aceeași expresie (formă) se spune că sunt *legi invariante*. În cazul de față ecuațiile de mișcare din mecanica newtoniană sunt invariante la transformările lui Galilei.

10.2 Principiile relativității restrânse

Experimentele realizate până la sfârșitul secolului al XIX-lea au demonstrat că nu există nici un sistem de referință preferențial, toate sistemele de referință inerțiale fiind echivalente. O fundamentare teoretică a acestor constatări experimentale au fost formulată de A. Einstein în 1905⁷, pe baza următoarelor postulate:

1. Legile fizicii au aceleași expresii în toate sistemele de referință inerțiale.

⁶Afirmația trebuie înțeleasă în sensul că legile mecanicii rămân aceleași ca formă a expresiilor și nu ca valori numerice implicate în ecuațiile care le descriu. De exemplu, dacă impulsul se conservă într-un sistem de referință inerțial el se conservă în toate sistemele de referință inerțiale, dar valoarea sa este alta, de la sistem la sistem.

⁷în articolul intitulat *Zur Elektrodynamik der bewegter Körper*, Annalen der Physik vol. 17(1905) 891-921.

2. Viteza maximă de propagare a interacțiunii dintre două corpuri este egală cu viteza de propagare a luminii în vid⁸ și este constantă și independentă de sistemul de referință inerțial.

Primul postulat generalizează valabilitatea expresiilor matematice ale legilor ce descriu fenomenele fizice⁹, pentru orice sistem de referință inerțial. Cu alte cuvinte, este vorba aici despre invarianța legilor mecanicii în raport cu sistemele de referință inerțiale.

Postulatul al doilea stabilește ca limită a vitezei de transmitere la distanță a interacțiunilor - viteza de propagare a luminii în vid. Acest postulat este mai curând o formulare a unor constatări experimentale.

Deoarece primul postulat conduce la concluzia că nu există un sistem de referință inerțial preferențial, enunțul postulatului al doilea se impune ca o necesitate: viteza de propagare a luminii trebuie să fie aceeași în orice sistem de referință inerțial.

10.3 Transformările Lorentz

Transformările lui Galilei fac legătura între legile fizicii ce descriu fenomene în diferite sisteme de referință inerțiale, lăsând invariante legile lui Newton. La sfârșitul secolului al XIX-lea, s-a constatat totuși, că ecuațiile ce descriu câmpul electromagnetic¹⁰ nu rămân invariante la transformările Galilei. Ne putem întreba în mod firesc de ce apar astfel de discrepanțe? Cum trebuie înțelese diferențele dintre rezultatele prezise de teoria lui Maxwell, în contextul trecerii de la un sistem de referință inerțial la altul? Pe baza teoriei câmpului electromagnetic a lui Maxwell, fizicianul danez H. A. Lorentz¹¹ a decis că trebuie modificate acestea din urmă. El a construit, pe baza principiilor lui Einstein, un set de transformări matematice între coordonatele în raport cu sistemele de referință inerțiale (astăzi cunoscute ca ecuațiile Lorentz), care păstrează invariante ecuațiile lui Maxwell.

Pentru a discuta transformările Lorentz, să considerăm din nou cele două sisteme de referință inerțiale, carteziene: (Σ) - fix și (Σ') - mobil. Pentru simplificarea calculelor, să considerăm aici cazul în care originea sistemului (Σ') se deplasează paralel cu axa Ox și că, la momentul $t = 0$, originile celor două sisteme coincid ($O \equiv O'$). Coordonatele carteziene ale unui punct M măsurate la momentul t în sistemul (Σ) sunt:

$$x = x' + vt; \quad (10.36)$$

$$y = y'; \quad (10.37)$$

$$z = z', \quad (10.38)$$

⁸ $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$

⁹adică legile mecanicii newtoniene și ale electromagnetismului mawwellian.

¹⁰Ansambluri de câmpuri electrice și magnetice care se generează reciproc, în contextul propagării la distanță.

¹¹Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) fizician danez, a avut contribuții importante la dezvoltarea teoriei relativității și a mecanicii cuantice. În 1902 a primit, împreună cu Zeeman, premiul Nobel pentru fizică.

iar cele măsurate în sistemul (Σ') sunt:

$$x' = x - vt; \quad (10.39)$$

$$y' = y; \quad (10.40)$$

$$z' = z. \quad (10.41)$$

Să admitem acum principala ipoteză a mecanicii relativiste: fiecare sistem de referință inerțial are un *timp propriu* și etaloane de *lungime proprii*. Atunci, o lungime măsurată în sistemul de referință mobil va fi diferită de cea măsurată în sistemul de referință fix, fiind necesar să introducem un coeficient de conversie, α , a cărui valoare urmează a fi determinată:

$$\alpha x' = x - vt. \quad (10.42)$$

Conform postulatului întâi al relativității, expresia matematică a ecuațiilor de mișcare a sistemului trebuie să fie aceeași în ambele sisteme de referință inerțiale. Așadar:

$$\alpha x = x' + vt', \quad (10.43)$$

deoarece din sistemul (Σ') sistemul (Σ) se vede ca deplasându-se cu viteza ($-v$). Înlocuind pe x' din (10.43) în (10.42) îl putem calcula pe $\alpha t'$:

$$\alpha(\alpha x - vt') = x - vt \Rightarrow \quad (10.44)$$

$$(\alpha^2 - 1)x = \alpha vt' - vt \Rightarrow \quad (10.45)$$

$$\alpha t' = (\alpha^2 - 1)\frac{x}{v} + t. \quad (10.46)$$

Împărțind ecuațiile (10.46) și (10.42) se obține:

$$\frac{\alpha x'}{\alpha t'} = \frac{x - vt}{(\alpha^2 - 1)\frac{x}{v} + t} \Rightarrow \quad (10.47)$$

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x/t - v}{(\alpha^2 - 1)\frac{x}{vt} + 1}. \quad (10.48)$$

Deoarece raportul dintre distanță și timp reprezintă o viteză, se poate scrie:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{(\alpha^2 - 1)\frac{u_x}{v} + 1}. \quad (10.49)$$

Dacă fenomenul analizat este, de exemplu, propagarea unui semnal luminos, atunci conform postulatului al doilea a lui Einstein, viteza de propagare a acestuia este aceeași în ambele sisteme și este egală cu c :

$$u_x = u'_x = c. \quad (10.50)$$

Ca urmare din relația (10.49) rezultă:

$$c = \frac{c - v}{(\alpha^2 - 1)\frac{c}{v} + 1} \Rightarrow \quad (10.51)$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (10.52)$$

Transformările lui Lorentz directe (pentru măsurătorile în sistemul fix) devin:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (10.53)$$

$$y = y'; \quad (10.54)$$

$$z = z'; \quad (10.55)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.56)$$

iar transformările Lorentz inverse (pentru măsurătorile în sistemul mobil):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (10.57)$$

$$y' = y; \quad (10.58)$$

$$z' = z; \quad (10.59)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.60)$$

Transformările lui Lorentz stabilesc legătura dintre coordonatele spațiale și cele temporale în așa fel încât forma ecuațiilor fizice să rămână aceeași în toate sistemele de referință inerțiale, respectând condiția invarianței vitezei de propagare a luminii în orice sistem de referință inerțial. Transformările Lorentz directe se pot scrie și sub formă matricială:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}. \quad (10.61)$$

10.4 Consecințe ale transformărilor Lorentz

10.4.1 Dilatarea duratelor

Să considerăm de exemplu mișcare unui punct material pe o traiectorie (Fig.10.2) care intersectează axa Ox . Coordonatele intersecției traiectoriei cu axa Ox a sistemului fix sunt $x_1(t_1)$ și $x_2(t_2)$, iar în sistemul (Σ') ele sunt $x'_1(t'_1)$ și $x'_2(t'_2)$. Intervalul temporal dintre două evenimente, reprezentat de succesiunea de intersecții, măsurată în sistemul de referință fix, (Σ) este:

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad (10.62)$$

iar în sistemul (Σ') :

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1. \quad (10.63)$$

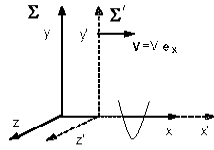


Figura 10.2: Traectoria unui punct material văzută din două sisteme de referință inerțiale diferite (Σ) și (Σ').

Folosind ec. (10.60) se obține:

$$\Delta t' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \quad (10.64)$$

$$= \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \quad (10.65)$$

$$= \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.66)$$

Ca urmare, timpul scurs între două evenimente din sistemul (Σ') depinde de timp, de poziție și de viteza de deplasare a sistemului. Se pot face următoarele observații:

1. Dacă evenimentele sunt simultane în (Σ) (adică se produc la același moment), atunci:

$$t_1 = t_2 \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq 0, \quad (10.67)$$

cu alte cuvinte, evenimentele nu mai sunt simultane în sistemul aflat în mișcare. Ca urmare, noțiunea de *simultaneitate este relativă*.

2. Dacă evenimentele se produc în același loc în (Σ) :

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 0. \quad (10.68)$$

Durata măsurată în sistemul aflat în mișcare este mai mare decât cea măsurată în sistemul aflat în repaus. Acest fenomen se numește *dilatarea duratelor*.

3. Dacă fenomenul studiat este unul periodic, cu perioada T (în Σ) și T' (în Σ') avem:

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > T. \quad (10.69)$$

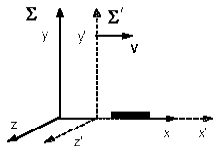


Figura 10.3: O bară așezată în poziție paralelă cu axele Ox ale celor două sisteme de referință.

Durata T , măsurată în raport cu sistemul față de care sistemul este presupus a fi legat se numește *perioada (durata) proprie*. După cum se constată, durata proprie este cea mai mică:

$$T = T' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (10.70)$$

10.4.2 Contractăia lungimilor

Să ne imaginăm că ne propunem măsurarea unei distanțe în sistemul (Σ). O astfel de distanță, care ar putea fi, de exemplu, lungimea unei bare sau rigle (vezi Fig.10.3), se poate scrie în sistemul fix, ca:

$$l = x_2 - x_1. \quad (10.71)$$

Lungimea barei în sistemul (Σ') va avea valoarea:

$$l' = x'_2 - x'_1. \quad (10.72)$$

Pentru ca măsurătorile din (Σ') să indice în mod corect lungimea, citirile coordonatelor corespunzătoare capetelor barei trebuie făcute simultan. Ca urmare:

$$t'_1 = t'_2. \quad (10.73)$$

Folosind ecuația Lorentz (10.60) se obține:

$$\frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \quad (10.74)$$

$$\Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta x = \frac{v}{c^2} l. \quad (10.75)$$

Lungimea barei, măsurată în (Σ') va fi, conform ecuațiilor Lorentz (10.57):

$$l' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \quad (10.76)$$

$$l' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.77)$$

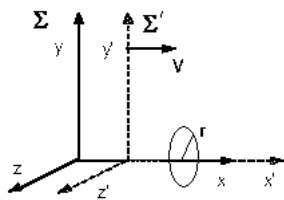


Figura 10.4: Traectoria unui punct material sub forma unui cerc aflat într-un plan perpendicular pe axa Ox și $O'x'$

Ca urmare:

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v^2}{c^2} \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} > 0, \quad (10.78)$$

adică

$$l' < l.$$

Lungimile măsurate de un observator din sistem de referință în mișcare față de referențialul propriu sunt mai mici decât cele din sistemul propriu (lungime proprie). Rezultatul exprimat de relația precedentă este cunoscut sub numele de *contractția lungimilor*.

10.4.3 Dependența masei de viteză

Să considerăm, în cele ce urmează, că traiectoria unui punct material mobil, de masă m este un cerc aflat într-un plan perpendicular pe axa Ox și $O'x'$ (Fig.10.4).

Mișcarea pe o traiectorie circulară este rezultatul acțiunii unei forțe de tip centripet. Pentru astfel de mișcări, forța este anti-coliniară cu raza vectoare și, ca urmare, momentul unghiular al punctului material în raport cu centrul de rotație este constant.

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \Rightarrow \quad (10.79)$$

$$\vec{J} = \overrightarrow{const.} \quad (10.80)$$

Conform postulatului teoriei relativității restrânse, expresia matematică a acestei mărimi este invariantă. Acceptând o aceeași expresie matematică a momentului cinetic în ambele sisteme de referință, se poate scrie¹²:

$$\vec{J} = \vec{J}' \Rightarrow \quad (10.81)$$

$$rmv = r'm'v' \Rightarrow \quad (10.82)$$

$$r^2 m \omega = r'^2 m' \omega' \Rightarrow \quad (10.83)$$

$$\sqrt{y^2 + z^2} m \omega = \sqrt{y'^2 + z'^2} m' \omega'. \quad (10.84)$$

¹²Pentru simplitatea raționamentului care urmează, admitem că valorile momentului unghiular sunt *egale* în cele două sisteme de referință. Deși, în mod evident, o astfel de ipoteză este foarte simplificatoare, ea conduce la un rezultat corect, care se regăsește în manualele de teoria relativității restrânse, plecând de la o analiză riguroasă care excede tematica acestui curs.

De aici:

$$\sqrt{y^2 + z^2} m \frac{2\pi}{T} = \sqrt{y'^2 + z'^2} m' \frac{2\pi}{T'}. \quad (10.85)$$

Folosind ecuațiile transformărilor lui Lorentz și expresia perioadei în sistemul (Σ') , rezultă:

$$m' = m \frac{T'}{T} \Rightarrow \quad (10.86)$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.87)$$

Dacă notăm masa de repaus cu $m = m_0$, dependența masei de mișcare de viteză se poate scrie sub forma:

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.88)$$

10.4.4 Transformarea vitezelor în teoria relativității

Considerăm un fenomen propagatoriu care se desfășoară cu vitezele u_x, u_y, u_z în sistemul (Σ) și u'_x, u'_y, u'_z în sistemul (Σ') . Conform definiției vitezelor:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, u'_x = \frac{dx'}{dt'}. \quad (10.89)$$

Folosind relațiile lui Lorentz (10.53) și (10.56) obținem prin diferențiere:

$$u_x = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt' + \frac{v}{c^2} dx'} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} \quad (10.90)$$

$$= \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \quad (10.91)$$

În mod analog, pentru celelalte două componente:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}; \quad (10.92)$$

$$u_z = \frac{dz' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \quad (10.93)$$

Compunerea vitezelor poate fi analizată și invers, în raport cu sistemul de referință aflat în mișcare. Deoarece, din acest sistem, deplasarea celuilalt se vede cu viteza v , orientată în sens opus, rezultatele găsite rămân valabile în condițiile în care înlocuim pe v cu $-v$.

Relațiile de transformare inversă ale vitezelor sunt:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}; \quad (10.94)$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}; \quad (10.95)$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}. \quad (10.96)$$

Dacă fenomenul studiat este propagarea unui fascicul de lumină, atunci:

$$u'_x = c. \quad (10.97)$$

Viteza luminii, măsurată în sistemul aflat în mișcare este conform (10.91), și în acord cu postulatul al doilea al teoriei relativității restrânse:

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2}c} = c. \quad (10.98)$$

Acest rezultat apare surprinzător în limitele mecanicii clasice, însă el se verifică prin consecințe, chiar dacă - aparent - este greu de acceptat.

10.4.5 Transformarea masei în teoria relativității

În mecanica clasică masa se consideră mărime absolută, independentă de mișcare. Acest lucru nu mai este valabil în teoria relativității. Să găsim relația de transformare a masei, la trecerea de la sistemul de referință fix (Σ) la cel în mișcare (Σ'), pentru un corp care se deplasează cu viteza u_x pe direcția Ox . Având în vedere dependența masei de viteză, expresiile masei în cele două sisteme de referință sunt:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}}; m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}}}. \quad (10.99)$$

Ca urmare, raportul lor este:

$$\frac{m}{m'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}}. \quad (10.100)$$

Folosind relația de transformare a vitezei (10.91), se poate scrie:

$$1 - \frac{u'^2_x}{c^2} = 1 - \frac{(u_x - v)^2}{c^2 \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^2} = \quad (10.101)$$

$$= \frac{c^2 - 2vu_x + \frac{v^2}{c^2}u_x^2 - u_x^2 + 2vu_x - v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^2} \quad (10.102)$$

$$= \frac{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - u_x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2 \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)^2}. \quad (10.103)$$

De aici rezultă relația de transformare a masei de mișcare:

$$\frac{m}{m'} = \frac{\sqrt{(1 - \frac{u^2}{c^2})(1 - \frac{v^2}{c^2})}}{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)} \Rightarrow \quad (10.104)$$

$$m' = m \frac{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.105)$$

10.5 Forța în teoria relativității

Să vedem acum în ce mod trebuie interpretată ecuația fundamentală a mișcării pentru a fi invariantă la transformările Lorentz. Pornim de la expresia:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \quad (10.106)$$

care este valabilă în ambele teorii. Impulsul, rămâne definit ca produs între masă și viteză, doar că, trebuie să avem în vedere dependența masei de viteză:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.107)$$

Dacă asupra unui corp cu masă de repaus nenulă acționează un timp îndelungat o forță constantă, în termenii mecanicii clasice acest fapt conduce la creșterea vitezei la valori oricât de mari (chiar mai mari decât viteza luminii!), lucru care vine în contradicție cu postulatul al doilea al relativității. Este corect să admitem că acel corp *câștigă impuls și nu viteză!* Pe măsură ce viteza crește, crește și masa de mișcare (inertțială) și, atunci când v tinde spre c , masa, deci măsura împotrivirii la accelerarea "finală" pentru atingerea vitezei luminii, devine infinit de mare. În acele condiții, corpul nu mai simte efectul accelerator al forței. Așadar, oricâte resurse de energie ar avea un accelerator de particule, acesta nu ajută la obținerea de viteze superioare vitezei luminii.

În continuare, vom exprima forța cu ajutorul a două componente care rezultă prin derivarea în raport cu timpul a impulsului:

$$\vec{F} = \vec{v} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (10.108)$$

$$= \vec{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (10.109)$$

Să calculăm expresia forței folosind doi pași, în conformitate cu următorul procedeu:

A. Să considerăm, pentru început, doar *variația vitezei în modul*: Variația vitezei ca mărime

este determinată de componenta longitudinală a forței:

$$\vec{F}_{tg} = \vec{v}_{tg} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + m \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} \quad (10.110)$$

$$= \vec{v}_{tg} \left(\frac{1}{2} \right) \left(2 \frac{v}{c^2} \right) \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} \quad (10.111)$$

$$= \left[\left(\frac{v^2}{c^2} \right) \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} \Rightarrow \quad (10.112)$$

$$= \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{tg} = m_l \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt}. \quad (10.113)$$

Mărimea notată m_l și definită ca:

$$m_l = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \quad (10.114)$$

se numește *masă longitudinală*. Ea este determinată de variația vitezei doar ca mărime.

B. Să considerăm acum *variația vitezei doar ca orientare*: Variația vitezei ca orientare este determinată de componenta normală a forței. În această situație, $v^2 = const.$, iar prima derivată din (10.109) se anulează, astfel încât:

$$\vec{F}_n = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \quad (10.115)$$

Sumând vectorial cele două componente (10.113) și (10.115), se obține:

$$\vec{F} = \vec{F}_{tg} + \vec{F}_n = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \quad (10.116)$$

După cum se constată din această relație, derivatele în raport cu timpul ale celor două componente ale vitezei (asociate cu componentele accelerației) apar înmulțite cu cantități diferite, de aceea forța în teoria relativității nu mai este coliniară cu accelerația:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tg} + \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \quad (10.117)$$

Ilustrarea acestei observații este dată în Fig.10.5.

10.6 Energia în mecanica relativistă

10.6.1 Relația lui Einstein

Conform definiției, lucrul mecanic elementar efectuat de forța \vec{F} la deplasarea pe distanța elementară $d\vec{r}$ este:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{p} \cdot \vec{v}. \quad (10.118)$$

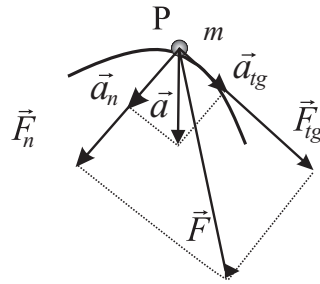


Figura 10.5: Forța, în teoria relativității, nu este coliniară cu accelerația.

Impulsul relativist al punctului material are expresia:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.119)$$

Lucrul mecanic total se obține prin integrarea relației (10.118) între două puncte de pe traiectorie. Folosind faptul că $dx \cdot y = d(xy) - x \cdot dy$, se obține:

$$L = \int_A^B dL = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\vec{p} \cdot \vec{v} = \quad (10.120)$$

$$= \vec{p} \cdot \vec{v} \Big|_A^B - \int_A^B \frac{m_0\vec{v}d\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \quad (10.121)$$

$$= \frac{m_0\vec{v}\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Big|_A^B - \int_A^B \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} d\vec{v}. \quad (10.122)$$

Integrala se calculează ușor dacă se folosește rezultatul următor:

$$d\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}-1} \left(-\frac{2v}{c^2}\right) dv = \quad (10.123)$$

$$= -\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{v dv}{c^2} \Rightarrow \quad (10.124)$$

$$\frac{\vec{v}d\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -c^2 d\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right). \quad (10.125)$$

Ca urmare, lucrul mecanic devine:

$$L = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Big|_A^B + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Big|_A^B = \quad (10.126)$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[v^2 + c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \Big|_A^B = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Big|_A^B \quad (10.127)$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} \quad (10.128)$$

$$= m(v_B) c^2 - m(v_A) c^2 = E(B) - E(A) = \Delta E. \quad (10.129)$$

Mărimea notată:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.130)$$

se numește *energie relativistă* a corpului cu masa de repaus m_0 și viteză de deplasare v .

Relația:

$$\Delta E = \Delta m c^2 \quad (10.131)$$

este cunoscută sub numele de *relația lui Einstein* dintre masă și energie.

Oricărei variații de masă îi corespunde o variație de energie și invers, oricărei variații de energie îi corespunde o variație de masă.

Verificarea acestei relații de echivalență¹³ se face printr-o multitudine de experimentele în fizica particulelor elementare. De exemplu:

- *reacții dintre particule și antiparticule*; în cazul reacției de anihilare dintre un electron și un pozitron¹⁴, aflați fiecare în repaus, rezultă doi fotoni γ cu energia fiecăruia egală cu $m_0 c^2$.
- *defectul de masă*; dacă se adună masele constituenților unui nucleu și se compară cu valoarea măsurată a masei nucleului se constată că aceasta din urmă este mai mică. Diferența este regăsită sub formă de energie de legătură a nucleului, cea care este responsabilă de stabilitatea sistemului. De exemplu, nucleul de He (format din 2 protoni cu masele M_p și 2 neutroni cu masele M_n) are $E = M_\alpha c^2 = 3727,44$ MeV iar $2M_p c^2 + 2M_n c^2 = 3755,44$ MeV. Diferența $\Delta E = 28$ MeV reprezintă energia de legătură a nucleului.

În cazul deplasărilor cu viteze mult mai mici decât viteza luminii, $v \ll c$, relația se poate aproxima sub forma:

$$E = m c^2 \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots \quad (10.132)$$

¹³De regulă, variațiile energiei determinate în mod practic corespund unor variații foarte mici ale masei. De exemplu, pentru 20 kilotone de trinitrotoluen (TNT) dintr-o bombă atomică, variația depistată a masei constituenților care intră și care rezultă din reacție este de circa 1 gram.

¹⁴Pozitronul este antiparticula electronului. Antiparticulele sunt, în general, particule elementare care apar în reacții energetice și au proprietăți (electrice, magnetice, etc.) definite de o simetrie specifică (în oglindă). De obicei, particulele și antiparticulele apar și dispar în pereche.

Termenul m_0c^2 se numește energie relativistă de repaus iar $\frac{1}{2}mv^2$ - energie cinetică corespunzătoare vitezei v . Diferența dintre energia relativistă de mișcare și energia de repaus definește *energia cinetică relativistă*:

$$E_c = mc^2 - m_0c^2. \quad (10.133)$$

10.6.2 Legătura dintre energie și impuls

Să introducem impulsul $p = mv$ în expresia energiei relativiste:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{mv^2}{m^2c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2c^2}}}. \quad (10.134)$$

Aranjând termenii în această relație, se poate scrie:

$$E^2 \left(1 - \frac{p^2}{m^2c^2}\right) = m_0^2c^4 \Rightarrow \quad (10.135)$$

$$E^2 - E^2 \frac{p^2}{m^2c^2} = m_0^2c^4. \quad (10.136)$$

Deoarece

$$E = mc^2, \quad (10.137)$$

se obține relația dintre impuls și energie sub forma:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4. \quad (10.138)$$

10.7 Universul Minkowski

Transformările Lorentz descriu legătura dintre momentul și locul desfășurării oricărui fenomen. Ne putem imagina un univers spațiu-timp, cu trei dimensiuni de tip spațial și una de tip temporal în care să reanalizăm fenomenele relativiste.

Să așezăm pe axa orizontală spațiul (în cazul translației de-a lungul axei Ox vom lua doar coordonata care se modifică, x) iar pe axa verticală - cantitatea ct ¹⁵. Orice punct din universul spațiu-timp reprezintă un *eveniment*. Totalitatea punctelor care descriu evoluția unui eveniment definește o *linie de univers*.

În Fig.10.6 sunt ilustrate tipuri de traiectorii în diagramele spațiu-timp: (1) pentru o particulă aflată în repaus, poziția sa, x_0 rămâne neschimbată în timp, deci linia de univers este verticală; (2) pentru o mișcare rectilinie și uniformă viteza (reprezentată de panta dreptei) este constantă, de aceea linia de univers este o dreaptă înclinată; (3) o mișcare accelerată are panta variabilă în fiecare punct și ca urmare traiectoria este o curbă (de exemplu, în cazul de față, mișcarea este la început rapidă și apoi lentă).

Linia de univers corespunzătoare propagării unui semnal luminos este reprezentată de dreapta marcată cu $v = c$. Ea este orientată la 45° față de cele două axe. Distanța dintre

¹⁵ Această combinație se alege din considerente de omogenitate ale dimensiunilor.

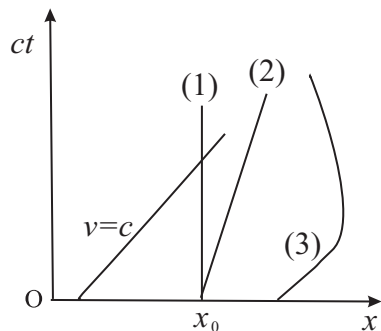


Figura 10.6: Tipuri de traiectorii în diagrama spațiu-timp: (1) repaus; (2) mișcare rectilinie și uniformă; (3) mișcare accelerată

două evenimente: de exemplu cel de coordonate $(0, 0)$ (produs în origine) și cel de coordonate (ct, x) este dată de mărimea:

$$s^2 = x^2 - c^2t^2. \quad (10.139)$$

Această distanță se numește *metrica spațiului*. Ea este invariantă la transformările Lorentz, deoarece:

$$c^2t^2 - x^2 = - \left[\frac{c^2(t' + \frac{v}{c^2}x')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{(x' + vt')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] = \quad (10.140)$$

$$= - \left[\frac{(ct' + \frac{v}{c}x' - x' - vt')(ct' + \frac{v}{c}x' + x' + vt')}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] \quad (10.141)$$

$$= - \left[\frac{t'^2(c^2 - v^2) - x'^2(1 - \frac{v^2}{c^2})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] = \quad (10.142)$$

$$= -c^2t'^2 + x'^2 = s'^2. \quad (10.143)$$

Linia de univers ce corespunde deplasării originii O' a unui sistem de referință aflat în mișcare cu viteza v față de sistemul fix (adică axa temporală ct') se găsește impunând, în transformările Lorentz, condiția:

$$x' = 0 \Rightarrow x - \frac{v}{c}t = 0. \quad (10.144)$$

În mod similar se găsește linia de univers ce corespunde axei spațiale (x'):

$$ct' = 0 \Rightarrow ct - \frac{v}{c}x = 0. \quad (10.145)$$

Unghiul de înclinare (θ_1) dintre axa ct' și axa ct este determinat din condiția:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}, \quad (10.146)$$

iar unghiul de înclinare (θ_2) dintre axa x' și axa x (folosind (10.145))

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{vx}{cx} = \frac{v}{c}.$$

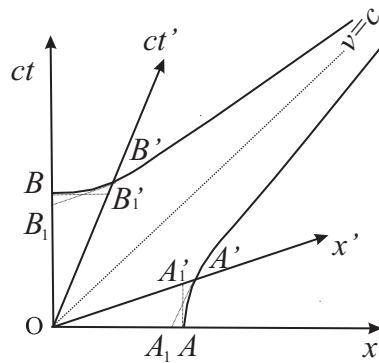


Figura 10.7: Interpretarea geometrică a transformărilor Lorentz

Ca urmare, ambele axe (x') , (ct') sunt rotite sub același unghi $\theta_2 = \theta_1 = \theta$, față de axele (x, ct) . Având în vedere aceste observații, transformările Lorentz pot fi interpretate, din punct de vedere geometric, ca trecerea de la un sistem de coordonate ortogonal la un sistem oblic, înclinat de unghiul dat de relația (10.146). În Fig.10.7 este ilustrată interpretarea geometrică a transformărilor Lorentz.

Să reprezentăm intervalele unitate $s = s' = 1$. Datorită invarianței, $-c^2t'^2 + x'^2 = -c^2t^2 + x^2 = 1$, ele definesc hiperbole echilaterare care tind asimptotic spre linia de univers a luminii (vezi Fig.10.6). În Fig.10.7 aceste linii de univers taie axa x' în A' și axa ct' în B' . Ca urmare, echivalentul segmentului unitate spațială $OA = x = 1$ din sistemul (x, ct) este OA' în sistemul (x', ct') . În mod similar, echivalentul segmentului unitate temporală $OB = ct = 1$ din sistemul (x, ct) este OB' în sistemul (x', ct') . Dacă observatorul este legat de sistemul (x, ct) , atunci vede segmentul OA' ca OA_1 , unde A_1 se obține ducând paralela la axa temporală ct' . Se observă o contracție a acestei lungimi: $OA' < OA$ (lungime proprie în sistemul în repaus). Dacă observatorul este legat de sistemul (x', ct') , atunci vede segmentul OA ca OA'_1 , unde A'_1 se obține ducând paralela la axa temporală ct . Și în acest caz, $OA'_1 < OA'$ (lungime proprie în sistemul în mișcare). În mod analog se poate discuta și pe axa temporală.

Așadar, diagramele spațiu-timp, numite și *diagrame Minkowski* ne permit observații intuitive asupra modului în care se modifică elementele cinematice ale mișcării în diferite sisteme de referință.

Deoarece ne putem imagina că pe axa distanțelor am putea reprezenta toate cele trei dimensiuni, s^2 are semnificația pătratului unui interval definit într-un spațiu cu 4 - dimensiuni. Metrica care definește această distanță este diferită de cea dintr-un spațiu normal, cu trei dimensiuni (metrica euclidiană) prin faptul că apare semnul minus în fața pătratului unei componente. De aceea, geometria unui astfel de spațiu este una diferită de cea cu care suntem obișnuiți.

Să considerăm câteva cazuri particulare:

1. evenimentele se produc în același loc ($x = 0$) dar la momente diferite de timp; Deoarece $s^2 = -c^2t^2 < 0$, se spune că evenimentele sunt separate în timp. Un astfel de interval se

numește *interval temporal*. Invarianța cuadri-intervalului conduce la:

$$s'^2 = -c^2t'^2 + x'^2 < 0. \quad (10.147)$$

Ca urmare, nu există nici un sistem de referință în care evenimentele să fie simultane ($t' = 0$) deoarece s-ar obține $s'^2 > 0$ (contradicție!). Poate, însă, exista un sistem de referință în care evenimentele să se producă în același loc ($x' = 0$) și atunci: $s'^2 = -c^2t'^2 < 0$.

2. evenimentele se produc în locuri diferite, dar la același moment de timp ($t = 0$); Deoarece $s^2 = x^2 > 0$, se spune că evenimentele sunt separate în spațiu. Un astfel de interval se numește *interval spațial*. Invarianța cuadri-intervalului conduce la:

$$s'^2 = -c^2t'^2 + x'^2 > 0. \quad (10.148)$$

Ca urmare, nu există nici un sistem de referință în care evenimentele să se producă în același loc ($x' = 0$) deoarece s-ar obține $s'^2 < 0$ (contradicție!). Poate, însă, exista un sistem de referință în care evenimentele să fie simultane ($t' = 0$) și atunci: $s'^2 = x'^2 > 0$.

3. evenimente se produc cu viteza luminii. Deoarece $s^2 = 0$, se spune că evenimentele sunt separate de limitarea vitezei la valoarea maximă ce corespunde vitezei luminii.

$$c^2t^2 = x^2 \Rightarrow c = \left| \frac{x}{t} \right|. \quad (10.149)$$

Punctele din care pleacă lumina sunt separate de punctele în care ajunge, prin cuadri-intervale nule. Această observație este de fapt o reafirmare a postulatului invarianței vitezei de propagare a luminii. Regiunile din universul spațiu-timp din vecinătatea fiecărui eveniment se împart în trei regiuni, separate de dreptele $v = \pm c$, orientate la 45° față de axe.

În Fig.10.8 este reprezentat conul Minkowski din vecinătatea originii. Deoarece toate fenomenele se produc cu viteze mai mici decât viteza luminii, singura zonă permisă este cea din interiorul conului luminos. Regiunea 3 este interzisă, deoarece străbaterea ei ar necesita propagarea cu viteze mai mari decât viteza luminii! Zona din interiorul conului se împarte în două regiuni, analizate în cele ce urmează:

- Fie un eveniment situat într-un punct în spațiul corespunzător lui $x = 0$, situat în partea negativă a axei temporale. Deoarece acesta se produce la un moment de timp anterior prezentului (considerat $t = 0$), acest eveniment poate influența desfășurarea evenimentului din origine. Regiunea 1 corespunde *trecutului absolut*.
- Fie un eveniment situat într-un punct în spațiul corespunzător lui $x = 0$, situat în partea pozitivă a axei temporale. Deoarece acesta se produce la un moment de timp ulterior prezentului (considerat la $t = 0$), acest eveniment poate fi influențat de desfășurarea evenimentului din origine. Regiunea 2 corespunde *viitorului absolut*.

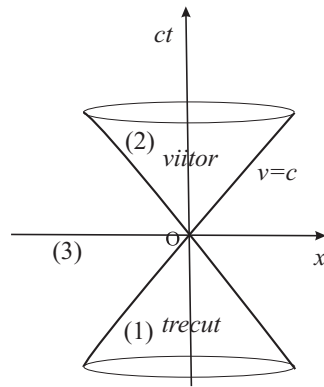


Figura 10.8: Conul Minkowski din vecinătatea originii. Zonă permisă este cea din interiorul conului luminos.

10.7.1 Cuadrivectori de poziție

Din experiența noastră de până acum, știm că x, y, z reprezintă cele trei componente carteziene ale unui spațiu 3-dimensional. Dacă mai adăugăm o componentă, de dimensiune ct (numită componentă temporală), mărim dimensiunea spațiului la 4. În acest spațiu, care nu mai este unul intuitiv¹⁶, vom lucra cu vectori cu 4-dimensiuni, numiți și *cuadrivectori*. Din cele discutate până acum, ei sunt invariante la transformările Lorentz. Vom nota cuadrivectorii prin simbolul $x_i, i = \overline{1, 4}$. Algebra pe care o vom folosi seamănă în mare parte cu cea știută, doar că, în acest caz, metrica este dată de relația:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \quad (10.150)$$

Pentru simplificarea scrierii, vom adopta următoarele convenții de notații:

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad (10.151)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.152)$$

Cuadrivectorul de poziție corespunde unui vector în diagrama spațiu-timp care are originea în originea sistemului iar vârful în punctul în corespunzător evenimentului studiat. Ca urmare, coordonatele *cuadrivectorului de poziție* sunt:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ct. \quad (10.153)$$

Legătura dintre coordonatele cuadrivectorului de poziție dintr-un sistem fix și unul care se

¹⁶suntem prizonieri ai spațiului 3D!

depășească cu viteza constantă v este dată de transformările Lorentz:

$$x_1 = \gamma(x'_1 + \beta x'_4); \quad (10.154)$$

$$x_2 = x'_2; \quad (10.155)$$

$$x_3 = x'_3; \quad (10.156)$$

$$x_4 = \gamma(x'_4 + \beta x'_1), \quad (10.157)$$

Sub formă matricială se poate scrie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix}, \quad (10.158)$$

sau:

$$x_i = A_{ij}x'_j, i = \overline{1,4}. \quad (10.159)$$

unde A_{ij} este matricea transformării:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

În mod evident, transformarea inversă este descrisă de ecuațiile:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_4); \quad (10.160)$$

$$x'_2 = x_2; \quad (10.161)$$

$$x'_3 = x_3; \quad (10.162)$$

$$x'_4 = \gamma(x_4 - \beta x_1), \quad (10.163)$$

care sunt reprezentate matricial prin:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}. \quad (10.164)$$

10.7.2 Cuadrivectorul interval

Considerăm că orice modificare a coordonatelor unui eveniment din sistemul fix ($\Delta x_i, i = \overline{1,4}$) este echivalentă cu o modificare a coordonatei corespunzătoare măsurată în sistemul mobil ($\Delta x'_i, i = \overline{1,4}$). Acest lucru este realizat prin calibrarea ceasurilor în cele două sisteme¹⁷. *Cuadrivectorul interval* corespunde distanței dintr-un spațiu cu 4 dimensiuni dintre două evenimente oarecare. Valoarea infinezimală a acestuia (în cazul în care evenimentele sunt foarte puțin depărtate unul de altul) este:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (10.165)$$

¹⁷Calibrarea corespunde fixării momentelor de timp în care un semnal (de exemplu lumina) străbate distanțe egale măsurate de-a lungul unei drepte.

10.7.3 Cuadrivectorul viteză

Cuadrivectorul viteză este definit ca variația cuadrivectorului de poziție în unitatea de timp propriu¹⁸ ($d\tau$):

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau}, i = \overline{1, 4}. \quad (10.166)$$

Deoarece durata proprie este cea mai scurtă, adică conform cu (10.69)

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad (10.167)$$

cuadrivectorul viteză devine:

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{dx_i}{dt}. \quad (10.168)$$

Folosind notația $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, se poate scrie:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{dx_1}{dt} = \gamma_u u_x; \quad (10.169)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{dx_2}{dt} = \gamma_u u_y; \quad (10.170)$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{dx_3}{dt} = \gamma_u u_z; \quad (10.171)$$

$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{dx_4}{dt} = \gamma_u c; \quad (10.172)$$

unde (u_x, u_y, u_z) sunt componentele carteziene obișnuite ale vectorului viteză \vec{u} . Deci, *cuadrivectorul viteză* este:

$$u_i = (\gamma_u u_x, \gamma_u u_y, \gamma_u u_z, \gamma_u c), \quad (10.173)$$

sau

$$u_i = \gamma_u (\vec{u}, c).$$

Deoarece toți cuadrivectorii sunt invariante la transformările Lorentz, se poate găsi direct relația de transformare a vitezei dintr-un sistem fix în unul aflat în mișcare. Folosind relațiile (10.160-10.163), se obține:

$$u'_1 = \gamma(u_1 - \beta u_4) = \gamma \gamma_u (u_x - v); \quad (10.174)$$

$$u'_2 = u_2 = \frac{1}{\gamma_u} u_y; \quad (10.175)$$

$$u'_3 = u_3 = \frac{1}{\gamma_u} u_z; \quad (10.176)$$

$$u'_4 = \gamma(u_4 - \beta u_1) = \gamma \gamma_u (c - \frac{v}{c} u_x). \quad (10.177)$$

¹⁸Reamintim faptul că timpul propriu este măsurat cu un ceasornic care se deplasează odată cu corpul, adică de observatorul în raport cu care corpul este în repaus.

Pe de altă parte, se știe că:

$$u'_4 = \frac{dx'_4}{d\tau'} = \frac{cdt'}{dt' \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \gamma'_u c. \quad (10.178)$$

Identificând (10.177) și (10.178), găsim:

$$\gamma \gamma_u (c - \frac{v}{c} u_x) = \gamma'_u c; \quad (10.179)$$

$$\gamma \gamma_u = \frac{\gamma'_u}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}. \quad (10.180)$$

Revenind în (10.174) obținem:

$$u'_1 = \frac{\gamma'_u (u_x - v)}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}. \quad (10.181)$$

Înlocuind și expresia lui u'_1 :

$$u'_1 = \frac{dx'_1}{d\tau'} = \gamma'_u \frac{dx'}{dt'} = \gamma'_u u'_x, \quad (10.182)$$

regăsim relația de transformare a componentei vitezei pe axa Ox :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad (10.183)$$

și în mod analog pentru celelalte componente.

10.7.4 Cuadrivectorul accelerație

Cuadrivectorul accelerație se definește ca variația cuadrivectorului viteză în raport cu intervalul de timp propriu:

$$a_i = \frac{du_i}{d\tau} = \gamma_u \frac{du_i}{dt}. \quad (10.184)$$

10.7.5 Cuadrivectorul impuls-energie

Prin definiție, cuadrivectorul impuls este produsul dintre masa de repaus (deoarece se definește în sistemul față de care corpul este în repaus) și cuadrivectorul viteză:

$$p_i = m_0 u_i = (m_0 \gamma_u \vec{u}, m_0 \gamma_u c). \quad (10.185)$$

Deoarece masa de mișcare este:

$$m = m_0 \gamma_u, \quad (10.186)$$

folosind expresia energiei relativiste $E = mc^2$, cuadrivectorul impuls se scrie ca:

$$p_i = \left(m \vec{u}, \frac{E}{c} \right) = \left(\vec{p}, \frac{E}{c} \right). \quad (10.187)$$

Se observă că cea de-a patra componentă este proporțională cu energia. Din acest motiv, acest cuadrivector se numește *cuadrivector impuls-energie*.

10.7.6 Cuadrivectorul forță - putere

Cuadrivectorul forță se definește ca derivata în raport cu timpul propriu a *cuadrivectorului impuls*:

$$F_i = \frac{dp_i}{d\tau} = \gamma_u \frac{dp_i}{dt}. \quad (10.188)$$

Având în vedere modul în care a fost definit impulsul, se obține:

$$F_i = \gamma_u \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, c \frac{dm}{dt} \right). \quad (10.189)$$

Puterea este definită ca lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} = \left(m \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \frac{dm}{dt} \right) \cdot \vec{u} \quad (10.190)$$

Înlocuind derivata în raport cu timpul a masei:

$$\frac{dm}{dt} = m_0 \frac{d}{dt}(\gamma) = m_0 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-3/2} \left(-\frac{2\vec{u}}{c^2} \right) \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (10.191)$$

$$= (m_0 \gamma) \frac{\vec{u}}{c^2} \gamma^2 \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\gamma^2}{c^2} m \vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt}; \quad (10.192)$$

se obține:

$$P = m \left(1 + \gamma^2 \frac{u^2}{c^2} \right) \vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt} = \gamma^2 m \vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}. \quad (10.193)$$

Ca urmare, mărimea componentei a patra a cuadrivectorului forță, corespunde puterii mecanice. Ea se poate scrie ca:

$$c \frac{dm}{dt} = \frac{P}{c} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}. \quad (10.194)$$

Componentele *cuadrivectorului forță-putere* sunt:

$$F_i = \gamma_u \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c} \right). \quad (10.195)$$

10.8 Probleme

1. Cum trebuie să se deplaseze un etalon de lungime (de 1 m) în raport cu un sistem fix, pentru ca doi observatori situați în sistemele de referință fix, respectiv care se deplasează cu viteza v , să măsoare aceeași valoare a lungimii?
2. O bară de lungime proprie L_0 este orientată sub unghiul θ' față de axa Ox' a sistemului propriu (față de care este în repaus). Arătați că lungimea barei, măsurată într-un sistem de referință care se deplasează cu viteza v față de acesta, este $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cos^2 \theta$ iar orientarea față de axa Ox a sistemului mobil este $\tan \theta = \frac{\tan \theta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

3. Un miuon are timpul mediu de viață $\tau_0 = 2,2 \times 10^{-6} s$, după care se dezintegrează într-un electron și doi neutrini. Care este distanța maximă până la care mai poate fi detectat?

Răspuns: $d = v\tau = \frac{v\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 660 \text{ m}$.

4. O navă spațială se deplasează cu viteza $v=0,866 c$. De pe navă se trimit spre Pământ două semnale luminoase, la un interval de timp $\Delta t' = 4 \text{ s}$. Determinați: (a) care este intervalul de timp după care sunt recepționate pe Pământ; (b) ce distanță, măsurată de pe Pământ, parcurge naveta între cele două emisii de semnal; (c) care este energia cinetică, măsurată de pe Pământ, a unui corp cu masa $m_0=1 \text{ Kg}$ aflat în repaus pe navă.

Răspuns: (a) $\Delta t = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \Delta t' = 15 \text{ s}$; (b) $\Delta x = \gamma v \Delta t' = 2,1 \times 10^9 \text{ m}$; (c) $E_c = (m - m_0)c^2 = 9 \times 10^{16} \text{ J}$.

5. Determinați viteza v de deplasare a unui observator ce măsoară lungimea proprie l a unei rigle ca fiind $2/3l$.

Răspuns: $v = 0,745c$.

6. Derivați expresia vectorului accelerație.

Răspuns: $a_i = \gamma_u(\gamma_u \vec{a} + \dot{\gamma}_u \vec{u}, \dot{\gamma}_u c)$ unde $\vec{a} = d\vec{u}/dt$, $\dot{\gamma}_u = \frac{u\dot{u}/c^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$.

7. Vlad și Dragoș sunt doi frați gemeni. Dragoș pleacă pe o planetă îndepărtată iar Vlad rămîne pe Pământ. Pentru Vlad, Dragoș se îndepărtează, astfel că pe navetă timpul se dilată. Dar și pentru Dragoș, Vlad se îndepărtează, astfel că și el consideră că timpul trece mai greu pe Pământ. Fiecare dintre frați crede că, la întoarcere, celălalt va fi mai tânăr. Explicați acest paradox, cunoscut ca *paradoxul gemenilor*, pe baza diagramei spațiu-timp. Care din frați va fi mai tânăr?

8. Reprezentați diagrama spațiu-timp (ct, x) pentru un observator fix și apoi reprezentați:

- linia de univers pentru un corp în repaus, situat în punctul $x = 1m$;
- linia de univers a unei particule care pleacă la momentul $t = 0$ din punctul $x=0.5 \text{ m}$ și se deplasează cu viteza $v=0.5 c$;
- diagrama (ct', x') corespunzătoare unui observator care se deplasează cu viteza $v=0.5 c$ față de observatorul fix și a cărui origine coincide cu a acestuia;
- locul geometric al evenimentelor aflate la distanța $\Delta s^2 = -1 \text{ m}^2$ față de origine;
- locul geometric al evenimentelor aflate la distanța $\Delta s^2=1 \text{ m}^2$ față de origine;
- calibrați coordonatele temporale (ct') corespunzătoare fiecărui interval de lungime (x') ;
- locul geometric al evenimentelor aflate la distanța $\Delta s^2 = 0$ față de origine;
- locul geometric al evenimentelor din spațiul (ct, x) care se produc simultan cu cel de la momentul $ct = 2m$;
- locul geometric al evenimentelor din spațiul (ct', x') care se produc simultan cu cel de la momentul $ct' = 2m$;

- (j) evenimentele care se produc la $t' = 0, x' = 0.5m$;
- (k) locul geometric al evenimentelor care se produc în punctul $x' = 1m$;
- (l) linia de univers a unui foton emis în la $t' = 0$ în punctul $x = 0$, călătorește în direcția axei Ox negative, este reflectat de o oglindă situată la $x' = -1m$ și apoi este absorbit de un detector
- (m) localizat în punctul $x = 0.75m$.

Noțiuni de dinamică neliniară și haos clasic

Vom încheia analiza capitolelor selecționate din mecanica fizică trecând în revistă câteva subiecte considerate actualmente de mare interes, atât în mecanică, dar și în fizică, mai general. Uneori - surprinzător la prima vedere - astfel de fenomene apar în diverse alte domenii ale științelor naturii sau chiar în afara acestora. Este vorba de *dinamica neliniară și teoria haosului*. Aceste domenii de mare interes în zilele noastre introduc și dezvoltă o serie de concepte teoretice noi - instrumente cu care se analizează fenomene dificil de explicat în contextul mecanicii clasice. Fenomenele haotice întâlnite în cele mai diverse sisteme fizice, cum ar fi unii oscilatori mecanici, circuite electrice, fluide, sisteme optice neliniare, reacții chimice, fenomene din lumea viului, par a avea aspecte similare în privința *complexității* lor. Aceste aspecte pot fi descrise prin ecuații și mărimi similare.

11.1 Neliniaritate și sensibilitate la condițiile inițiale

Încă de la sfârșitul secolului al XIX-lea, Henry Poincaré, considerat părintele dinamicii neliniare, a subliniat faptul că turbulențele și comportarea neliniară, observate de exemplu în curgerea fluidelor¹, sunt de fapt caracteristici inerente sistemelor în care se produc *interacțiuni neliniare*. Mai mult decât atât, el a demonstrat că, chiar și în cazul sistemelor simple², cu puține grade de libertate, dar care includ neliniarități³, se poate constata o evoluție complicată și care, în timp, devine impredictibilă.

Așadar, unul din ingredientele haosului este *neliniaritatea*. Să ne reamintim câteva noțiuni legate de neliniaritate în algebra și geometrie. Un sistem este neliniar dacă este descris de ecuații neliniare, cu alte cuvinte dacă variabilele dinamice ce descriu proprietățile sistemului (coordonatele, viteza, presiunea etc.) apar în ecuații sub forma unor termeni neliniari.

O funcție este liniară dacă are proprietatea:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad f(ax) = af(x), \forall (x, y, a) > 0.$$

¹ Astfel de sisteme sunt numite spațio-temporale, fiind descrise de ecuații cu derivate parțiale în raport cu spațiul și cu timpul.

² sisteme descrise doar de o dinamică temporală.

³ cum ar fi de exemplu problema celor trei corpuri.

În cazul unui sistem de ecuații, liniaritate implică:

$$\mathbf{L}(a\phi + b\psi) = a\mathbf{L}(\phi) + b\mathbf{L}(\psi).$$

unde a , b sunt două constante oarecare, iar ϕ și ψ - două funcții oarecare. În practică, o funcție complexă poate fi descompusă în combinații liniare de părți simple, urmând ca fiecare parte fie rezolvată separat, în final, recombinarea părților conducând la soluția completă. Pe astfel de metode se bazează descompunerea în serie Fourier, în moduri normale, sau alte combinații liniare. Aceste considerente își pierd valabilitatea în cazul sistemelor neliniare. Unul dintre cele mai importante principii simplificatoare utilizat în dinamica liniară și anume *principiul superpoziției nu mai este valabil*.

Din punct de vedere fizic, principiul superpoziției ne permite să explicăm propagarea independentă a undelor electromagnetice sau a celor elastice, fără perturbare reciprocă. Totuși, aplicarea principiului superpoziției nu permite rezolvarea oricărei probleme de dinamică liniară⁴, principiul în sine având doar valoare metodologică, el sugerând descompunerea întregului în părți simple.

În mod evident, lumea fizică reală este preponderent neliniară, deci a renunța, în unele situații ce descriu fenomene din lumea reală la principiul superpoziției este în întregime justificat. Liniaritatea se regăsește în cazul obiectele din spațiul euclidian: linii, plane, obiecte 3-dimensionale, care își păstrează dimensiunile oricum le-am măsura. Din contră, un obiect neliniar arată diferit, în funcție de scara la care îl privim. De exemplu, o sferă privită foarte de aproape pare a fi un plan, în timp ce dacă o privim de foarte departe, ea pare a fi un punct.

Așa cum vom vedea în continuare, o dinamică de tip haotic presupune *nu doar un caracter neliniar*, ci ea trebuie să fie însoțită de o caracteristică esențială - *sensibilitatea la condițiile inițiale*. Dacă pentru sistemele predictibile, nehaotice, o mică perturbare a stării inițiale a sistemului determină o mică modificare a stării sale finale⁵, în cazul sistemelor haotice, mici perturbări conduc la stări divergente și nepredictibile⁶. Divergența traiectoriilor vecine din diagramele din spațiul configurațiilor este o amprentă a haosului și permite individualizarea acestuia în relația cu alt comportament impredictibil, cum este cel prezent în prezența unui zgomot extern.

În sistemele neliniare apare așa numită "*rupere spontană de simetrie*" sau - exprimat folosind un termen mai adecvat - "*încălcarea spontană a simetriei*". Dacă pentru sistemele liniare ecuațiile de mișcare sunt invariante la o translație a timpului⁷, pentru sistemele neliniare, din momentul în care ele au devenit haotice, își pierd brusc proprietățile de invarianță, iar evoluția lor devine dependentă de timp.

Este important să subliniem faptul că un comportament impredictibil poate să apară în sisteme descrise de ecuații deterministe, pentru care ecuația de mișcare asociată cu condițiile inițiale permite, în principiu, determinarea evoluției sistemului la orice moment de timp. Acest tip de haos este cunoscut sub numele de *haos determinist*.

⁴Integrarea unor ecuații liniare poate fi complicată foarte mult de condițiile la limită.

⁵Distanța dintre cele două stări apropiate în spațiul configurațiilor rămâne apropiată, în acord cu teorema Liouville de conservare a volumului din spațiul fazelor

⁶Efectul divergenței a două traiectorii vecine a fost exprimat metaforic de E.N. Lorentz (1972) ca posibilitatea ca o bătaia de aripi ale unui fluture din Brazilia să determine o tornadă în Texas.

⁷Adică ecuațiile de mișcare și condițiile exterioare rămân aceleași la t și la $t+\tau$ pentru oricare τ , schimbându-se doar dacă se modifică condițiile exterioare

Vom încerca, în această introducere în teoria sistemelor neliniare și a haosului să prezentăm exemple de sisteme și de neliniarități care pot să conducă la comportament haotic, modul cum poate fi controlată dinamica lor, precum și câteva mărimi ce caracterizează această dinamică.

11.2 Sisteme dinamice

Să considerăm un sistem descris la momentul de timp t de un set de variabile de stare $x_i, i = \overline{1, n}$ numite variabile de stare. Spațiul tuturor variabilelor $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este numit *spațiul stărilor* sau *spațiul fazelor*⁸. Ne vom referi, în cele ce urmează doar la sistemele finite, descrise de funcții de evoluție cu caracter continuu. Dacă sistemul are o comportare deterministă, evoluția sa este determinată în mod univoc de un set de ecuații de mișcare de forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_c), \quad (11.1)$$

unde f_i este, în general, o funcție neliniară de coordonatele $\{x_i\}, i = \overline{1, n}$, de timp⁹ și de un set de parametri $\lambda_j, j = \overline{1, c}$. Dacă sistemul este descris de ecuații diferențiale de ordin superior, de exemplu de ordin N , se introduce un nou set de variabile, de exemplu: $y = \dot{x}$. Prin aceasta se reduce ordinul ecuației diferențiale la $N - 1$, iar metoda poate continua prin introducerea de noi variabile până se ajunge la o ecuație diferențială ordinară. Așadar, prin introducerea de noi variabile, o ecuație diferențială de ordin N se poate scrie sub forma a cu N ecuații diferențiale de ordinul întâi. Relația (11.1) se poate scrie sub forma vectorială:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\{x_i\}, t, \{\lambda_j\}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, c}, \quad (11.2)$$

unde $\vec{x} = \vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $\vec{f}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ sunt vectori de dimensiune n . Parametrii $\lambda_j, j = \overline{1, c}$, numiți *parametri de control*, sunt constante fixate la anumite valori. Atunci când acestea sunt schimbate, ele produc modificări ale caracterului dinamicii sistemului. Parametrii de control sunt mărimi ce descriu caracteristici intrinseci ale sistemului, cum ar fi: coeficienți de vâscozitate, frecvențe proprii, amplitudinea sau frecvența unor perturbații exterioare impuse sistemului etc.

Dacă funcția \vec{f} depinde explicit de timp, așa cum este sistemul descris de ec. (11.1) acesta este numit *neautonom*. De exemplu, într-un sistem mecanic, \vec{f} poate fi o forță exterioară periodică, așa cum este cazul oscilatorului în regim forțat.

Dacă funcția \vec{f} nu depinde explicit de timp, sistemul este denumit *autonom*. În acest caz, ecuația de mișcare este de forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\{x_i(t)\}, \{\lambda_j\}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, c}.$$

⁸Evident că, în cazul $n=2$, acest spațiu este reprezentat de un plan.

⁹Pentru sistemele dinamice continue, timpul este o variabilă reală, continuă. În unele modele, el este discretizat: $t = t_k = k\tau, k \in Z^+$. Aceste sisteme se numesc *sisteme dinamice discrete* sau *hărți iterative*. Mai există și a treia posibilitate de sisteme dinamice, pentru care și stările și timpul sunt discretizate; acestea se numesc *automate celulare*.

Trecerea de la un sistem neautonom la unul autonom se poate face prin introducerea unei variabile suplimentare, x_{n+1} a cărei derivată în timp să fie unitară:

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1. \quad (11.3)$$

În acest caz, cea de a $(n + 1)$ -a variabilă este $x_{n+1} = t$ (considerând condiția inițială $x_{n+1}(0) = 0$). Ca urmare, variabila timp poate fi eliminată din postura de variabilă explicită prin introducerea unei variabile suplimentare, x_{n+1} , care mărește dimensiunea sistemului cu o unitate. Acest "truc" matematic ne permite să tratăm și sistemele neautonome într-o manieră similară celei folosite pentru cele autonome.

Cunoscând condițiile inițiale, $x_i(0) = x_{i0}$, ecuația (11.1) permite determinarea evoluției sistemului la oricare moment de timp t . Evoluța stărilor din spațiul fazelor este descrisă de o *traietorie* sau *orbită*. Ea este curba tangentă în fiecare punct la vectorul \vec{f} , la orice moment de timp, pentru un set fixat de condiții inițiale¹⁰. Mulțimea traiectoriilor din spațiul fazelor constituie ceea ce se numește *portretul fazic*.

Conform teoremei fundamentale de existență și unicitate a soluțiilor ecuațiilor diferențiale (11.1), traiectoriile sunt unice și nu sunt posibile intersecții sau autointersecții ale nici unei orbite. Cele mai multe ecuații de tip (11.1) nu pot fi rezolvate analitic¹¹ și de aceea singura alternativă este rezolvarea lor numerică. Odată cu creșterea dimensiunii sistemului, crește și complexitatea acestuia. Apare atunci întrebarea: cât de mică poate fi valoarea lui n astfel încât sistemul să aibă traiectorii haotice? Răspunsul este: minim trei.

Exemplele considerate în acest capitol sunt alese dintre cele mai simple în așa fel încât să fie accesibilă rezolvarea numerică pe orice tip de calculator personal.

11.2.1 Sisteme disipative și atractori

Traietoriile din spațiul fazelor seamănă cu liniile de curent ale unui fluid în mișcare, de aceea distribuția lor în spațiu poate oferi informații asupra proprietăților sistemului. Să urmărim, de exemplu, ceea ce se întâmplă în timp, cu liniile de curent dintr-un volum elementar. Din definiția operatorului divergență, se știe că acesta este proporțional cu fluxul de linii care traversează suprafața ce închide volumul dat, pentru un volum-sursă infinitezimal. Dacă numărul de linii care intră în volumul dat este diferit de numărul de linii care ies din acesta, atunci divergența este nenulă. Spunem că sistemele sunt *disipative* dacă, oriunde în spațiul fazelor:

$$\operatorname{div} \vec{f} < 0. \quad (11.4)$$

Cu alte cuvinte, relația (11.4) poate fi înțeleasă ca o contracție a volumului din spațiul fazelor. După cum am discutat în Capitolul I al acestui manual, sistemele hamiltoniene își păstrează volumul constant în spațiul fazelor. Spunem că astfel de sisteme (hamiltoniene) sunt *conservative*, adică:

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0. \quad (11.5)$$

¹⁰Pentru o înțelegere cât mai completă a unui sistem dinamic nu este suficientă analiza traiectoriilor individuale ci este necesară analiza ansamblului generat pentru mai multe condiții inițiale.

¹¹În Anexa B din volumul I sunt prezentate modalități de rezolvare analitică a unor ecuații diferențiale ordinare tipice.

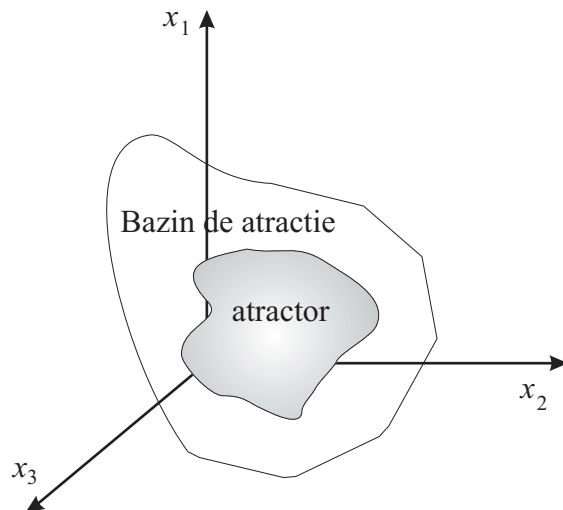


Figura 11.1: Un exemplu de atractor, împreună cu bazinul său, într-un spațiu tridimensional al fazelor.

În cazul sistemelor disipative, traiectoriile în spațiul fazelor sunt puternic divergente, în sensul că, după un interval oarecare de timp, sistemul practic "uită" stările inițiale din care a pornit, iar stările finale se vor localiza în anumite regiuni finite (puncte, curbe, sau volume geometrice). Pentru aceste sisteme¹² se definește noțiunea de *atractor*. *Atractorii* reprezintă seturi de puncte din spațiul stărilor spre care converg traiectoriile.

Setul de condiții inițiale care conduc traiectoriile spre un anumit atractor se numește *bazin de atracție* al acestuia (Fig.11.1). În cazul în care există mai mulți atractori, bazinele lor de atracție sunt separate de niște limite numite *separatoare*.

Definiția matematică exactă a atractorilor nu este deloc simplă și nu este scopul acestei prezentări. Ceea ce ne interesează mai mult sunt rezultatele legate de tipul de atractori și recunoșterea acestora.

Cei mai importanți atractori în dinamica neliniară haotică sunt:

- atractori *haotici* - structuri foarte complicate fără nici un fel de simetrie ce corespund unor mișcări haotice, și au proprietăți geometrice neobișnuite;
- atractori *stranii* - forme geometrice de tip fractal, caracterizate de structuri repetitive la orice scară.

Atractorii de forma unor puncte fixe sau curbe închise (tip ciclu limită) sunt caracteristici unor dinamici predictibile și apar în condiții de *staționaritate* și *periodicitate*.

¹²Sistemele conservative nu posedă bazine de atracție.

11.3 Echilibru și stabilitate

Sistemul de ecuații (11.1) conține ecuații diferențiale de ordinul întâi. Principalul motiv al alegerii acestui tip de ecuații este găsirea cât mai simplă a soluțiilor $\{x_{i0}\}$ pentru care derivatele în timp ale stărilor se anulează:

$$\frac{dx_i}{dt} = 0 \Rightarrow f_i(\{x_i\}, \{\lambda_j\}) = 0. \quad (11.6)$$

Soluțiile staționare ale sistemului de ecuații algebrice cuplate (B.58) se numesc *puncte fixe*, *puncte critice* sau *puncte singulare*. Ele se află ca intersecții ale *nulclinelor* (locurile geometrice $f_i(\{x_i\}, \{\lambda_j\}) = 0$).

Cel mai simplă evoluție în timp a unui sistem este aceea în care el tinde spre o stare staționară de echilibru:

$$x_i(t) = x_{i0} = \text{const}. \quad (11.7)$$

Este interesant să aflăm dacă, în evoluția sa, sistemul atinge efectiv o astfel de stare. Spre care dintre stări se va îndrepta sistemul, în cazul în care există mai multe stări staționare? În plus, odată atinse, sunt aceste stări stabile? Răspunsurile la aceste întrebări se află folosind așa-numitele *metode de liniarizare* a ecuațiilor (11.1). Pentru aceasta, se consideră o mică deplasare ξ_i față de un punct critic x_{i0} :

$$\xi_i(t) = x_i(t) - x_{i0}. \quad (11.8)$$

Să considerăm că parametrii de control sunt fixați. Admițând că f se poate dezvolta în serie Taylor în jurul soluției staționare și luând în considerare doar termenii de ordin întâi din această dezvoltării, avem:

$$f_i(x_{i0} + \xi_i) = f_i(x_{i0}) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{\{x_{i0}\}} \xi_k + \dots \quad (11.9)$$

Ecuația (11.1) devine, în acest context:

$$\frac{d\xi_i}{dt} \approx \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{\{x_{i0}\}} \xi_k, \quad (11.10)$$

sau:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{k=1}^n M_{ik} \xi_k, \quad (11.11)$$

în care:

$$M_{ik} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{\{x_{i0}\}}. \quad (11.12)$$

În acest fel, am reformulat o problemă de analiză a stabilității unui sistem neliniar (11.2), transformând-o în analiza stabilității unui sistem liniar:

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = M\vec{\xi}, \quad (11.13)$$

unde M este Jacobianul transformării lui f în raport cu variabilele vectorului n -dimensional $\vec{x} = \vec{x}(\{x_i\})$, $i = \overline{1, n}$ în vecinătatea stării de echilibru $\vec{x}_0 = \vec{x}_0(\{x_{i0}\})$, $i = \overline{1, n}$.

Dacă perturbația variază în timp după o lege de forma:

$$\vec{\xi}(t) = \vec{u}e^{\lambda t}, \quad (11.14)$$

atunci ec. (11.13) devine (după simplificarea termenului nenul $e^{\lambda t}$):

$$M\vec{u} = \lambda\vec{u} \quad (11.15)$$

sau:

$$M_{ik}u_k = \lambda u_i. \quad (11.16)$$

Sistemul (11.16) al celor n ecuații este compatibil determinat dacă și numai dacă determinantul este nul, adică:

$$\det(M_{ik} - \lambda\delta_{ik}) = 0, \quad (11.17)$$

unde δ_{ik} este simbolul Kronecker. Ecuația (11.17) este cunoscută sub numele de *ecuație seculară*. Prin rezolvarea acestei ecuații, reprezentate de anularea unui polinom de grad n în λ , putem găsi valorile proprii λ (reale sau complexe) asociate vectorilor proprii \vec{u} .

Soluția sistemului liniarizat poate fi scrisă ca superpoziția:

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu_i t} \vec{u}_i, \quad (11.18)$$

unde constantele c_n se determină din condițiile inițiale.

În termeni matematici, starea \vec{x}_0 este *asimptotic stabilă* dacă valorile proprii μ_i ale ecuației seculare (11.17) au partea reală negativă. Doar în acest caz, după cum se observă revenind în soluția (11.14), distanța față de punctul critic de echilibru scade exponențial în timp, iar sistemul perturbat ajunge din nou în această stare. Din contră, dacă cel puțin una din valorile proprii ale matricei jacobiene au valoare pozitivă, atunci \vec{x}_0 este un *punct fix instabil*. Noțiunea de stabilitate se poate înțelege mai bine cu ajutorul definițiilor următoare. Să notăm prin U_ε și prin $U_{\delta(\varepsilon)}$ două regiuni ce înconjoară starea staționară \vec{x}_0 . Se pot adopta următoarele definiții:

- \vec{x}_0 este *stabilă în sens Lyapunov*, dacă pentru orice vecinătate U_ε a lui \vec{x}_0 există o altă vecinătate $U_{\delta(\varepsilon)}$, astfel încât orice traiectorie ce iese din interiorul lui $U_{\delta(\varepsilon)}$ nu va părăsi niciodată U_ε .
- \vec{x}_0 este *instabilă* dacă nu există o astfel de vecinătate $U_{\delta(\varepsilon)}$;
- \vec{x}_0 este *asimptotic stabilă*, dacă, pe lângă condiția de stabilitate, orice traiectorie ce iese din interiorul lui $U_{\delta(\varepsilon)}$ tinde spre \vec{x}_0 atunci când $t \rightarrow \infty$.

Reprezentarea geometrică a stabilității, într-un spațiu al fazelor tridimensional, este arătată în Fig.11.2.

Transferul de analiză a stabilității unui sistem neliniar la analiza stabilității sistemului liniarizat asigură corespondența concluziilor obținute. Astfel, *Hartman* și *Grobman* [] demonstrează o teoremă care afirmă că:

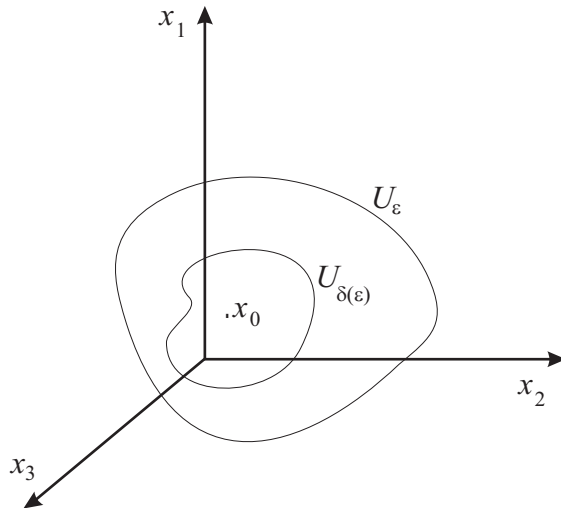


Figura 11.2: Reprezentarea geometrică a stabilității, într-un spațiu tridimensional al fazelor.

- dacă soluția sistemului liniarizat este asimptotic stabilă¹³ atunci și soluția staționară a a sistemului neliniar este asimptotic stabilă.
- dacă soluția sistemului liniarizat este instabilă atunci și soluția staționară a a sistemului neliniar este asimptotic instabilă.

Sistemelor disipative, care necesită existența unor fluxuri pentru a se menține, cu alte cuvinte, sisteme deschise, aflate în permanentă relație de schimb energetic sau de materie cu mediul exterior, le corespunde, în mod evident, stabilitatea asimptotică. În aceste situații, starea spre care tinde sistemul este un atractor. Dacă sistemul dinamic prezintă mai mulți atractori, atunci, fiecare dintre aceștia își are propriul bazin de atracție, care este reprezentat de setul inițial de puncte ce conduc la stări finale situate pe atractorii respectivi.

11.3.1 Analiza liniară de stabilitate a sistemelor bidimensionale

Să exemplificăm analiza generală anterioară în cazul unui sistem cu dimensiunea $n = 2$. Atunci ecuațiile 11.1 devin:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2); \quad (11.19)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \quad (11.20)$$

Punctele fixe (x_{10}, x_{20}) se determină din condițiile:

$$f_1(x_{10}, x_{20}) = 0; \quad (11.21)$$

$$f_2(x_{10}, x_{20}) = 0. \quad (11.22)$$

¹³Pentru soluții doar *stabile* ale sistemului liniar nu se poate preciza tipul de stabilitate al soluției sistemului neliniar.

Matricea jacobiană are patru elemente, iar ecuația seculară se determină din condiția:

$$\begin{vmatrix} M_{11} - \mu & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0, \quad (11.23)$$

din care rezultă:

$$\mu^2 - (M_{11} + M_{22})\mu + M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 0. \quad (11.24)$$

Deoarece trasa matricei M și determinantul apar în mod direct în această relație, adică:

$$\text{Tr}M = M_{11} + M_{22}; \quad (11.25)$$

$$\det M = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}, \quad (11.26)$$

iar, ecuația seculară devine:

$$\mu^2 - \text{Tr}M + \det M = 0. \quad (11.27)$$

iar cele două soluții sunt date de relația:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{Tr}M \pm \sqrt{(\text{Tr}M)^2 - 4 \det M} \right). \quad (11.28)$$

Notăm $\Delta = (\text{Tr}M)^2 - 4 \det M$. Valorile și semnul valorilor proprii $\mu_{1,2}$ depind de valorile mărimilor $\text{Tr}M$ și $\det M$. Se pot întâlni următoarele situații reprezentate în diagrama de stabilitate $\Delta = 0$ din Fig.11.3.

1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\text{Tr}M)^2 > 4 \det M > 0$ și $\text{Tr}M > 0 \Rightarrow \mu_1, \mu_2$ reale și pozitive; *nod instabil*
2. $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\text{Tr}M)^2 > 4 \det M > 0$ și $\text{Tr}M < 0 \Rightarrow \mu_1, \mu_2$ reale și negative; *nod stabil*
3. $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\text{Tr}M)^2 > 4 \det M > 0 \Rightarrow \mu_1, \mu_2$ reale și distincte ca semn; *șa instabilă*
4. $\Delta < 0 \Leftrightarrow (\text{Tr}M)^2 < 4 \det M$ și $\text{Tr}M > 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2^*$ complex conjugate cu partea reală pozitivă; *focar instabil*
5. $\Delta < 0 \Leftrightarrow (\text{Tr}M)^2 < 4 \det M$ și $\text{Tr}M < 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2^*$ complex conjugate cu partea reală negativă; *focar stabil*
6. $\Delta < 0 \Leftrightarrow (\text{Tr}M)^2 < 4 \det M$ și $\text{Tr}M = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2^*$ complex conjugate cu partea reală nulă;

Zona de stabilitate este încadrată în cadranul IV hașurat în Fig.11.3. Soluția (11.18) descrie modul în care se îndepărtează sau se apropie o traiectoriile în vecinătatea stărilor staționare și permite, totodată, identificarea formei acesteia. Ea devine:

$$\vec{\xi}(t) = c_1 e^{\mu_1 t} \vec{u}_1 + c_2 e^{\mu_2 t} \vec{u}_2 \quad (11.29)$$

unde vectorii \vec{u}_1 se consideră normalizați¹⁴.

¹⁴Aceștia nu trebuie să fie neapărat ortogonali.

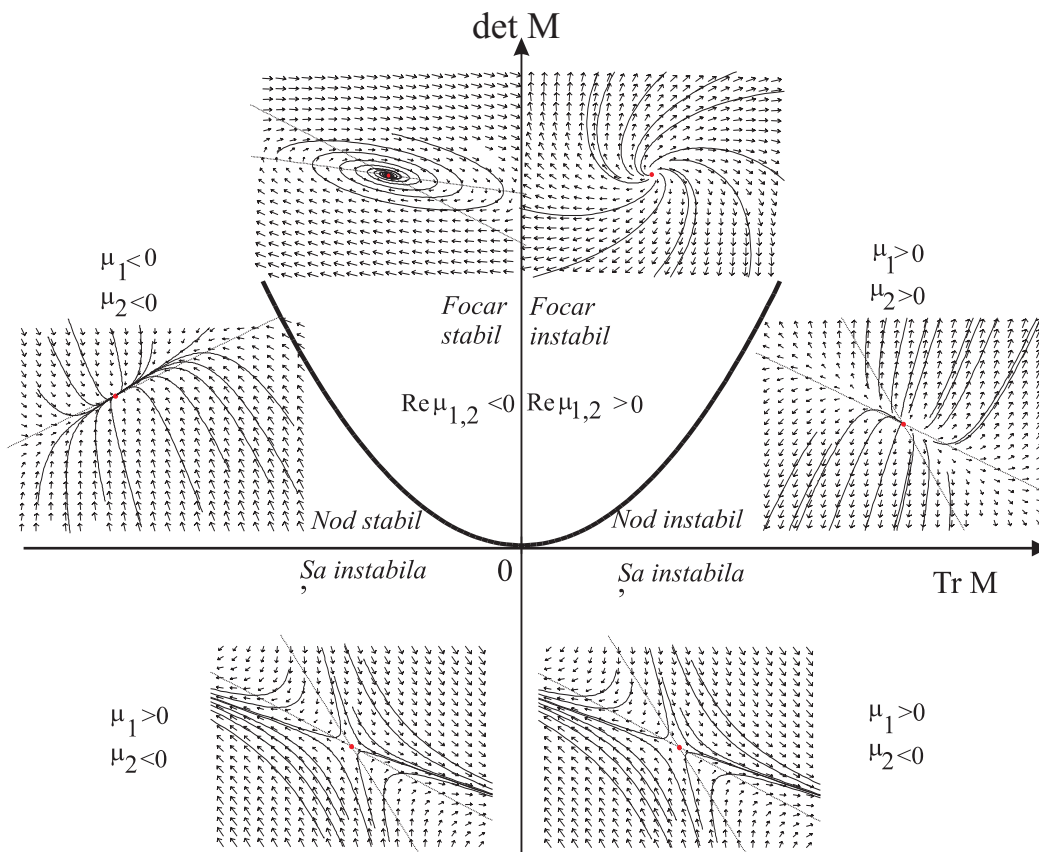


Figura 11.3: Diagrama de stabilitate.

Curbarea traiectoriilor este determinată de valorile diferite ale lui μ_1 și μ_2 . Curbele sunt parabole cu tangență comună în origine. Ele sunt parcurse în sensul de îndepărtare de starea staționară în cazul (1) - *nod instabil* și în sens de apropiere în cazul (2) - *nod stabil*.

Pentru cazul (3), un termen din soluția (11.29, de exemplu $c_1 e^{\mu_1 t}$) scade exponențial, iar celălalt crește, astfel încât traiectoriile devin hiperbole, iar punctul de echilibru - de tip șa.

Pentru cazul valorilor proprii complexe, punctele de echilibru de tip nod se transformă în puncte de *tip focar instabil* în cazul (4) și *focar stabil* în cazul (5). Această comportare se poate găsi folosind numere complexe:

$$\mu_1 = \mu_r + i\mu_i, \mu_2 = \mu_r - i\mu_i \Leftrightarrow \mu_2 = \mu_1^* \quad (11.30)$$

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_r + i\vec{u}_i, \vec{u}_2 = \vec{u}_r - i\vec{u}_i \Leftrightarrow \vec{u}_2 = \vec{u}_1^* \quad (11.31)$$

care conduce în final transformarea lui (11.29) în:

$$\vec{\xi}(t) = c_1 e^{\mu_1 t} \vec{u}_1 + c_1^* e^{\mu_1^* t} \vec{u}_1^* \quad (11.32)$$

$$= 2e^{\mu_r t} \operatorname{Re}(c_1 e^{i\mu_i t} \vec{u}_1), \quad (11.33)$$

unde $c_1^* = c_2$. S-a obținut ecuația unui vector rotitor cu amplitudinea dependente de timp, adică traiectorii de forma unor elipse cu razele exponențial crescătoare în cazul (4) sau exponențial descrescătoare în cazul (5).

În cazul (6) se obțin traiectorii periodice de forma unor elipse concentrice. Punctul de echilibru este stabil deoarece micile devieri nu sunt amplificate. Acesta însă nu este asimptotic stabil, deoarece traiectoriile nu converg înspre punctul de echilibru. Prin urmare, el nu reprezintă un *atractor*. Aceste tipuri distincte de traiectorii sunt reprezentate în diagrama de stabilitate din Fig.11.3, unde vizualizarea traiectoriilor s-a realizat și folosind reprezentarea vectorială a câmpurilor.

Exemplu:

Să considerăm un sistem disipativ constituit dintr-un oscilator neliniar (vezi 3.9.1 vol I) care se mișcă cu frecare vâscoasă. Ecuația diferențială a mișcării este:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0, \quad (11.34)$$

unde constanta α este pozitivă. Ecuația precedentă poate fi scrisă sub forma unui sistem de două ecuații diferențiale ordinare cuplate:

$$\dot{x} = y; \quad (11.35)$$

$$\dot{y} = -\alpha y - \beta x - \gamma x^3, \quad (11.36)$$

în care $\vec{x} = (x, \dot{x}) = (x, y)$ iar $\vec{f} = (f_1, f_2) = (y, -\alpha y - \beta x - \gamma x^3)$. Punctele critice sunt determinate de condițiile:

$$y = 0; \quad (11.37)$$

$$-\alpha y - \beta x - \gamma x^3 = 0, \quad (11.38)$$

ceea ce înseamnă că:

$$x(\beta - \gamma x^2) = 0. \quad (11.39)$$

Ca urmare, în afară de $\vec{x}_0^{(1)} = (0, 0)$ mai sunt, de asemenea, posibile și soluțiile staționare:

$$\vec{x}_0^{(2)} = \left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, 0\right); \quad (11.40)$$

$$\vec{x}_0^{(3)} = \left(-\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, 0\right). \quad (11.41)$$

deci, în total sistemul are *trei stări critice*.

Să analizăm stabilitatea liniară a acestor stări folosind concluziile anterioare, legate de relațiile dintre $\text{Tr}M$ și $\det M$. Jacobianul este:

$$M = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta - 3\gamma x^2 & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (11.42)$$

Deci:

$$\text{Tr}M = -\alpha, \quad (11.43)$$

$$\det M = \beta + 3\gamma x^2,$$

În vecinătatea punctelor staționare, aceste valori devin:

- $\vec{x}_0^{(1)} = (0, 0)$:

$$\text{Tr}M = -\alpha; \quad (11.44)$$

$$\det M = \beta, \quad (11.45)$$

ceea ce înseamnă (deoarece $\alpha > 0$) că soluțiile pot fi:

- nod stabil dacă $0 < 4\beta < \alpha^2$;
- punct spiral dacă $4\beta > \alpha^2$
- șa dacă $\beta < 0$.

- $\vec{x}_0^{(2)} = \left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, 0\right)$ și $\vec{x}_0^{(3)} = \left(-\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}, 0\right)$:

$$\text{Tr}M = -\alpha; \quad (11.46)$$

$$\det M = 4\beta, \quad (11.47)$$

ceea ce înseamnă (deoarece $\alpha > 0$) că soluțiile pot fi:

- nod stabil dacă $\alpha^2 > 16\beta$.
- punct spiral dacă $0 < 4\beta < \alpha^2$
- șa dacă $\beta < 0$.

După cum se observă sistemul are trei soluții stabile. Pentru $\gamma > 0$ starea staționară se bifurcă în două noi soluții stabile.

11.4 Cicluri limită

Există situații în care evoluția pe termen lung a unui sistem converge către o curbă închisă. Această curbă închisă este un atractor, numit *ciclu limită*, dacă atunci când $t \rightarrow \infty$, traiectoriile sau se apropie asimptotic, respectiv se îndepărtează de ea. Ciclurile limită sunt caracteristice fenomenelor periodice.

Poincaré și Bendixson [] au demonstrat o teoremă prin care afirmă că, pentru sistemele bidimensionale, în cazul în care există regiuni finite din care traiectoriile pornesc și se întorc¹⁵ există două posibilități pentru comportarea pe termen lung ($t \rightarrow \infty$) :

1. traiectoriile să se apropie de un *punct fix*;
2. traiectoriile să se apropie de un *ciclu limită*.

În situația în care ciclurile limită există și se poate identifica un interior și un exterior al acestora, nici o traiectorie din interior nu poate traversa această curbă închisă, după cum nici o traiectorie situată în exterior nu poate intersecta curba pentru a pătrunde în interior. Această proprietate este datorată faptului că traiectoriile din spațiul fazelor nu se pot intersecta.

Să luăm, spre exemplu, cazul unui oscilator armonic care se mișcă în prezența unei forțe de frecare proporțională cu pătratul vitezei. Ecuația diferențială a mișcării¹⁶ este:

$$\ddot{x} + \epsilon f(x)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (11.48)$$

unde $f(x)$ este o funcție care descrie expresia forței de frecare, iar ω_0 este pulsația proprie.

Să considerăm ϵ un coeficient de neliniaritate ($\epsilon \geq 0$). Să analizăm următoarele situații:

1. $\epsilon = 0$. Ecuația (11.48) devine:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (11.49)$$

și coincide cu ecuația unui oscilator liniar armonic liber. Soluția este o oscilație periodică descrisă de:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (11.50)$$

constantele având semnificația amplitudinii A și a fazei inițială φ fiind determinate, din nou, din condițiile inițiale. Soluția în domeniul timp și în spațiul fazelor pentru oscilatorul liber, este ilustrată în Fig.11.4.

2. $\epsilon = 2\delta > 0$ și $f(x) = x$, ecuația (11.48) devine:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (11.51)$$

și coincide cu ecuația unui oscilator liber amortizat. Soluția¹⁷ este o oscilație periodică cu $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, amortizată în timp cu timpul de relaxare $\tau = 1/\delta$, descrisă de:

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (11.52)$$

constantele de amplitudine A și de fază inițială φ fiind determinate din condițiile inițiale.

¹⁵seturi invariante în spațiul fazelor

¹⁶vezi paragraful 3.9 din vol.1

¹⁷vezi paragraful 3.6 din vol.1

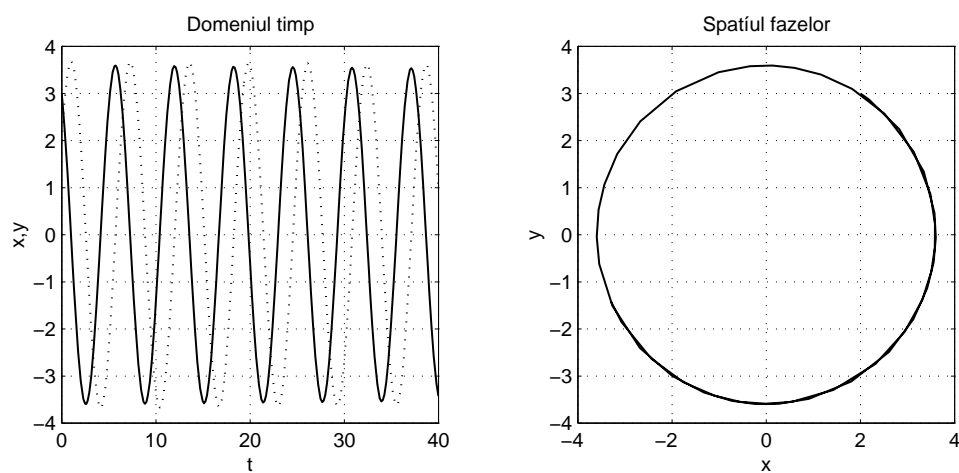


Figura 11.4: Soluția în domeniul timp și în spațiul fazelor pentru oscilatorul liber

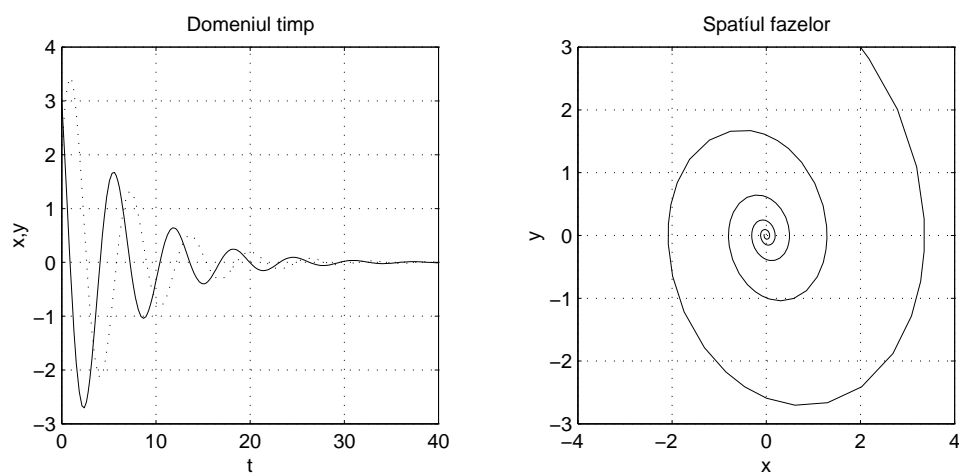


Figura 11.5: Soluția în domeniul timp și în spațiul fazelor pentru oscilatorul amortizat

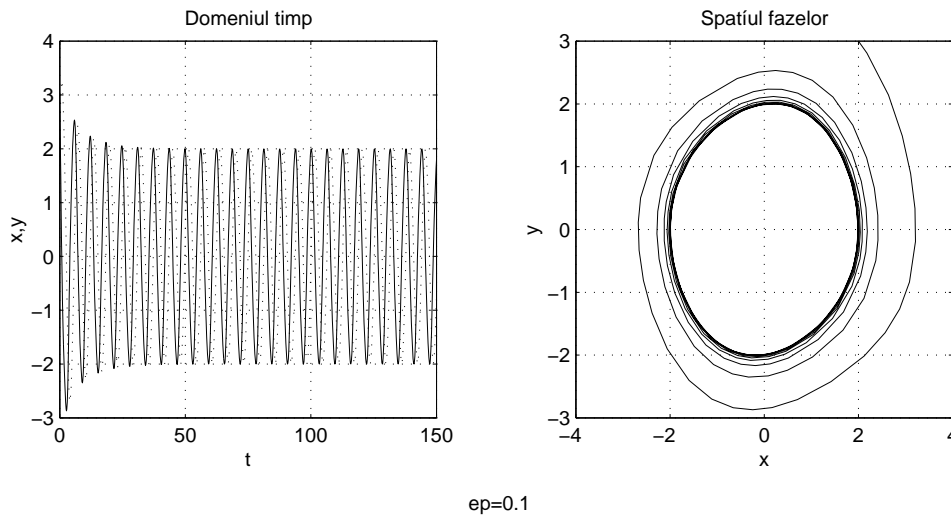


Figura 11.6: Soluția în domeniul timp și în spațiul fazelor pentru oscilatorul van der Pol, pentru o valoare $\epsilon = 0.1$

Soluția în domeniul timp și în spațiul fazelor pentru oscilatorul amortizat este ilustrată în Fig.11.5.

3. $\epsilon = 2\delta > 0$ și $f(x) = (x^2 - x_0^2)$. Ecuația (11.48) devine:

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - x_0^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{11.53}$$

Să facem schimbarea de variabilă $x' = x/x_0$, să considerăm $\epsilon x_0^2 = \epsilon'$ și, pentru simplitate, $\omega_0 = 1$. Revenind la ecuație, după renunțarea la indicele prim, se obține forma standard a ecuației studiate în 1926 de van der Pol.

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \tag{11.54}$$

Ecuația (11.54) poate fi scrisă sub forma unui sistem de două ecuații diferențiale liniare:

$$\dot{x} = y \tag{11.55}$$

$$\dot{y} = -\epsilon(x^2 - 1)y - x \tag{11.56}$$

În Fig.11.6, 11.7 și 11.8 sunt ilustrate rezultatul rezolvărilor numerice pentru diferite valori ale parametrului de control $\epsilon(0.1; 1; 5)$. Aici, cu creșterea neliniarității, traiectoria sistemului în spațiul fazelor (x, y) de tip ciclu limită, își schimbă forma .

11.5 Reprezentări (secțiuni) Poincaré

Odată demonstrată posibilitatea ca un sistem să posede un ciclu limită apare întrebarea dacă acesta este stabil sau instabil. Se poate face o analiză de stabilitate pe baza liniarizării

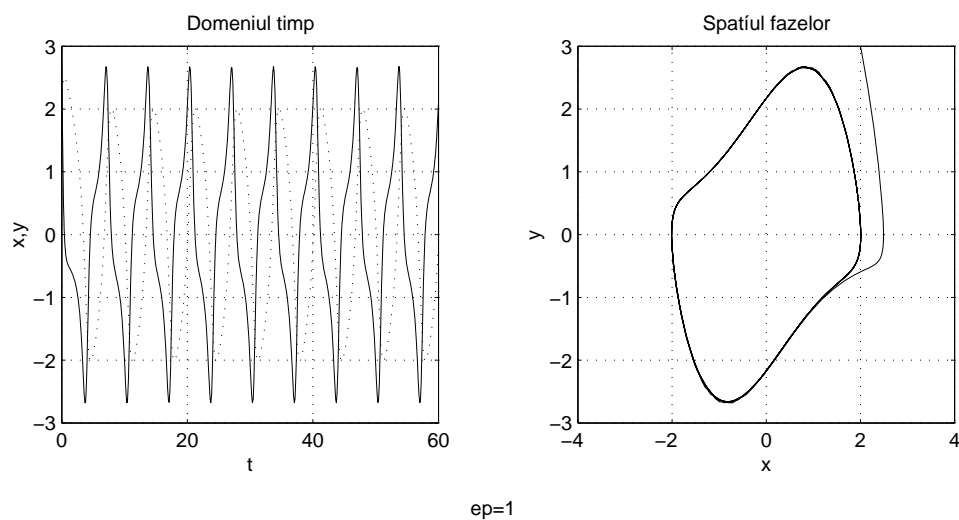


Figura 11.7: Soluția în domeniul timp și în spațiul fazelor pentru oscilatorul van der Pol, pentru o valoare $\epsilon=1$

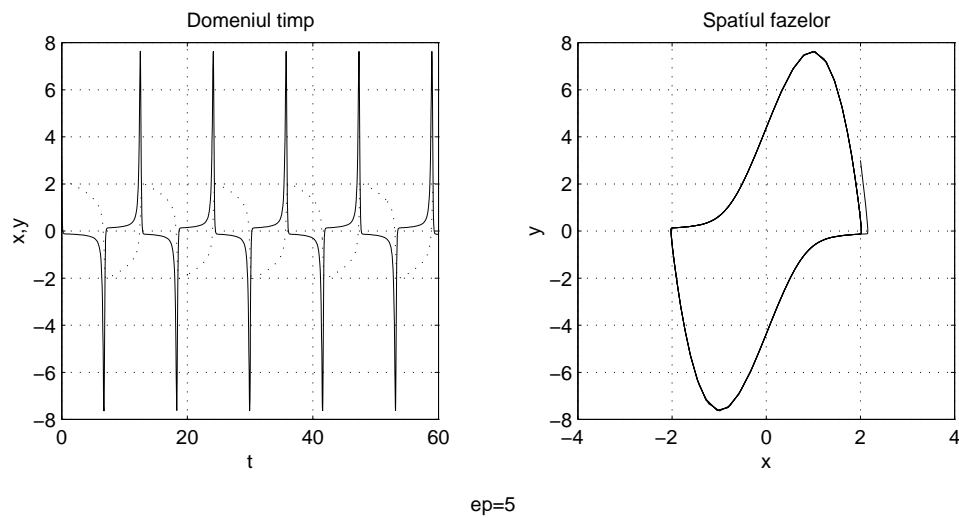


Figura 11.8: Soluția în domeniul timp și în spațiul fazelor pentru oscilatorul van der Pol, pentru o valoare $\epsilon=5$

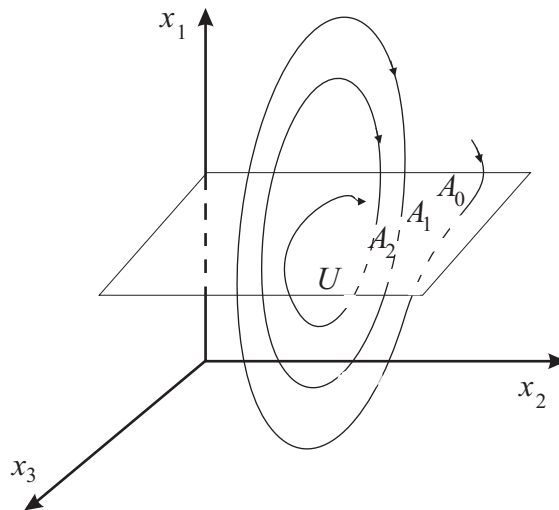


Figura 11.9: O traiectorie particulară ce intersectează un plan Poincaré în punctele A_0, A_1, A_2

sistemului ca cea expusă în cazul punctelor staționare, dar analiza este mult mai complicată.

Metoda propusă de Henry Poincaré și cunoscută sub denumirea de *metoda secțiunilor Poincaré*, constă într-o simplificare a reprezentării soluțiilor unui sistem dinamic printr-o investigație "stroboscopică" a spațiului fazelor. Prin acest procedeu se efectuează o discretizare a dependenței de timp a traiectoriilor și o transformare implicită a funcțiilor continue de timp în secvențe discrete de tipul:

$$\vec{x}_n(t) = \vec{x}(t_n), t = t_0 + nT, n = 1, 2, \dots \quad (11.57)$$

Cu alte cuvinte, se produce o secționare periodică a traiectoriei din spațiul fazelor cu un plan dat. Mulțimea punctelor de intersecție a traiectoriilor cu acest plan constituie *secțiunea Poincaré*.

În Fig.11.9 este prezentată o traiectorie particulară ce intersectează un plan Poincaré în punctele A_0, A_1, A_2 . Secțiunile Poincaré apar astfel ca niște mulțimi de puncte. Dinamica sistemului poate fi caracterizată după modul cum sunt dispuse acestea puncte. Dacă există soluții stabile, atunci punctele se suprapun, în timp ce, pentru stări neperiodice, punctele sunt împrăștiate. Dacă sistemul este caracterizat prin n periodicități, va exista o grupare netă de n puncte fixe ale secțiunii.

1. Atunci când soluțiile sunt periodice, traiectoria în spațiul fazelor tinde către o orbită închisă, tip ciclu limită. Secțiunea Poincaré corespunzătoare este foarte simplă și se reduce la un singur punct. Punctele A_0, A_1, A_2 din Fig.11.9 coincid total sau parțial.
2. Atunci când soluțiile sunt cvasiperiodice, dinamica sistemului este caracterizată de două perioade. Toată traiectoria se rulează pe un tor și poate fi privită ca suprapunerea a două mișcări: o revoluție de-a lungul celei mai mari dimensiuni și o rotație în jurul axei "cilindrului" ce formează torul. Fiecare frecvență de bază este atașată la una din aceste

mișcări. Imaginea din secțiunea Poincaré depinde de raportul în care se află cele două frecvențe. Să analizăm, în continuare, cazul în care:

$$\omega_1/\omega_2 = n_1/n_2. \quad (11.58)$$

- Dacă raportul n_1/n_2 este rațional, atunci traiectoria se închide și mișcarea este periodică. Secțiunea Poincaré corespunzătoare se reduce la o succesiune de puncte înșiruite de-a lungul unei curbe închise, a cărei formă poate fi simplă, fără puncte de intersecție (cerc, elipsă etc.), sau mai complicată.
- Dacă raportul n_1/n_2 este irațional atunci traiectoria nu se închide niciodată. Atractorul sistemului este un tor pe a cărui suprafață se așează traiectoriile. Secțiunea Poincaré corespunzătoare se reduce la o succesiune de puncte atât de apropiate, încât curba închisă este continuă. În acest caz vom spune că cele două frecvențe sunt "incomensurabile".

3. Atunci când dinamica sistemului este haotică, imaginea secțiunii Poincaré este foarte complexă și neregulată.

Importanța metodei *secțiunii Poincaré* este evidentă în cazul unei mișcări periodice, dar mai ales facilitează înțelegerea proceselor dinamice cu caracter complex (haotic), deoarece:

1. permite trecerea de la spațiul n -dimensional pe care sunt definite soluțiile unui sistem dinamic, la o aplicație P a planului asupra lui însuși, reducând numărul de coordonate la $n - 1$:

$$P : \vec{x}_n \rightarrow \vec{x}_{n-1}; \quad (11.59)$$

2. discretizarea timpului duce la substituirea ecuațiilor diferențiale cu ecuații cu diferențe finite, ușor de integrat prin metode numerice. Discretizarea Poincaré conduce la determinarea iterativă a punctelor din secțiune după regula:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= P(\vec{x}_0); \\ \vec{x}_2 &= P(\vec{x}_1) = P^2(\vec{x}_0) \\ \vec{x}_3 &= P(\vec{x}_2) = P^2(\vec{x}_1) = P^3(\vec{x}_0) \\ &\dots \\ \vec{x}_n &= P(\vec{x}_{n-1}) = P^2(\vec{x}_{n-2}) = \dots = P^n(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

3. discretizarea Poincaré este unică și reversibilă deoarece traiectoriile din spațiul fazelor nu se pot intersecta între ele.

Singura dificultate care apare aici este legată de faptul că nu există o metodă universală pentru găsirea analitică a aplicației P . De aceea, de cele mai multe ori ea se găsește folosind algoritmi numerici. Floquet [] a dezvoltat o teorie de analiză a stabilității soluțiilor periodice. Pentru perturbări de forma:

$$\vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_l. \quad (11.60)$$

ecuația (11.13) devine

$$\vec{\xi}_{n+1} = C\vec{\xi}_n = C^n\vec{\xi}_0, \quad (11.61)$$

iar comportamentul pe termen lung este descris de valorile proprii ale matricei C , definită în vecinătatea ciclului limită. Valorile proprii ale lui matricei lui Floquet determină stabilitatea traiectoriei:

- ciclul limită este *stabil* dacă distanța scade exponențial în timp. În acest caz valorile proprii ale lui C sunt subunitare în modul; $|\mu_i| < 1$, cu alte cuvinte toate valorile proprii sunt conținute în interiorul cercului de rază unitate din planul complex.
- ciclul limită este *instabil* dacă distanța crește exponențial în timp. În acest caz cel puțin o valoare proprie a lui C are modulul mai mare decât 1, $|\mu_i| > 1$. Totuși, în cazul punctelor care închid în timp traiectoria sub forma unei curbe de tip ciclu limită, analiza este ceva mai complicată.

11.6 Bifurcații

Dacă parametrii de control λ_i sunt fixați ca valori, portretul în spațiul fazelor este bine definit. Dacă valorile parametrilor λ_i se schimbă, atunci se modifică și portretul de fază. Unei mici variații în valorile λ_i îi poate corespunde, de asemenea, mici schimbări în portretul de fază. Există și cazuri în care schimbarea menționată apare brusc și starea sistemului devine total diferită de cea inițială. Spunem atunci că în evoluția sistemului a apărut o bifurcație.

Vom analiza, în continuare, modul în care dinamica sistemului este influențată de parametrii de control λ_i . După cum am discutat deja, aceștia descriu caracteristici intrinseci ale sistemului și, atunci când se schimbă, pot modifica în mod semnificativ evoluția acestuia. De exemplu, atunci când se depășește o valoare critică a unui parametru de control, $\lambda > \lambda_c$ sistemul își poate schimba starea staționară din punct stabil de echilibru în două (sau mai multe) puncte stabile de echilibru, cu alte cuvinte sistemul trece dintr-o stare staționară într-o stare oscilatorie.

Fenomenul prin care, în urma modificării parametrilor de control se produce trecerea bruscă spre noi stări posibile de echilibru, se numește *fenomen de bifurcație*.

Vom analiza acum cazul cel mai simplu, unidimensional, *bifurcațiilor locale*, care apar în vecinătatea unei poziții de echilibru (\vec{x}_0), luând în considerare variația unui singur parametru de control (λ). Dinamica sistemului (11.1), în acest caz, este descrisă de ecuația:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}_0, \lambda) = 0. \quad (11.62)$$

Această relație poate fi interpretată ca o ecuație implicită pentru determinarea punctelor staționare în funcție de parametrul de control:

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_0(\lambda). \quad (11.63)$$

În aceste condiții, să analizăm câteva situații posibile de bifurcații:

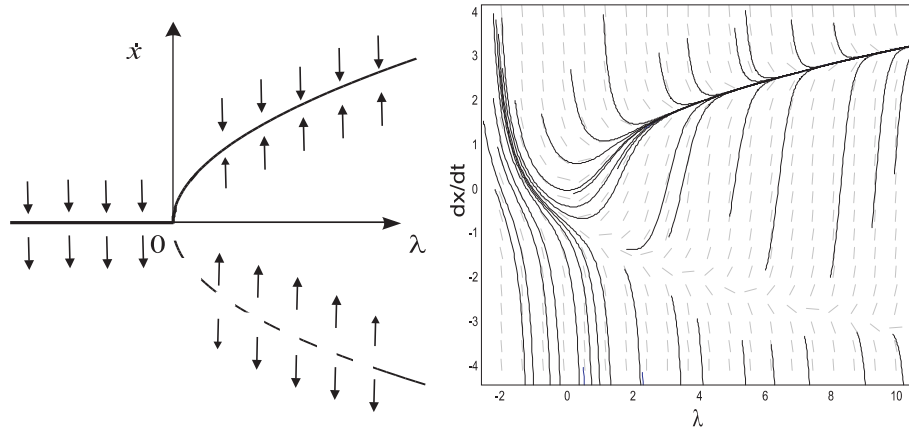


Figura 11.10: Bifurcație șa-nod

a. bifurcația șa-nod:

$$f = \lambda - x^2, \quad (11.64)$$

conduce la punctele fixe:

$$x_0^{(1)} = \sqrt{\lambda}, x_0^{(2)} = -\sqrt{\lambda}. \quad (11.65)$$

Așadar, dacă $\lambda \leq 0$, nu există valori reale pentru punctele staționare, deci nu este posibilă nici o stare staționară a sistemului. Dacă $\lambda > 0$, sistemul are brusc două stări staționare. Tipul exact de stabilitate în vecinătatea acestor puncte fixe se găsește prin analiza liniară prezentată anterior, adică prin analiza valorilor jacobianului asociat:

$$M = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} = -2x_0. \quad (11.66)$$

Se obțin *noduri stabile* pentru soluțiile $x_0^{(2)}$ și *noduri instabile* pentru soluțiile $x_0^{(1)}$. În Fig. 11.10 este reprezentată o bifurcație de tip șa-nod. În partea stângă este ilustrată dependența $f = f(\lambda)$. Săgețile marchează apropierea sau îndepărtarea traiectoriilor de punctele fixe, în funcție de valorile parametrului de control și marchează zonele de stabilitate. În partea dreaptă este ilustrat câmpul vectorilor vitează pe care sunt trasate efectiv câteva evoluții în timp, pornind din condiții inițiale diferite. Se observă că evoluțiile în timp pentru valorile $\lambda < 0$, conduc la o îndepărtare rapidă de stările staționare ($\frac{dx}{dt} = 0$), indiferent de condițiile inițiale. Pentru valorile $\lambda > 0$ stările staționare de pe ramura stabilă atrag toate traiectoriile care vin din vecinătate (de deasupra sau de sub ea), indiferent de condițiile inițiale.

b. bifurcația furcă:

$$f = \lambda x - x^3, \quad (11.67)$$

conduce la punctele fixe:

$$x_0^{(1)} = \sqrt{\lambda}, x_0^{(2)} = -\sqrt{\lambda}, x_0^{(3)} = 0. \quad (11.68)$$

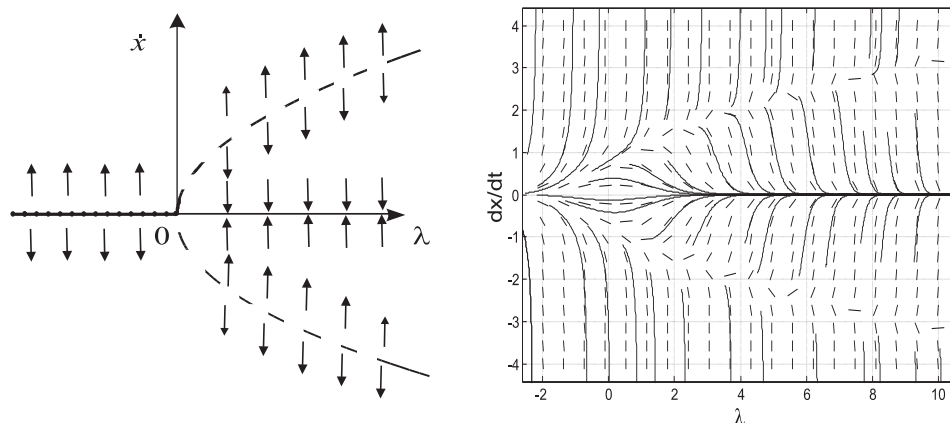


Figura 11.11: Bifurcație furcă transcritică

Pentru $\lambda = 0$ toate cele trei soluții colapsează, iar sistemul are o singură stare staționară. Dacă $\lambda \neq 0$ sistemul sare la trei stări staționare. Nu sunt posibile stări staționare pentru $\lambda < 0$. Din analiza valorilor jacobianului asociat rezultă:

$$M = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} = \lambda - 3x_0^2. \quad (11.69)$$

Ca urmare:

$$M(x_0^{(1)}) = M(x_0^{(2)}) = -2\lambda; \quad (11.70)$$

$$M(x_0^{(3)}) = -\lambda, \quad (11.71)$$

adică pentru $\lambda < 0$ stările sunt instabile de tip șa iar pentru $\lambda > 0$ stările sunt de tip noduri stabile. Forma unei astfel de bifurcații de tip furcă numită *supercritică*¹⁸ este indicată în Fig.11.11. Cazul în care:

$$f = \lambda x - x^3, \quad (11.72)$$

conduce la o inversare a condițiilor de stabilitate, astfel că va exista o singură ramură sra-bilă pentru $\lambda < 0$. Ilustrarea acestei bifurcații, numită *subcritică* este dată alături de cea în Fig.11.12.

c. bifurcația *transcritică*:

$$f = \lambda x - x^2, \quad (11.73)$$

¹⁸Un exemplu al acestui tip de bifurcație este întâlnit în sistemele magnetice, în vecinătatea punctului Curie, unde are loc tranziția de la o stare paramagnetică la una feromagnetică și invers, parametrul de control fiind temperatura.

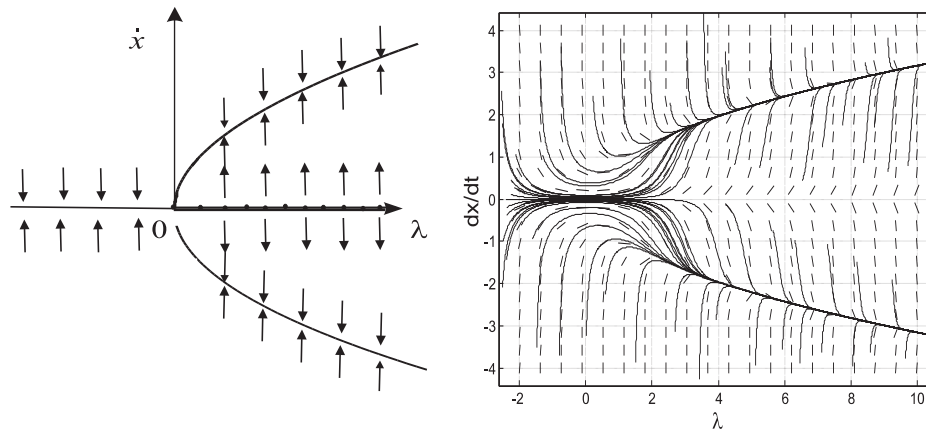


Figura 11.12: Bifurcație furcă supercritică

conduce la punctele fixe:

$$x_0^{(1)} = \lambda, x_0^{(2)} = 0. \quad (11.74)$$

Așadar sunt posibile două stări staționară pentru orice valoare a parametrului $\lambda \neq 0$ și o singură stare staționară dacă $\lambda = 0$. Din analiza valorilor jacobianului asociat:

$$M = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0} = \lambda - 2x_0. \quad (11.75)$$

Rezultă că:

$$M(x_0^{(1)}) = -\lambda; M(x_0^{(2)}) = \lambda; \quad (11.76)$$

Așadar sistemul are o stare stabilă și o stare instabilă care colapsează pentru $\lambda = 0$. În Fig. 11.13 este dată această reprezentare: zonele de instabilitate sunt marcate prin puncte.

d. bifurcația Hopf:

În acest caz sistemul are cel puțin două dimensiuni. Să considerăm spre exemplu:

$$\dot{x} = -y + x(\lambda - (x^2 + y^2)); \quad (11.77)$$

$$\dot{y} = x + y(\lambda - (x^2 + y^2)). \quad (11.78)$$

Din analiza valorilor jacobianului în jurul stării staționare (0,0) rezultă:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & \lambda - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix}_{(0,0)} \quad (11.79)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad (11.80)$$

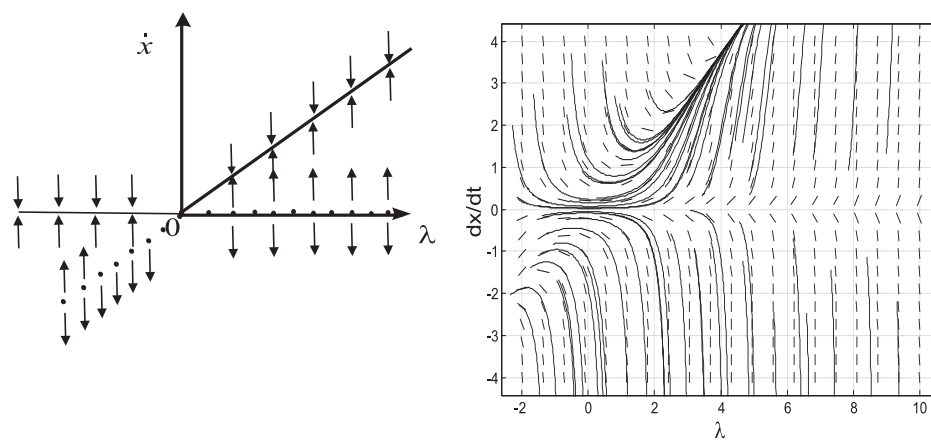


Figura 11.13: Bifurcație transcritică

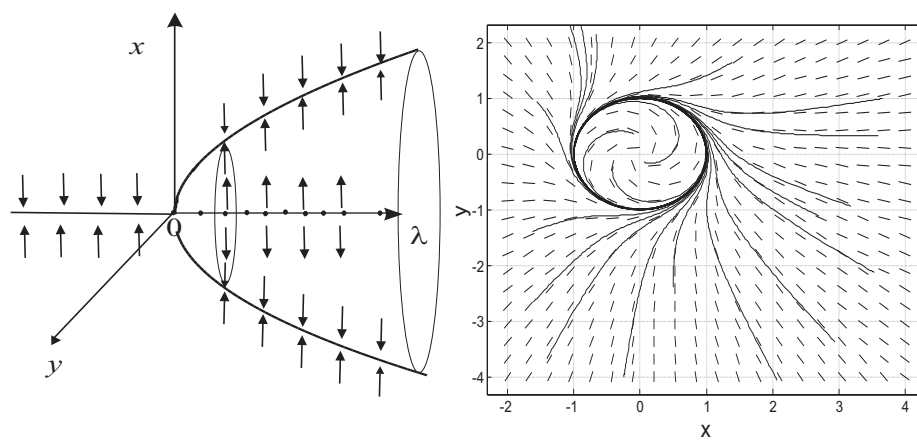


Figura 11.14: Bifurcație Hopf

Ca urmare, în vecinătatea acestui punct avem:

$$\det M = \lambda^2 + 1; \quad (11.81)$$

$$\text{Tr}M = \lambda, \quad (11.82)$$

de unde rezultă că soluțiile ecuației seculare sunt:

$$\mu_{1,2} = \lambda \pm i. \quad (11.83)$$

Așadar, pentru $\lambda < 0$ sistemul are o stare stabilă de tip focar stabil (nod spiral), iar pentru $\lambda > 0$ - o stare instabilă de tip focar care colapsează pentru $\lambda = 0$. De pe atractorul staționar (0,0) sistemul converge (pentru $\lambda > 0$) spre o soluție periodică descrisă de un ciclu limită, cu raza crescătoare în timp. Astfel de bifurcații, ilustrate în Fig. 11.14 au fost studiate de Hopf¹⁹ în 1942. La fel ca și în cazul bifurcației de tip furcă, acest tip de bifurcație, care face trecerea de la un punct fix stabil la un ciclu limită, are două forme: bifurcație Hopf *supercritică* (reprezentată în Fig. 11.14) și o formă *subcritică*.

O abordare alternativă a principalelor tipuri de bifurcații prezentate se poate face considerând că un anumit tip poate fi găsit ca rezultat al unei perturbări imperfecte a unei bifurcații transcritice sau de tip furcă. Ecuația generală a unei perturbații imperfecte poate fi scrisă sub forma:

$$\dot{x} = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (11.84)$$

în care toți termenii polinomului coexistă. În urma modificării axei timpului ($\tau = 1/at$) și după efectuarea schimbării de variabilă $z = x - (b/3a)$, ecuația precedentă se reduce la forma canonică:

$$\dot{z} = -z^3 + \sigma z + \zeta, \quad (11.85)$$

în care σ și ζ sunt combinații de parametri originali. Analiza acestei ecuații a fost făcută în vol.I secțiunea 3.9.

11.7 Exponenți Lyapunov

Pentru caracterizarea cantitativă a comportamentului haotic s-au propus mai multe mărimi. Printre acestea se numără și exponenții Lyapunov. Aceștia sunt definiți pentru a caracteriza modul de împrăștiere a traiectoriilor în spațiul fazelor. Exponenții Lyapunov măsoară rata de divergență a două traiectorii alăturate în spațiul n -dimensional al fazelor. În notația adoptată de noi, distanța dintre două traiectorii vecine ar putea fi chiar deplasarea $\vec{\xi}(t)$ definită anterior:

$$\vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_0(t), \quad (11.86)$$

care satisface ecuația de mișcare:

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = M\vec{\xi}(t). \quad (11.87)$$

¹⁹Eberhardt Hopf (1902-1942), matematician german.

Soluția sistemului liniarizat conduce la soluții instabile de forma unor superpoziții de funcții de forma:

$$\xi_i(t) = \xi_{i0} e^{\Lambda_i t}, \tag{11.88}$$

Dacă $\Lambda_i > 0$, se definește exponentul Lyapunov ca:

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\xi(t)}{\xi(t_0)} \right|. \tag{11.89}$$

După cum se constată, coeficientul Lyapunov depinde de direcția $i, i = \overline{1, n}$ după care se calculează divergența. În mod evident, pentru un sistem cu n dimensiuni vor exista n coeficienți Lyapunov. Prezența a cel puțin unui exponent Lyapunov pozitiv este un indiciu că traiectoriile sunt puternic divergente, deci sistemul poate fi considerat haotic.

Spectrul exponenților Lyapunov este cea mai folosită metodă de diagnoză a sistemelor haotice. Semnul acestor coeficienți permite o clasificare a atractorilor. De exemplu, pentru un sistem caracterizat de 3 ecuații diferențiale (în care poate apărea haos) există trei exponenților Lyapunov a căror combinație este caracteristică pentru un anumit attractor.

- $(-, -, -) \rightarrow$ punct fix (comportament staționar);
- $(0, -, -) \rightarrow$ ciclu limită (comportament oscilatoriu);
- $(0, 0, -) \rightarrow$ tor (comportament quasiperiodic);
- $(+, 0, -) \rightarrow$ attractor straniu²⁰ (comportament haotic).

Ca urmare, orbitele haotice au cel puțin un exponent Lyapunov pozitiv; pentru orbitele periodice toți exponenții Lyapunov sunt negativi, iar în apropierea unei bifurcații, exponentul Lyapunov este zero.

11.8 Fractali. Auto-asemănare. Dimensiune fractală și dimensiune topologică

Conform definiției dată de Mandelbrot [] în 1975, poate fi considerată fractal orice figură geometrică sau obiect natural care are simultan următoarele caracteristici:

- a) părțile sale au aceeași formă sau structură ca și întregul (putând fi totuși ușor deformat) la scări diferite;
- b) forma sa este și rămâne, oricare ar fi scara de analiză, fie extrem de neregulată, fie extrem de întreruptă sau fragmentată;
- c) conține elemente distincte ale căror scări sunt foarte variate și acoperă o gamă foarte largă de valori.

O proprietate fundamentală a structurilor fractalice este auto-asemănarea. Această proprietate, numită și *invarianță de scară* constă în conservarea structurii unui obiect, indiferent de scara la care este reprezentat. De obicei construcțiile geometrice ale fractalilor se bazează pe reguli de iterație care se aplică în mod repetitiv.

De exemplu, *setul Cantor* este construit prin eliminarea de fiecare dată a treimii din mijlocul segmentelor apărute pornind de la un segment de lungime dată. În Fig. 11.15 sunt

²⁰Se face, de multe ori, distincția între attractorul straniu, caracterizat de o comportare geometrică repetitivă la diferite scări de observație (comportare fractală) și cel haotic pur.

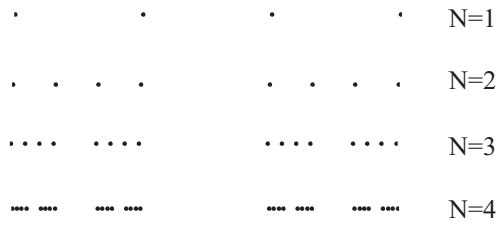


Figura 11.15: Setul Cantor după N iterații

marcate capetele segmentelor obținute prin extragerea unei treimi din segmentul obținut în iterația precedentă.

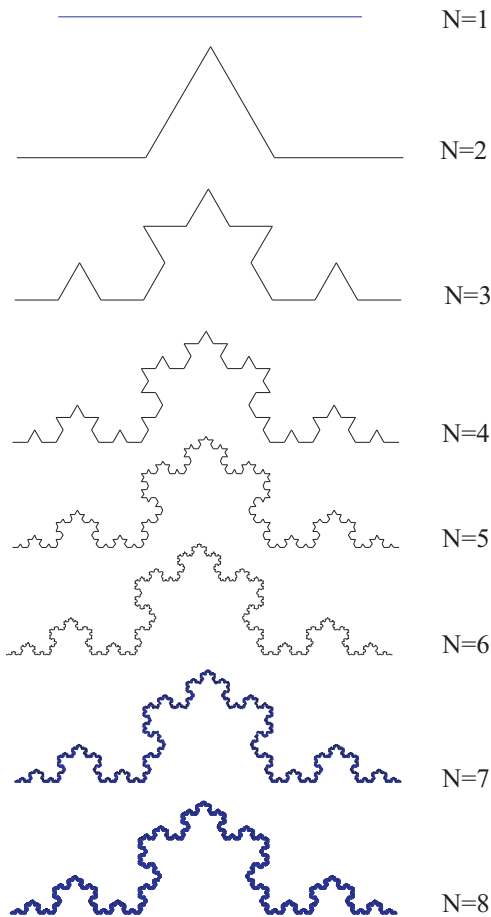


Figura 11.16: Curba Koch după N iterații

Curba lui Koch (ilustrată în Fig.11.16) se construiește începând cu o linie dreaptă la mijlocul căreia, în loc să se taie o treime, se adaugă două treimi sub forma unei linii frânte de forma

unui *dinte*; procesul se repetă în iterații succesive pentru fiecare segment similar cu cel inițial. O caracteristică importantă a curbei Koch este faptul că, deși este continuă în fiecare punct, ea nu este, totuși, diferențiabilă. Un fractal este caracterizat de o dimensiune fracționară, care nu are corespondent în geometria euclidiană. De exemplu, un corp de formă sferică poate fi caracterizat prin lungimea circumferinței. Aceasta este însă o dimensiune grosieră, deoarece ignoră neregularitățile suprafeței obiectului, și nu poate fi astfel considerată o componentă de identificare a acestuia. Dimensiunea fractală ține însă cont de aceste proprietăți, cuantificând gradul de "rugozitate" al obiectului.

Odată cu descoperirea calculului diferențial și integral de către Newton și Leibnitz s-a impus în mod firesc o ipoteză de bază în fizica clasică – ipoteza diferențiabilității. Forța unei astfel de presupuneri s-a manifestat prin aceea că a permis formularea legilor fizicii în termenii unor ecuații diferențiale. În abordarea modernă, se pune problema construirii unei fizici descrise de funcții continue dar non-diferențiabile. Pentru caracterizarea structurilor de tip fractal, a fost introdusă de către Kolmogorov (1958) o nouă mărime, d_f , cunoscută sub numele de *dimensiune de capacitate*. Pentru a defini această mărime, să considerăm un set S de puncte, aflat într-o regiune mărginită a spațiului R_n . Notăm cu $N(\varepsilon)$ numărul minim de "sfere" de rază ε (deci volum ε^n) necesar pentru a acoperi toate punctele setului S . Dacă pentru limita $\varepsilon \rightarrow 0$ găsim $N(\varepsilon) = \varepsilon^{d_f}$, atunci putem defini *dimensiunea de capacitate*, numită și *dimensiune fractală* (Mandelbrot, 1982), ca raportul:

$$d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (11.90)$$

Punctul are dimensiunea 0, curba are dimensiunea 1 iar o suprafață are dimensiunea 2. Un fractal are o dimensiune fracționară situată între 1 și 2.

11.9 Sistem cu dinamică haotică

11.9.1 Oscilatorul van der Pol în regim forțat

Oscilatorul van der Pol în regim forțat este descris de următoarea ecuație diferențială liniară de ordin doi:

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = f \cos \omega t. \quad (11.91)$$

Aceasta este echivalentă cu un sistem de trei ecuații diferențiale ordinare, a treia ecuație transformându-l în sistem autonom:

$$\dot{x} = y; \quad (11.92)$$

$$\dot{y} = \epsilon(1 - x^2)y - x + f \cos z; \quad (11.93)$$

$$\dot{z} = \omega. \quad (11.94)$$

În absența forțării, deja s-a discutat anterior că, pentru $x > 1$, termenul de amortizare este pozitiv și, ca urmare, traiectoriile în spațiul fazelor tind exponențial spre un nod stabil. Dacă $x < 1$, traiectoriile în spațiul fazelor conduc la un ciclu limită, care este deformat în funcție de valoarea neliniarității ϵ . Un oscilator van der Pol cu $x < 1$ oscilează, indiferent de condițiile

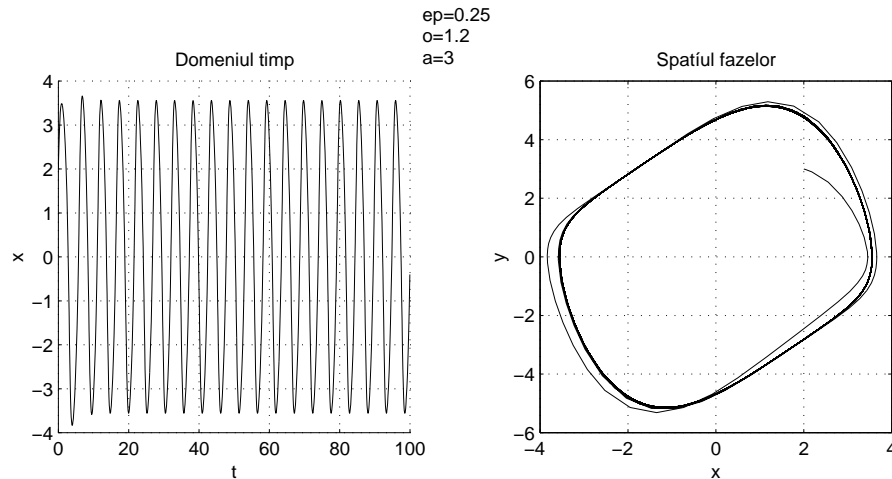


Figura 11.17: Evoluția în timp și în spațiul fazelor a unui oscilator van der Pol. Parametrii de control sunt specificați în partea de sus a figurii.

inițiale. Să analizăm, în continuare, cum se schimbă mișcarea oscilatorului dacă îl forțăm din exterior cu o forță periodică de tipul $f \cos \omega t$. Dinamica este deosebit de complexă, și în funcție de valoarea neliniarității sau considerând drept parametru de control amplitudinea sau frecvența, se pot observa următoarele dinamici distincte:

- antrenare totală sau parțială a mișcării de către forța exterioară sau sincronizare cu aceasta;
- cvasiperiodicitate;
- haos.

Dacă amplitudinea forțării este suficient de mare, de exemplu $f = 3, \omega = 1.2$, iar neliniaritatea este redusă, $\epsilon = 0.25$, sistemul este complet antrenat de forța exterioară și oscilează sincronizat cu acesta, pe aceeași frecvență. În cele ce urmează se vor ilustra unele rezultate numerice obținute prin rezolvarea sistemului de ecuații, după încetarea regimului tranzitoriu. Evoluția temporală $x(t)$ și în spațiul fazelor (x, y) sunt ilustrate în Fig.11.17. În cazurile în care amplitudinea forțării nu este prea mare, astfel încât să producă antrenarea totală și să controleze complet dinamica, se poate găsi un fenomen de cvasiperiodicitate care constă dintr-o competiție între frecvența proprie a sistemului și cea a forței exterioare. Evoluția temporală $x(t)$ și spațiul fazelor (x, y) pentru cazul de cvasiperiodicitate sunt ilustrate în Fig.11.18.

Fenomenul de cvasiperiodicitate se observă cel mai clar în analiza spectrului de putere. Între frecvențele caracteristice există un raport de numere întregi. Există un domeniu de parametri pentru care comportarea oscilatorului van der Pol este haotică. În cazul unei neliniarități pronunțate și al unui irațional între frecvențele implicate, traiectoriile în spațiul fazelor pot umple toată zona avută la dispoziție.

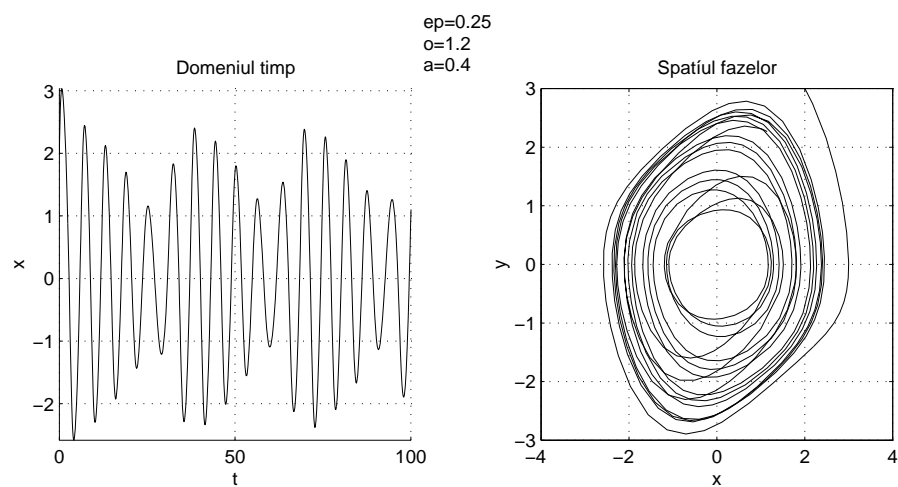


Figura 11.18: Evoluția în timp și în spațiul fazelor a unui oscilator van der Pol. Unul din parametrii de control are o valoare inferioară celei din figura anterioară.

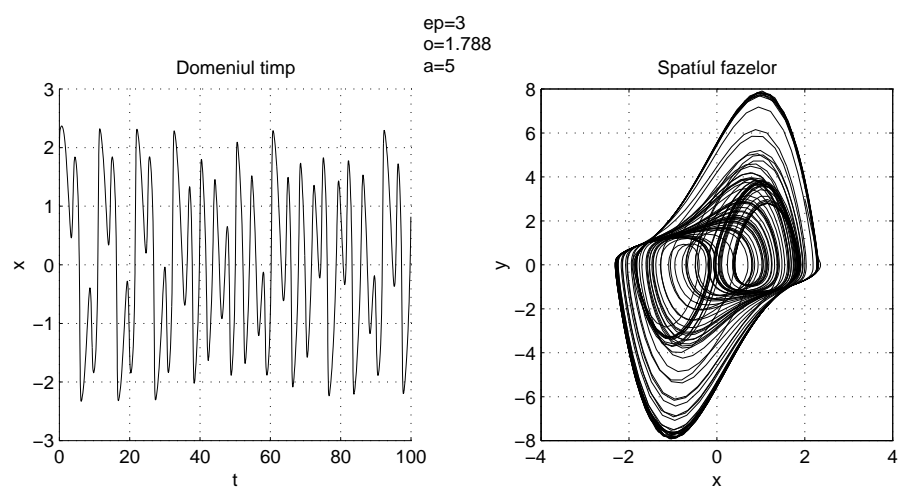


Figura 11.19: Evoluția în timp și în spațiul fazelor a unui oscilator van der Pol. Doi dintre parametrii de control au primit alte valori decât cele din cele două figuri anterioare.

În Fig. 11.19 este ilustrată o secvență din domeniul timp a soluției x și spațiul fazelor (x, y) asociat comportării haotice pentru un domeniu de timp limitat. Diagramele Poincaré pentru situațiile reprezentate în ultimele două cazuri ne confirmă observațiile făcute.

Comportarea oscilatorului se poate analiza în mod global, construind diagrama de bifurcație pentru parametrul de control - amplitudinea de forțare. Diagramele de bifurcație oferă o imagine de ansamblu a dinamicii sistemului considerat, pentru un domeniu de variație a unor mărimi considerate drept parametri de control. Dacă lucrăm cu amplitudinea forțării ca parametru de control ($\omega = 1.25$) ce variază între 0 și 5, se obțin diagramele trasate pentru cele două frecvențe considerate de noi pentru două cazuri de neliniarități: mică, $\epsilon = 0.25$ și mare $\epsilon = 3$. În acest fel se pot determina valorile parametrilor de control care conduc la un anumit tip de dinamică. În mod evident, dacă se calculează coeficienții Lyapunov, se găsesc valori pozitive pentru domeniul haotic, și valori nule sau negative pentru stările periodice sau de cvasiperiodicitate.

11.9.2 Haos în cazul curgerii turbulente

Dinamica fluidelor și în special curgerea turbulentă oferă poate cel mai intuitiv mod de înțelegere a comportării haotice pentru sistemele deterministe. De fapt, analiza mișcărilor maselor de aer din atmosferă, în scopul predicțiilor meteorologice a constituit prima lucrare în care s-a făcut referire la așa-numita problemă a *sensibilității la condițiile inițiale*. Așa cum am menționat, această proprietate constituie unul din ingredientele de bază ale teoriei haosului determinist.

În cazul curgerii laminare în regim staționar, distanța dintre traiectoriile a două particule de fluid vecine se menține constantă în timpul mișcării sau variază într-un domeniu limitat. Dacă se modifică puțin condițiile inițiale de curgere, rezultatul final este previzibil, fiind doar

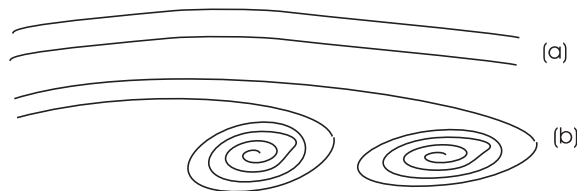


Figura 11.20: Tipuri de traiectorii: (a) predictibile (b) impredictibile

puțin modificat față de cel anterior.

Acest lucru este ilustrat în Fig.11.20(a). Dependența de condițiile inițiale este însă decisivă în regimul de curgere turbulentă. Două particule de fluid vecine la momentul inițial se vor deplasa pe traiectorii complicate, îndepărtându-se în mod exponențial una față de alta. În această situație, o modificare a poziției inițiale a unei particule conduce la impredictibilitatea stării finale (Fig.11.20(b)). Deși curgerea este guvernată și în acest caz de ecuații deterministe, care sunt, în principiu, rezolvabile pentru orice set de condiții la limită cunoscute, totuși starea finală nu poate fi precizată.

Acest comportament a fost observat de către Edward Lorenz, care lucra în 1961 la un program de simulare a dinamicii atmosferice. În timp ce rula un program format din

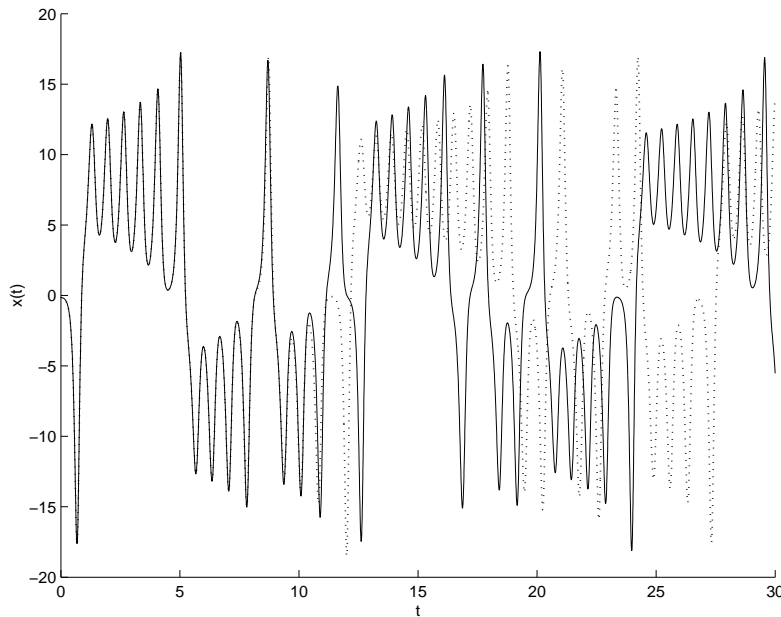


Figura 11.21: Ilustrarea sensibilității sistemului Lorenz pentru o modificare a condiției inițiale cu 10^{-4} .

douăsprezece ecuații diferențiale liniare, a vrut să reia unele calcule și a introdus, ca valoare inițială o valoare aflată în șirul de date obținute. Spre marea lui surprindere, lista noilor date nu coincidea cu cea din rularea anterioară. Urmărind noile rezultate, a observat că acestea reiau șirul deja aflat doar pe un mică porțiune, după care, rezultatele noi diferă mult de cele aflate anterior. Printr-o analiză atentă, și-a dat seama că *erorile* apărute provin din *trunchierea* numărului de zecimale considerate. În Fig.11.21 este ilustrată sensibilitatea sistemului la condițiile inițiale. Rezolvarea numerică a fost făcută pentru o diferență a condițiilor inițiale ale lui x de 10^{-4} în sistemul de ecuații Loreny pe care le vom discuta mai departe. Mai târziu, în 1963, Lorenz analizează sub acest aspect, o nouă problemă legată de fluide și anume *curgerea convectivă*. El studiază mișcarea unui fluid între două plăci plane, menținute la temperaturi diferite. Căldura este transferată de la placa caldă (cea de jos) la placa rece (cea de sus) prin fenomenul de conducție termică iar mișcarea fluidului este controlată de vâscozitate. Fenomenul legat de mișcarea ce apare datorită diferenței (gradientului) de temperatură este numit *convecție*. El poate fi modelat de o singură ecuație diferențială cu derivate parțiale. Ca metodă de rezolvare a ecuației se propune descompunerea în mișcări simple (moduri proprii) din care, în primă aproximație, se consideră ca decisive doar trei. Ecuațiile pe care Lorenz le consideră importante în analiza acestui fenomen sunt:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad (11.95)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz \quad (11.96)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz, \quad (11.97)$$

cunoscute ca *ecuațiile Lorenz*. Variabilele ce caracterizează sistemul sunt (x, y, z) și descriu:

- x - viteza fluidului în mișcarea circulară de convecție;
- y - variația orizontală a temperaturii;
- z - variația verticală a temperaturii.

Parametrii sistemului sunt (σ, r, b) și definesc următoarele proprietăți:

- r este proporțional cu numărul lui Reynolds - descrie tranziția din regim laminar în regim turbulent;
- b descrie configurația (geometria) sistemului;
- σ este proporțional cu numărul Prandtl, care descrie raportul dintre vâscozitate și conductivitatea termică a fluidului²¹.

Lorenz a constatat că, pentru $b = 8/3$, convecția începe la valori mici ale lui σ , adică a diferenței de temperatură dintre cele două plăci. Sistemul de ecuații ale lui Lorenz, deși la prima vedere pare simplu, nu are soluții analitice, adică nu se poate da o expresie matematică de tipul $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, care să descrie evoluția la orice moment de timp. Soluția poate fi găsită doar prin integrare numerică. Parametrii utilizați de Lorenz au fost $\sigma = 10.0, r = 28.0, b = 2.666666666$ pentru condițiile inițiale: $x_0 = -0.6895; y_0 = -0.0560; z_0 = 19.3245$. În Fig.11.21 se observă cum, începând de la un la un moment dat, una din soluții (trasată cu linie punctată) se detașează de cealaltă, evoluția sistemului fiind mult diferită.

Analiza sistemului arată o comportare diferită, în funcție de valorile parametrilor (σ, r, b) . Dacă se fixează valorile (σ, b) și se consideră drept parametru de control r , care se variază de la valori mici spre valori mari, se obțin o serie de bifurcații care conduc sistemul dintr-o stare staționară, prin stări de intermitență spre stări haotice. Aceste comportări sunt ilustrate mai departe, în reprezentările datelor numerice obținute pentru valorile specificate ale parametrilor.

Dacă temperatura dintre cele două plăci nu este prea mare, fluidul rămâne în stare staționară. Odată cu creșterea valorii lui r , sistemul are o comportare din ce în ce mai complexă, evoluând spre starea haotică. În Fig.11.22, sunt ilustrate diferite dinamici posibile ale sistemului pentru valori diferite ale parametrilor: regim cu două stări staționare, regim periodic și regim haotic. Pentru fiecare situație, sunt reprezentate dependența de timp a variabilelor x, y, z și, în mod corespunzător, atractorii din spațiul 3-dimensional al fazelor. În aceste figuri, cu linie îngroșată este reprezentată traiectoria sistemului, pentru o altă condiție inițială.

11.10 Haos în sisteme hamiltoniene

Un tip special de sisteme dinamice, de importanță deosebită în fizică îl constituie sistemele a căror dinamică în spațiul fazelor este determinată de funcția lui Hamilton. În cazul sistemelor autonome, această funcție este o constantă a mișcării și coincide cu energia totală a sistemului.

²¹Fluidele ușor "convectibile" sunt caracterizate de o valoare mică a numărului Prandtl.

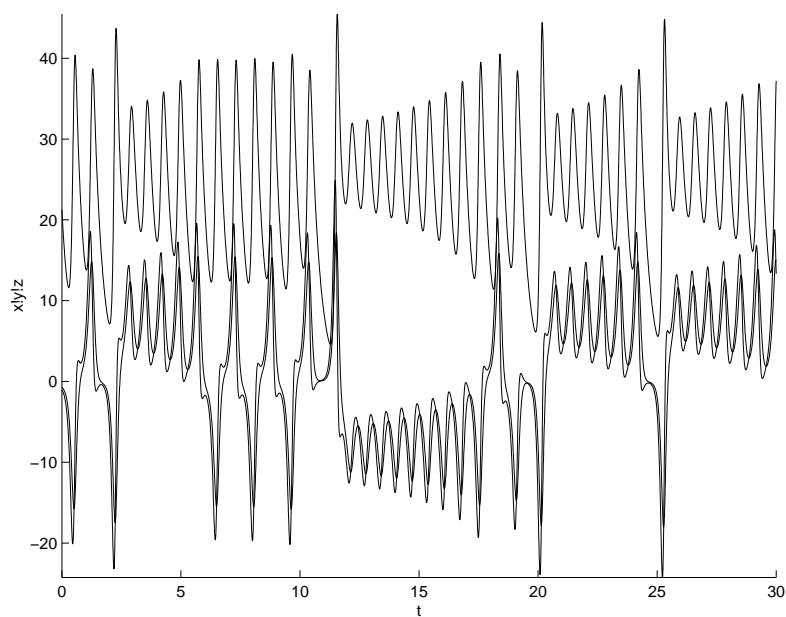


Figura 11.22: Dependența de timp a variabilelor x, y, z pentru $\sigma = 10, b = 2.666, r = 28$.

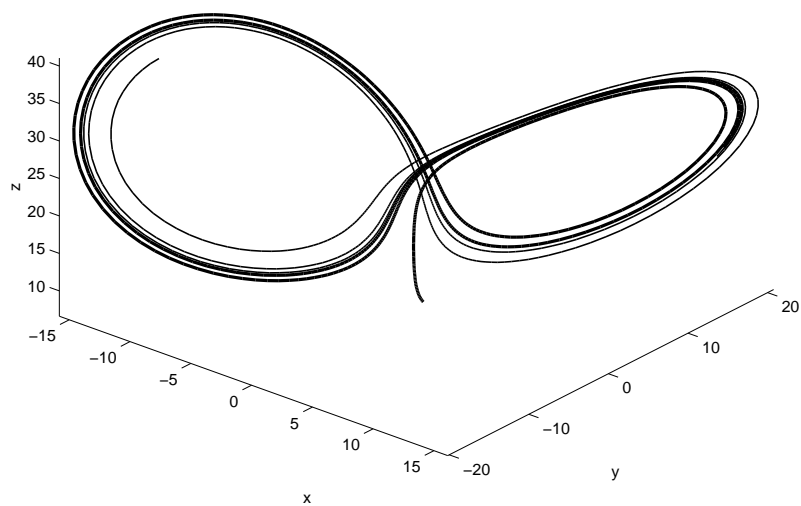


Figura 11.23: Atractorul corespunzător reprezentării din Fig.11.22

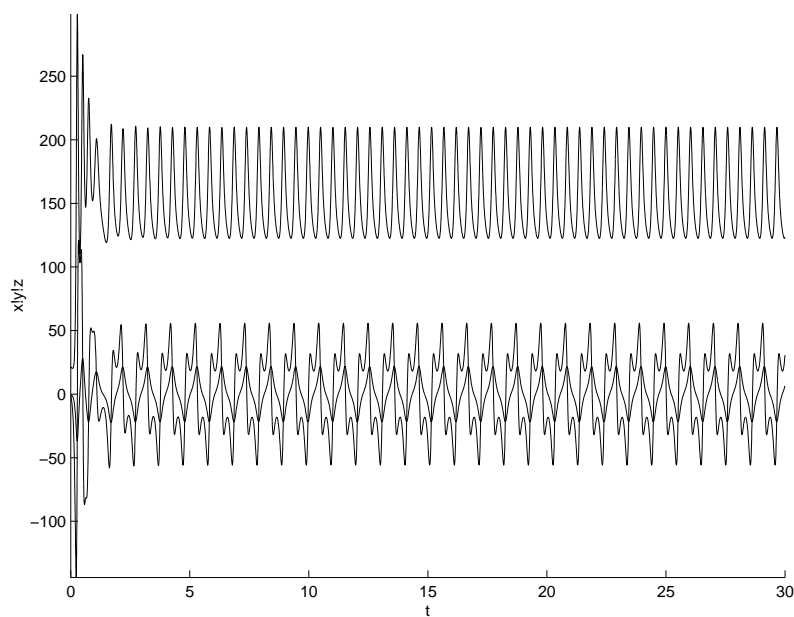


Figura 11.24: Dependența de timp a variabilelor x, y, z pentru $\sigma = 3, b = 1, r = 166$.

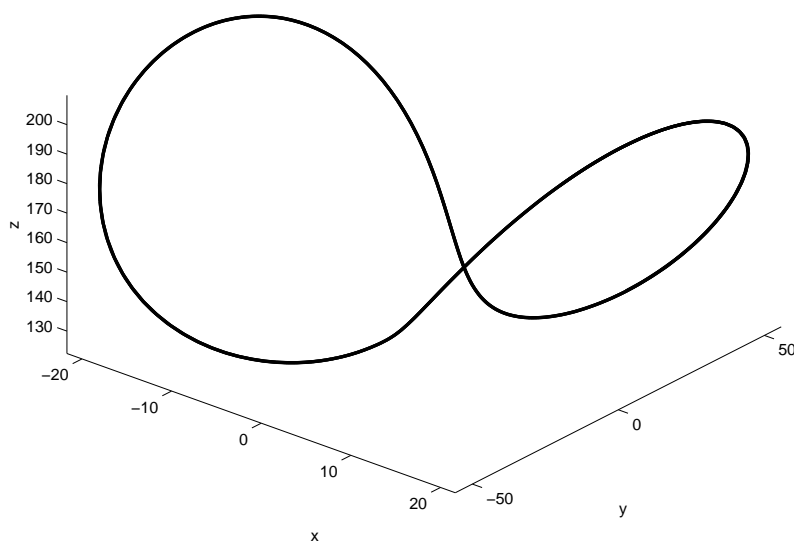


Figura 11.25: Atractorul corespunzător reprezentării din Fig.11.24

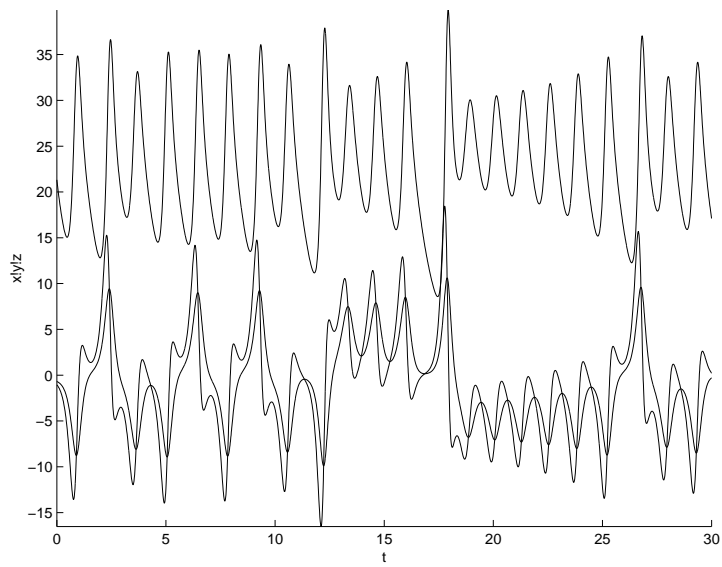


Figura 11.26: Dependența de timp a variabilelor x, y, z pentru $\sigma = 3, b = 1, r = 26$.

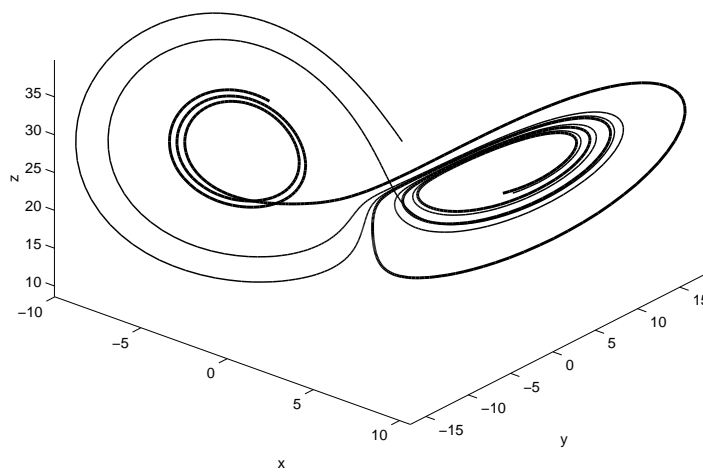


Figura 11.27: Atractorul corespunzător reprezentării din Fig.11.26

Sistemele hamiltoniene sunt descrise de un set de variabile (q_i, p_i) , $i = \overline{1, n}$, n fiind numărul de grade de libertate ale sistemului, a căror evoluție în timp este determinată de ecuațiile lui Hamilton. Acestea reprezintă un set de $2n$ —ecuații diferențiale ordinare cuplate²² care se pot scrie atunci când este cunoscută expresia funcției Hamilton $H = H(q_i, p_i, t)$.

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad (11.98)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (11.99)$$

Așadar, funcția lui Hamilton joacă același rol ca și funcțiile $f_i(x_i)$ din cazul sistemelor dinamice disipative. Analogia merge și la nivelul variabilelor $x_1 = q_1, x_2 = q_2, \dots$. Legătura specială dintre q_i și p_i , dată de ecuațiile Hamilton conferă spațiului fazelor proprietăți matematice speciale cunoscute sub numele de *structură symplectică*²³.

Spațiul fazelor unui sistem hamiltonian este $2n$ -dimensional și, pentru că este greu de vizualizat, se folosesc și în acest caz secțiunile Poincare. Când H nu depinde explicit de timp, sistemele hamiltoniene sunt conservative. Principala deosebire între sistemele dinamice disipative și cele hamiltoniene constă în faptul că, în cel de-al doilea caz, volumul în spațiul fazelor se conservă. Ca urmare, sistemele hamiltoniene nu posedă atractori în spațiul fazelor. Se pune atunci întrebarea apare haos în astfel de sisteme și dacă apare, în ce mod se manifestă și poate fi caracterizat? Printre exemple de sisteme hamiltoniene, deși în mod practic sunt destul de rare, se află sistemele mecanice în absența oricăror forțe de frecare. Cel mai analizat sistem aproape conservativ este sistemul solar. Totuși și în acest sistem există surse de disipare a energiei legate de forța mareelor, vânturi solare, fluxuri de particule emise de exploziile unor asteroizi, etc.

11.10.1 Sisteme integrabile

Energia totală a sistemelor conservative coincide cu funcția lui Hamilton, $E = H = H(q_i, p_i)$ și este o integrală mișcării. În acest caz, pornind de la o stare inițială oarecare, (q_{i0}, p_{i0}) sistemul evoluează în spațiul fazelor pe o traiectorie descrisă de valorile lui $(q_i(t), p_i(t))$ determinate la orice moment de timp din ecuațiile Hamilton. Deoarece $H(q_i(t), p_i(t)) = H(q_{i0}, p_{i0})$ înseamnă că orice traiectorie posibilă este strict determinată de valoarea lui H . Cu alte cuvinte, traiectoriile în spațiul fazelor pot fi etichetate în funcție de valoarea energiei. Această observație nu este valabilă și reciproc, o valoare dată a energiei putând corespunde la mai multe traiectorii posibile. Traiectoriile pot fi, de asemenea, recunoscute după orice altă mărime care se păstrează constantă în timpul mișcării. În acest caz, ele sunt limitate nu doar în regiunea din spațiul fazelor corespunzătoare unei valori date a energiei, ci și a celei limitate de valoarea constantei de mișcare. Astfel, traiectoriile se regăsesc pe suprafața $2n - k$ dimensională, unde k este numărul constantelor de mișcare. Dacă numărul de constante de mișcare coincide cu numărul de grade de libertate, atunci sistemul este *integrabil*; sistemul nu

²² așa cum am discutat în capitolul dedicat mecanicii analitice

²³ Dacă se iau 3 traiectorii apropiate în spațiul fazelor (q_i, p_i) , $(q_i + dq_i, p_i + dp_i)$, $(q_i + dq'_i, p_i + dp'_i)$ atunci suprafața $dp_i dq'_i - dq_i dp'_i$, numită suprafață symplectică, se conservă, adică: $\frac{d}{dt}(dp_i dq'_i - dq_i dp'_i) = 0$.

este integrabil (spunem că e *nonintegrabil*), dacă acest număr este mai mic. Condiția de integrabilitate, după cum am discutat anterior, este echivalentă cu o restricționare a traiectoriilor din spațiul fazelor pe o suprafață n - dimensională ($n = 2$ va corespunde suprafeței unui tor). Uneori (în special pentru mișcările periodice) este mai avantajos să se lucreze cu variabile care se conservă, și anume variabilele *acțiune* și perechea canonic conjugată - unghi, θ . *Variabila acțiune* este definită ca:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint pdq. \quad (11.100)$$

Dacă considerăm transformările canonice de la variabilele coordonate generalizate - impulsuri generalizate la variabile acțiune - unghi: $(q, p) \rightarrow (J, \theta)$, atunci, ecuațiile Hamilton conduc la relațiile:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}; \quad (11.101)$$

$$J_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}. \quad (11.102)$$

Deoarece variabila unghi nu are dimensiune, rezultă că variabila acțiune trebuie să aibă dimensiunea energie \times timp sau după cum a fost definită anterior, impuls \times distanță²⁴. Se înțelege acum de ce această variabilă se conservă în mișcarea periodică. În general vorbind, cazul în care H nu depinde de variabila unghi θ_i adică $H = H(J_i)$ conduce la consecința că J_i este o integrală a mișcării. În acest caz, sistemul **este integrabil**:

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0 \Rightarrow J_i = \text{const.} \quad (11.103)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i(J), i = \overline{1, n}. \quad (11.104)$$

Mărimile ω_i se numesc frecvențe unghiulare ale mișcării; ele depind doar de J_i , deci sunt constante în timp. Prin integrarea ecuației (11.104) rezultă:

$$\theta_i = \omega_i t + \theta_i(0). \quad (11.105)$$

În concluzie, dacă găsim transformări canonice de tipul $(q_i, p_i) \rightarrow (J, \theta)$ care să conducă la relațiile (11.103), (11.104) atunci sistemul este în mod sigur integrabil. Analiza matematică a sistemelor integrabile conduce la concluzia că, printre sistemele hamiltoniene se recunosc ca integrabile următoarele:

- sisteme cu un singur grad de libertate cu $H(q_1, p_1)$ infinit diferentiabilă în variabilele (q_1, p_1) ;
- sisteme cu $H(q_i, p_i)$ ca funcții liniare de q_i, p_i ;
- sisteme cu $H(q_i, p_i)$ funcții neliniare de q_i, p_i dar care pot fi decuplate în sisteme unidimensionale.

²⁴Orice mărime fizică care are această dimensiune poate fi considerată variabilă acțiune.

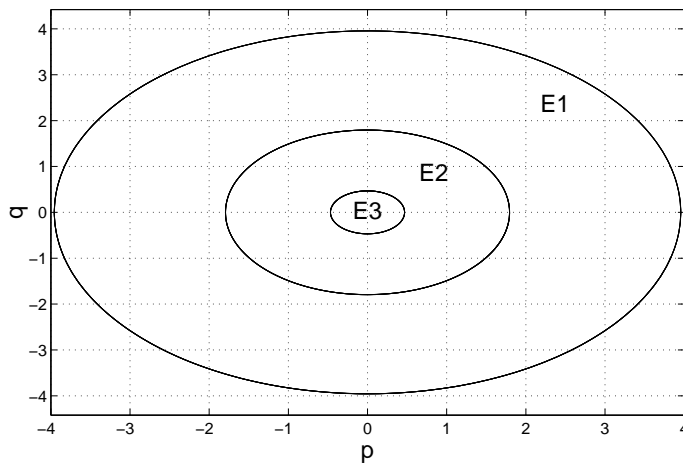


Figura 11.28:

Să considerăm spre exemplu cazul unui sistem conservativ cu un singur grad de libertate și anume un oscilator liniar armonic. Atunci:

$$H(p, q) = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \quad (11.106)$$

iar ecuațiile de mișcare sunt:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q. \end{aligned}$$

În reprezentarea din spațiul fazelor, din Fig. 11.28, se observă traiectoriile sub forma unor curbe închise. Fiecare elipsă este determinată de o valoare constantă a energiei. Acest lucru este verificat și prin faptul că, oscilatorul liniar armonic este un sistem conservativ cu un singur grad de libertate: $n = 1$. Atunci, regiunea în care se situează traiectoriile trebuie să aibă dimensiunea $2 \cdot 1 - 1 = 1$, ceea ce corespunde unei curbe. Curbele sunt închise deoarece mișcarea este periodică, iar suprafața închisă de ele crește odată cu creșterea energiei ($E_1 > E_2 > E_3$). În general, periodicitatea mișcării este caracterizată de configurarea traiectoriilor din spațiul fazelor. Se pot întâlni următoarele situații:

1. orbite închise, definite de variații periodice cu aceeași frecvență unghiulară ale lui p și q ; mișcarea este numită de *vibrație* sau *rotație*²⁵;
2. orbite definite de relații de periodicitate între p și q ; mișcarea este numită de *revoluție*.

²⁵ astronomii o numesc *mișcare de librație*

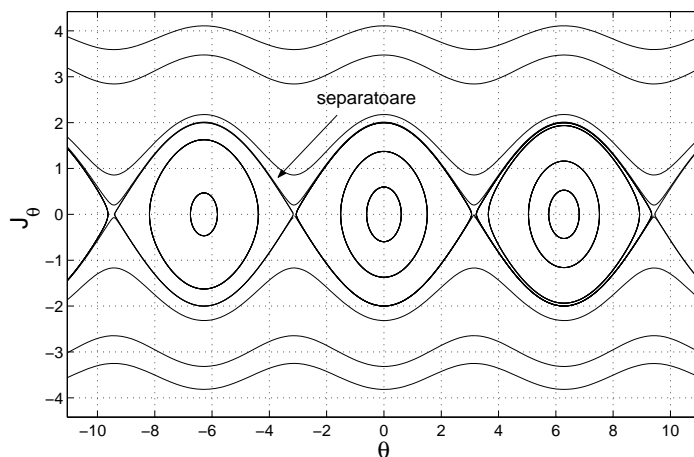


Figura 11.29

Unele sisteme prezintă ambele tipuri de mișcări. Să considerăm, spre exemplu, un pendul matematic de masă m suspendat de un punct fix prin intermediul unei bare rigide subțiri și foarte ușoare, de lungime l . În variabile, J_θ —moment unghiular, θ —unghi, energia totală se scrie ca:

$$H = E = E_{c,rot} + E_p \quad (11.107)$$

$$= \frac{J_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta) = const. \quad (11.108)$$

De aici rezultă valoarea lui J_θ ca funcție de valoarea energiei totale E :

$$J_\theta = \pm \sqrt{2ml^2 [E - mgl(1 - \cos \theta)]} = J_\theta(E, \theta). \quad (11.109)$$

Se observă că $J_\theta = 0 \Leftrightarrow E = mgl(1 - \cos \theta)$, iar valoarea maximă a momentului unghiular se obține pentru $\theta = \pi$, adică $J_\theta = \pm \sqrt{2ml^2 (E - 2mgl)}$. În reprezentarea (J_θ, θ) traiectoria este determinată de ecuațiile Hamilton:

$$\dot{J}_\theta = -mgl \sin \theta \quad (11.110)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{ml^2} J_\theta, \quad (11.111)$$

pentru diferite valori ale condițiilor inițiale (energiei totale). Avem următoarele situații:

- Pentru $J_\theta = 0$ și $\theta = 0$, $E = 0$, caz în care pendulul se află în punctul vertical cel mai de jos, sub punctul de suspensie, unde este într-o stare de echilibru stabil. Orice mică deviere față de această poziție conduce la revenirea spre poziția de echilibru prin mici oscilații. Traietoriile în vecinătatea acestor puncte sunt curbe închise de formă eliptică care descriu mișcarea periodică a sistemului.

- Pentru $J_\theta = 0$ și $\theta = \pm\pi$, $E = 2mgl$; pendulul se află în punctul vertical cel mai de sus, deasupra punctului de suspensie, ajungând aici după o rotație în sens trigonometric sau anti-trigonometric. Aceste puncte sunt instabile deoarece orice mică deviere a traiectoriei conduce la o îndepărtare rapidă de acestea. Deoarece traiectoriile din vecinătate sunt hiperbolice, aceste puncte se numesc de tip *șa*. Comportarea poate fi extinsă și pentru punctele $\theta = \pm n\pi$, $n - \text{impar}$.
- Trecerea de la un tip de mișcare periodică, limitată de valorile lui $\pm\theta$ (unde $\cos\theta = 1 - \frac{E}{mgl}$) la cea pentru care nu mai există nici o restricție a valorilor lui θ , se face de curbele separatoare, definite pentru valorile energiei $E = 2mgl$.

Sistemele hamiltoniene integrabile sunt caracterizate de traiectorii în spațiul fazelor cu formă similară celei discutate. Putem extinde analiza pentru sisteme integrabile cu n - grade de libertate, pe care le putem echivala cu un număr de n oscilatori armonici de tipul prezentat. Traiectoria în spațiul fazelor se va așeza, la orice moment de timp, pe suprafața n dimensională a unui tor, numit *tor invariant*. Dacă $n = 2$, sistemul este caracterizat de două frecvențe:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} = \omega_1; \quad (11.112)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial J_2} = \omega_2, \quad (11.113)$$

iar traiectoriile sunt *confinat*e pe suprafața unui tor.

- Dacă frecvențele sunt în raport rațional $\omega_1/\omega_2 = n_1/n_2$, mișcarea este caracterizată de o dublă periodicitate (ex. rotație și revoluție). Conceptul este ușor de înțeles dacă ne gândim că, după n_2 rotații cu ω_1 pe un cerc și după alte n_1 rotații cu ω_2 pe alt cerc (evident de de rază diferită), traiectoriile vor ajunge în același punct de unde au plecat ($n_2\omega_1 = n_1\omega_2$).
- Dacă frecvențele sunt în raport incommensurabil, traiectoriile vor umple toată suprafața din spațiul fazelor deoarece pot ajunge în mod arbitrar în vecinătatea oricărui punct de pe tor. Astfel de sisteme se numesc *ergodice*, deoarece se poate calcula media în timp a oricărei mărimi ca medie asupra ansamblului de traiectorii.

În concluzie, sistemele hamiltoniene integrabile pot avea comportări periodice sau cvasiperiodice, dar niciodată haotice.

11.10.2 Sisteme nonintegrabile

Pentru sistemele nonintegrabile nu există constrângeri (adică constante de mișcare), astfel că traiectoriile se împrăștie în spațiul fazelor. Se pune întrebarea, care sunt portretele în spațiul fazelor corespunzător unor astfel de sisteme? Teorema Kolmogorov-Arnold-Moser (cunoscută ca teorema KAM) afirmă că unii tori invariante ai sistemelor integrabile se păstrează, deși deformați, și în cazul sistemelor nonintegrabile atunci când *abaterea* de la integrabilitate nu este prea mare. Abaterea de la integrabilitate se exprimă ca o perturbare (ϵH_1) a hamiltonianului sistemului (H) față de valoarea sa integrabilă, H_0 :

$$H = H_0 + \epsilon H_1. \quad (11.114)$$

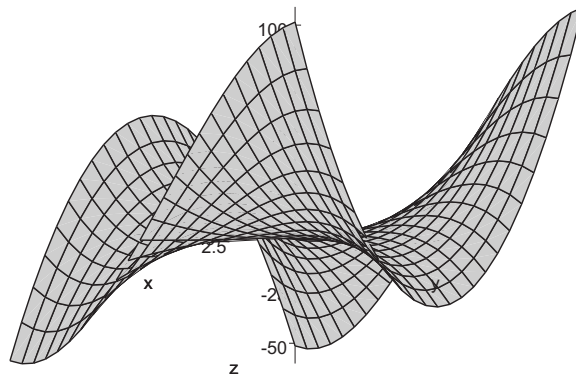


Figura 11.30: Reprezentarea suprafeței energiei potențiale $E_p(x, y)$

Astfel, dacă:

- $\epsilon < 1$ sistemul aproape integrabil păstrează torul mișcării cvasiperiodice (numit tor KAM);
- $\epsilon > 1$, torii se distrug.

În viziunea echivalenței unui sistem integrabil cu un lanț de oscilatori armonici, prezența unei părți nonintegrabile a hamiltonianului determină un cuplaj al oscilațiilor independente. Atunci când raportul acestor frecvențe este irațional, pot apărea o serie de rezonanțe ce produc creșteri rapide ale amplitudinilor de oscilație și o îndepărtare a traiectoriilor de pe suprafața torilor caracteristici. Spre deosebire de sistemele disipative, pentru care comportarea pe termen lung face ca sistemul să "uite" condițiile inițiale și să convergă spre un atractor (sau grupuri de atractori), sistemele hamiltoniene depind în mod esențial de condițiile inițiale.

11.10.3 Exemplu: Hamiltonianul Henon-Heiles

Acest tip de hamiltonian a fost introdus pentru prima dată de Henon și Heiles [] în analiza mișcării unei stele în galaxie. În coordonate generalizate, el are forma:

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + \left(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3 \right), \quad (11.115)$$

ce corespunde unui cuplaj de doi oscilatori armonici cuplați prin intermediul unui termen cubic, care constituie de fapt partea nonintegrabilă a hamiltonianului. Dacă notăm $q_1 = x, q_2 = y, p_1 = p_x, p_2 = p_y$, atunci funcția Hamilton poate fi găsită cu ajutorul energiei potențiale corespunzătoare mișcării bi-dimensionale a unei singure particule:

$$E_p(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (11.116)$$

Această funcție este reprezentată în Fig.11.30.

În reprezentarea prezentată în Fig.11.31 se observă cum, odată cu creșterea valorii energiei totale, se produce o deformare a conturului energiei potențiale și, pentru o valoare critică a

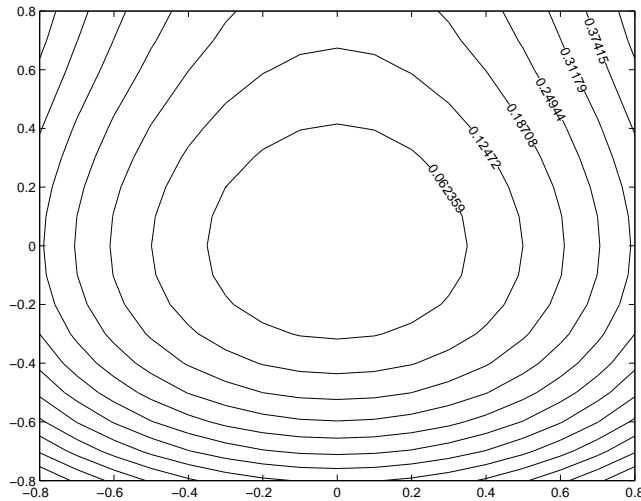


Figura 11.31: Reprezentarea conturului suprafeței energiei potențiale $E_p(x, y)$ pentru diferite valori ale energiei.

energiei, traiectoria închisă (corespunzătoare gropii din vecinătatea originii) se deschide. În această situație, caracterul mărginit (periodic) al mișcării, determinate de captarea particulei în această groapă, devine nemărginit, particula cu energie mare reușind să scape din această "capcană". Ecuațiile Hamilton asociate sunt:

$$\dot{q}_1 = p_1 \quad (11.117)$$

$$\dot{q}_2 = p_2 \quad (11.118)$$

$$\dot{p}_1 = -q_1 - 2q_1q_2 \quad (11.119)$$

$$\dot{p}_2 = -q_2 - q_1^2 + q_2^2. \quad (11.120)$$

Dacă sistemul este conservativ, traiectoriile sunt reduse pe suprafața de dimensiune $2 \times 2 - 1 = 3$. Vom folosi metoda secțiunilor Poincare și vom mai reduce o dimensiune astfel că, prin această secționare se ilustrează împrăștierea punctelor pe suprafața unui plan ($n=2$). În Figurile 11.32, 11.33, 11.34, 11.35 este ilustrat modul în care torul invariant se dezintegrează, în funcție de valoarea energiei totale, în formațiuni de tip insule și arhipelaguri. Distrugerea torilor invariante urmează reguli matematice stricte; ele nu fac însă obiectul acestui manual. Ceea ce este important de reținut este că sistemul prezintă în mod simultan caracteristici de comportare integrabilă și de haos.

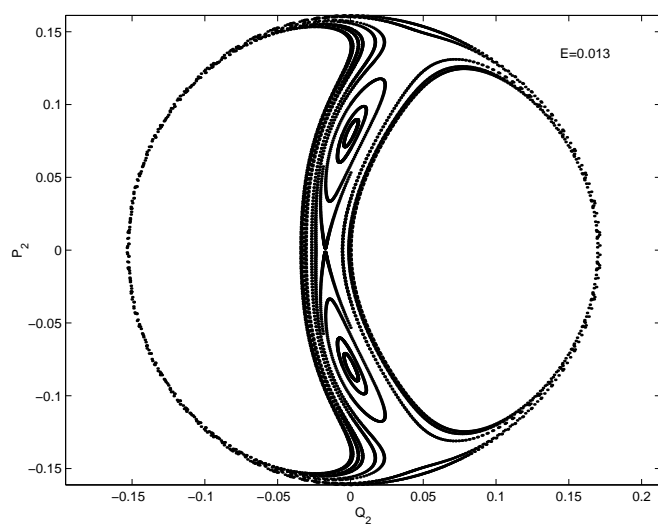


Figura 11.32:

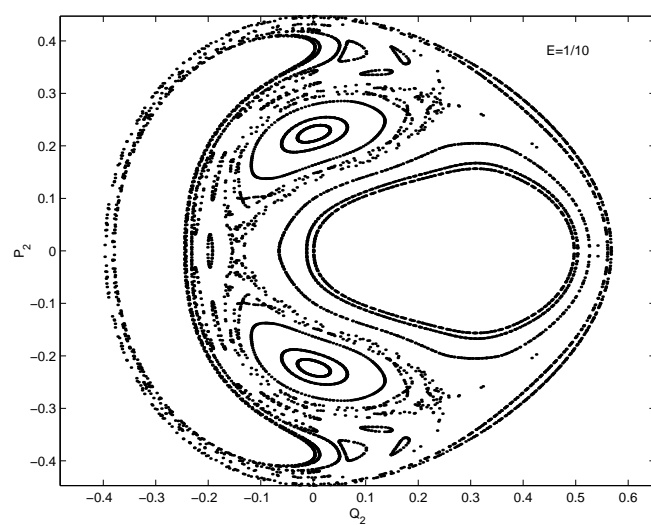


Figura 11.33:

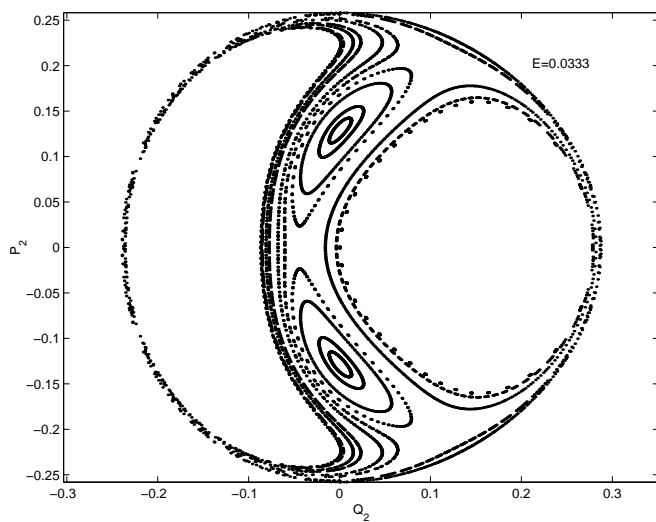


Figura 11.34:

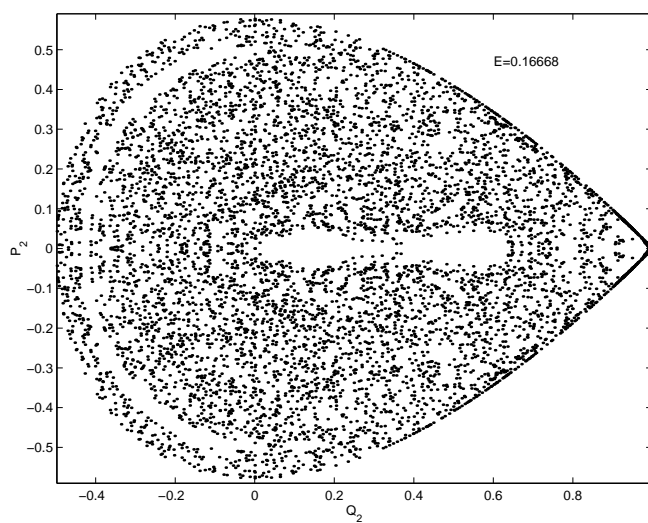


Figura 11.35:

11.11 Probleme

1. Care dintre următoarele ecuații sunt liniare și care sunt neliniare?

$$\begin{aligned}x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= y^2 + x \\ \frac{dx}{dt} &= a(x - xy) \\ \frac{dy}{dt} &= -c(y - x)\end{aligned}$$

2. Transformați următoarele ecuații în forma standard a unui sistem de ecuații ordinare cuplate:

$$\begin{aligned}x'' + ax' + b \sin x &= c \cos \omega t \\ x''' &= +bx^2, b = \text{const.}\end{aligned}$$

3. Reprezentați grafic funcția $x' = x - x^3$ și identificați punctele de echilibru.
4. Folosind analiza liniară de stabilitate, studiați sistemul dinamic descris de ecuația $x' = ax - bx^3$ (a, b - constante) pentru ambele semne ale parametrului a .
5. Găsiți punctele de echilibru, tipul acestuia și ilustrați spațiul fazelor pentru următorul sistem de ecuații neliniare cuplate:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= xy - y\omega t \\ \frac{dy}{dt} &= xy - x, b = \text{const.}\end{aligned}$$

Vectori

Descrierea cantitativă a unor fenomene din natură presupune exprimarea legăturilor dintre diverse mărimi prin relații matematice adecvate. Fizica, prima dintre științele naturii, operează cu o serie de noțiuni, exprimate cantitativ prin mărimi fizice *scalare*, *vectoriale* sau *tensoriale*.

Mărimile fizice *scalare* sunt complet determinate *doar prin valoarea lor numerică*. În această categorie intră timpul, temperatura, energia, lucrul mecanic, potențialul electric sau gravitațional, etc. Operațiile matematice cu scalari sunt operații aritmetice obișnuite.

Există mărimi fizice a căror descriere completă necesită specificarea suplimentară a *direcției* și a *sensului* acestora. În acest caz, avem de a face cu așa-numitele *mărimi vectoriale*, sau, pe scurt, *vectori*. Într-un spațiu tridimensional, un vector este determinat în mod univoc prin *proiecțiile* sale pe cele trei axe ale sistemului de coordonate. Așa cum vom vedea mai târziu, într-un spațiu N - dimensional, un vector se poate reprezenta sub forma unei matrice linie, sau a unei matrice coloană cu N elemente. În fizică, un număr considerabil de mărimi sunt vectoriale. În mecanică, dintre exemplele cel mai frecvent întâlnite de mărimi vectoriale, putem aminti viteza, accelerația, forța, impulsul, viteza unghiulară, momentul cinetic, momentul forței etc¹.

Pe lângă scalari și vectori, există și o a treia categorie - mai puțin numeroasă - de mărimi fizice, care constituie o *generalizare a vectorilor*. Acestea se numesc *mărimi tensoriale*, sau *tensori*. Ele se reprezintă prin matrici cu mai multe linii și coloane². Amintim aici, ca exemple de mărimi tensoriale întâlnite în mecanică, viteza unghiulară și momentul de inerție.

A.1 Reprezentarea unui vector

Există trei modalități de reprezentare a unui vector:

1. printr-un segment orientat (așa-numita *reprezentare geometrică*),
2. prin proiecțiile sale pe axele unui sistem de coordonate (așa-numita *reprezentare analitică*), sau

¹Așa cum vom vedea în continuare, viteza, accelerația, forța și impulsul sunt *vectori polari*; viteza unghiulară, momentul cinetic și momentul forței sunt *vectori axiali*, sau pseudovectori.

²Cu unele dintre ele am făcut cunoștință în cuprinsul acestei cărți.

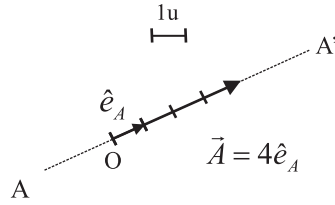


Figura A.1: Elementele specifice ale unui vector: O - originea; AA' - dreapta suport orientată; ea determină direcția și sensul vectorului.

3. printr-o *matrice*.

Fiecare din acestea prezintă avantaje și dezavantaje, de aceea modul de reprezentare a unui vector se alege în funcție de contextul problemei de rezolvat.

A.1.1 Reprezentarea geometrică

În acest caz, un vector este reprezentat ca un segment orientat, care pornește dintr-un punct numit origine sau *punct de aplicație* sau *pol* (notat cu O în Fig.A.1). Segmentul este așezat pe *dreapta suport* AA' și are sensul indicat de vârful săgeții. Un vector definit în acest mod se numește *vector polar*. El este precizat prin:

1. *modul* (mărime);
2. *origine* (punct de aplicație);
3. *orientare* (direcție și sens).

Lungimea segmentului orientat este proporțională cu *mărimea* vectorului. Modulul unui vector, \vec{A} , se notează $|\vec{A}|$ sau A .

Să considerăm un vector de mărime egală cu unitatea, notat \hat{e}_A , orientat pe direcția și în sensul vectorului \vec{A} . Acesta se numește *versor*³. Putem, prin urmare, scrie că:

$$\vec{A} = A\hat{e}_A. \quad (\text{A.1})$$

A.1.2 Reprezentarea analitică

Într-o reprezentare analitică, un versor este determinat prin proiecțiile sale pe axele unui sistem de referință. Un exemplu în acest sens este prezentat în Fig.A.2, în care s-au folosit coordonatele carteziane.

Să notăm cu A_x, A_y și A_z - proiecțiile lui \vec{A} de-a lungul axelor Ox, Oy și Oz . Atunci:

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}, \quad (\text{A.2})$$

unde $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ sunt versorii direcțiilor x, y, z .

³În literatura de specialitate se folosesc și alte notații pentru versori.

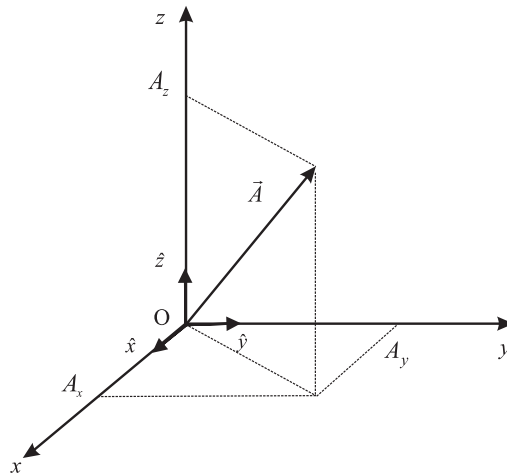


Figura A.2: Proiecțiile unui vector, \vec{A} , pe axele unui reper cartezian

Mărimea vectorului se află folosind teorema lui Pitagora:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (\text{A.3})$$

De exemplu, dacă: $\vec{v} = 5\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}$ (m/s), atunci $v_x = 5$ m/s, $v_y = -3$ m/s, și $v_z = 1$ m/s. Mărimea vitezei va fi $v = \sqrt{25 + 9 + 1}$ m/s = $\sqrt{35}$ m/s = 5.92 m/s.

A.1.3 Reprezentarea matriceală

Orice vector poate fi exprimat ca o matrice cu o singură linie sau cu o singură coloană, fiecare element al acesteia reprezentând componenta (proiecția vectorului) pe o anumită direcție. De exemplu, vectorul reprezentat analitic prin relația (A.2) se va reprezenta matriceal, fie sub forma:

$$\vec{A} = (A_x \quad A_y \quad A_z), \quad (\text{A.4})$$

sau:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

A.2 Operații algebrice cu vectori

A.2.1 Adunarea și scăderea vectorilor

Fie \vec{A} și \vec{B} doi vectori oarecare. Suma $\vec{A} + \vec{B}$ este, de asemenea, un vector:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}. \quad (\text{A.6})$$

Vectorul rezultat se poate reprezenta prin oricare din modalitățile menționate anterior. În Fig.A.3 sunt prezentate două metode geometrice de aflare a vectorului rezultat. Prin *regula*

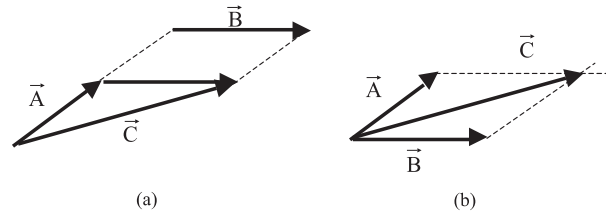


Figura A.3: Determinarea pe cale geometrică a rezultantei a doi vectori: (a) prin metoda poligonului; (b) prin metoda paralelogramului

poligonului (Fig.A.3 (a)) vectorul rezultat a doi (sau mai mulți) vectori se află construind vectorul care închide conturul poligonal format din vectorii așezați în succesiunea vârf-originea. Originea vectorului rezultat se află în originea primului vector, iar vârful - în vârful ultimului vector al sumei.

În Fig.A.3 (b) este ilustrată adunarea a doi vectori prin regula paralelogramului. Conform *regulei paralelogramului*, vectorul rezultat este diagonala mare a paralelogramului construit de cei doi vectori concurenți \vec{A} și \vec{B} . Din figură se observă că adunarea este comutativă. Această construcție geometrică permite calculul mărimii vectorului sumă cu ajutorul teoremei lui Pitagora generalizate:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \alpha}, \quad (\text{A.7})$$

unde α este unghiul dintre vectorii \vec{A} și \vec{B} .

Dacă suma a doi vectori este egală cu zero, atunci vectorii sunt egali ca mărime și au sensuri opuse.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = -\vec{A}. \quad (\text{A.8})$$

Această relație definește vectorul opus și ea permite definirea operației de scădere a doi vectori ca fiind adunarea unui vector, \vec{A} , cu vectorul opus, $-\vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}). \quad (\text{A.9})$$

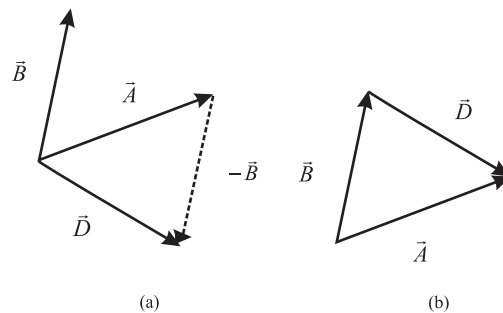


Figura A.4: Determinarea vectorului diferență, $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$: (a) folosind adunarea lui \vec{A} cu vectorul opus, $-\vec{B}$; (b) unind vârful vectorului descăzut și scăzător. Vectorul diferență are vârful în vectorul-descăzut și originea în vectorul-scăzător.

Să exemplificăm, în continuare, adunarea vectorilor, plecând de la reprezentarea lor analitică. În coordonate carteziene:

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}; \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}. \quad (\text{A.11})$$

Componentele vectorului sumă se află prin adunarea algebrică a componentelor (proiecțiilor) corespunzătoare, pe direcțiile Ox , Oy și Oz .

$$\vec{C} = (A_x + B_x) \hat{x} + (A_y + B_y) \hat{y} + (A_z + B_z) \hat{z}; \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{D} = (A_x - B_x) \hat{x} + (A_y - B_y) \hat{y} + (A_z - B_z) \hat{z}. \quad (\text{A.13})$$

Evident, procedura analitică poate fi utilizată pentru adunarea a n vectori \vec{A}_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Dacă se cunosc proiecțiile acestor vectori pe axele sistemului de coordonate carteziene, A_{ix}, A_{iy}, A_{iz} , atunci, vectorul sumă este:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i, \quad (\text{A.14})$$

de modul:

$$R = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad (\text{A.15})$$

unde:

$$A_x = \sum_{i=1}^n A_{ix}, \quad A_y = \sum_{i=1}^n A_{iy}, \quad A_z = \sum_{i=1}^n A_{iz}. \quad (\text{A.16})$$

A.2.2 Înmulțirea vectorilor

Se pot defini mai multe moduri de înmulțire a vectorilor, în funcție de contextul problemei. Rezultatul înmulțirii poate fi o mărime vectorială sau una scalară.

Înmulțirea unui vector cu un scalar

Din înmulțirea unui vector, \vec{A} , cu un scalar, μ , rezultă un alt vector, \vec{A}' , de mărime μA .

$$\vec{A}' = \mu \vec{A} = \overrightarrow{\mu A}. \quad (\text{A.17})$$

Direcția vectorului \vec{A}' este aceeași cu a vectorului \vec{A} , iar mărimea și sensul său depind de valoarea scalarului μ :

- dacă $\mu > 0$ sensul lui \vec{A}' este sensul lui \vec{A} ;
- dacă $\mu < 0$ sensul lui \vec{A}' este contrar sensului lui \vec{A} .

Un exemplu de înmulțire a unui vector cu un scalar a fost deja prezentat în relația (A.1) și ilustrat în Fig.A.1.

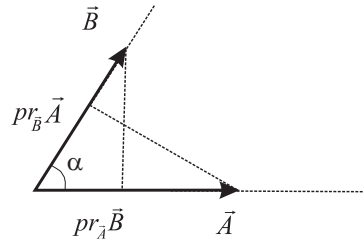


Figura A.5: Interpretarea geometrică a produsului scalar cu ajutorul proiecției unui vector pe dreapta suport a celuiilalt.

Produsul scalar

Produsul scalar a doi vectori se notează cu "·". Rezultatul operației de înmulțire scalară a doi vectori este un scalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha, \quad (\text{A.18})$$

unde α reprezintă unghiul dintre vectorii \vec{A} și \vec{B} (Fig.A.5). Dacă vectorii \vec{A} și \vec{B} sunt perpendiculari, produsul lor scalar este nul, deoarece $\cos 90^\circ = 0$.

Din definiția dată de relația (A.18) se observă că produsului scalar este *comutativ*:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (\text{A.19})$$

Cu ajutorul Fig.A.5 se poate da o interpretare geometrică a produsului scalar a doi vectori. Așa cum rezultă din figură, proiecția vectorului \vec{A} pe dreapta suport a lui \vec{B} este:

$$Pr_{\vec{B}} \vec{A} = A \cos \alpha, \quad (\text{A.20})$$

astfel încât:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = B \cdot Pr_{\vec{B}} \vec{A}. \quad (\text{A.21})$$

La fel:

$$Pr_{\vec{A}} \vec{B} = B \cos \alpha, \quad (\text{A.22})$$

astfel încât:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot Pr_{\vec{A}} \vec{B}. \quad (\text{A.23})$$

Componenta unui vector pe o axă este proiecția acestuia pe direcția acelei axe. În funcție de versorii fiecărei axe, se poate scrie:

$$A_x = A \cos(\vec{A}, \hat{x}) = \vec{A} \cdot \hat{x}; \quad (\text{A.24})$$

$$A_y = A \cos(\vec{A}, \hat{y}) = \vec{A} \cdot \hat{y}; \quad (\text{A.25})$$

$$A_z = A \cos(\vec{A}, \hat{z}) = \vec{A} \cdot \hat{z}. \quad (\text{A.26})$$

Cosinusurile unghiurilor dintre vectorul \vec{A} și axele Ox, Oy, Oz se numesc *cosinusurile directoare* ale vectorului \vec{A} .

$$\cos(\vec{A}, \hat{x}) = \frac{A_x}{A} = \alpha_1; \quad (\text{A.27})$$

$$\cos(\vec{A}, \hat{y}) = \frac{A_y}{A} = \beta_1; \quad (\text{A.28})$$

$$\cos(\vec{A}, \hat{z}) = \frac{A_z}{A} = \gamma_1. \quad (\text{A.29})$$

Ca urmare:

$$\vec{A} = A \cdot (\alpha_1 \hat{x} + \beta_1 \hat{y} + \gamma_1 \hat{z}) = A \hat{e}_A, \quad (\text{A.30})$$

unde:

$$\hat{e}_A = \alpha_1 \hat{x} + \beta_1 \hat{y} + \gamma_1 \hat{z} \quad (\text{A.31})$$

este versorul direcției lui \vec{A} . Într-adevăr:

$$\hat{e}_A \cdot \hat{e}_A = 1, \quad (\text{A.32})$$

deoarece:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1. \quad (\text{A.33})$$

La un rezultat identic se ajunge folosind reprezentarea analitică. Deoarece versorii $\hat{x}(1, 0, 0)$, $\hat{y}(0, 1, 0)$ și $\hat{z}(0, 0, 1)$ sunt reciproc perpendiculari, adică:

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0; \quad (\text{A.34})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1, \quad (\text{A.35})$$

produsul scalar al vectorilor $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ și $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ se exprimă ca:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (\text{A.36})$$

Exemple de mărimi definite printr-un produs scalar sunt: lucrul mecanic, fluxul câmpului (gravitațional, electric, magnetic) printr-o suprafață etc.

Produsul vectorial

Produsul vectorial a doi vectori \vec{A} și \vec{B} , notat cu " \times " are ca rezultat un vector axial, \vec{C} :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}. \quad (\text{A.37})$$

Prin convenție, produsul vectorial este un vector perpendicular pe planul format de \vec{A} și \vec{B} (Fig.A.6). Sensul lui \vec{C} este stabilit de *regula burghiului drept*:

Se așează burghiul perpendicular pe planul format de vectorii - produs și se rotește în sensul suprapunerii primului vector peste cel de-al doilea, pe drumul cel mai scurt. Sensul de înaintare al burghiului este sensul vectorului rezultat.

Această regulă de înmulțire ne "atenționează" că produsul vectorial este anticomutativ:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \quad (\text{A.38})$$

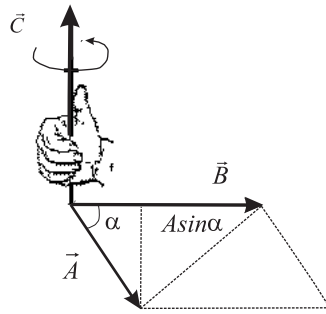


Figura A.6: Ilustrarea modului de determinare a direcției și sensul produsului vectorial.

Mărimea vectorului rezultat este dată de relația:

$$C = AB \sin \alpha. \quad (\text{A.39})$$

Cu ajutorul Fig.A.6 se poate da o interpretare geometrică produsului vectorial. Se constată că modulul lui \vec{C} reprezintă aria paralelogramului construit de cei doi vectori.

Să calculăm produsul vectorial, folosind de data aceasta reprezentarea analitică:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} &= A_x B_x (\hat{x} \times \hat{x}) + A_x B_y (\hat{x} \times \hat{y}) + A_x B_z (\hat{x} \times \hat{z}) \\ &\quad + A_y B_x (\hat{y} \times \hat{x}) + A_y B_y (\hat{y} \times \hat{y}) + A_y B_z (\hat{y} \times \hat{z}) \\ &\quad + A_z B_x (\hat{z} \times \hat{x}) + A_z B_y (\hat{z} \times \hat{y}) + A_z B_z (\hat{z} \times \hat{z}). \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Deoarece produsul vectorial a doi vectori coliniari este zero, iar:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}; \quad (\text{A.42})$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}; \quad (\text{A.43})$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}; \quad (\text{A.44})$$

se obține:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \hat{x}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{y}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{z}(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \hat{x} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{y} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

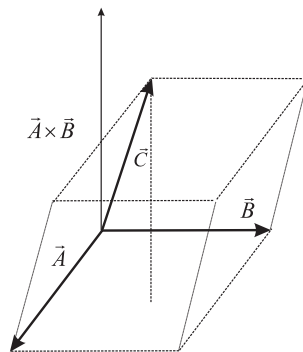


Figura A.7: Interpretarea geometrică a produsului mixt ca volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori.

Produsul mixt

Produsul mixt include ambele tipuri de înmulțiri dintre vectori. Rezultatul produsului scalar dintre vectorul \vec{C} și produsul vectorial al altor doi vectori, \vec{A} și \vec{B} , este un pseudoscalar, D^4 :

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = D \quad (\text{A.46})$$

Dacă vectorii sunt cunoscuți pe componente, atunci produsul mixt se poate calcula sub forma unui determinant:

$$D = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.47})$$

Ținând cont de semnificația geometrică a produsului vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, precum și a produsului scalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$, din Fig.A.7 rezultă că mărimea lui D este egală cu volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori (necoplanari):

$$V = \text{aria bazei} \times \text{înălțimea} \quad (\text{A.48})$$

$$= |\vec{A} \times \vec{B}| C \cos(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{C}) \quad (\text{A.49})$$

$$= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}. \quad (\text{A.50})$$

Din relația (A.47) se observă că produsul mixt nu-și schimbă valoarea dacă cei trei vectori sunt comutați ciclic:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (\text{A.51})$$

⁴Produsul vectorial dintre doi vectori (în cazul nostru, $\vec{A} \times \vec{B}$) este un pseudo-vector. Deoarece un pseudo-vector își schimbă sensul la inversarea sensului *uneia* din axele sistemului de coordonate, mărimea D își va schimba, la rândul ei, semnul după o astfel de inversare. De aceea, se spune că D , exprimat printr-un produs de tipul celui din relația (A.46) este un *pseudoscalar*.

Triplul produs vectorial

Rezultatul înmulțirii vectoriale a trei vectori este, de asemenea, un vector. Deoarece efectuarea repetată a produsului vectorial între vectori este un lucru mai dificil, se preferă exprimarea rezultatului cu ajutorul unor produse scalare și anume⁵:

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (\text{A.52})$$

A.3 Elemente de analiză vectorială

A.3.1 Derivarea vectorilor

Să considerăm un vector, $\vec{A}(s)$, exprimat ca o funcție de o mărime scalară, s . În coordonate carteziene, $\vec{A}(s)$ se va scrie sub forma:

$$\vec{A} = A_x(s)\hat{x} + A_y(s)\hat{y} + A_z(s)\hat{z}. \quad (\text{A.53})$$

Derivata vectorului \vec{A} în raport cu scalarul s poate fi scrisă în același mod ca și derivata unei funcții scalare, adică:

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(s + \Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s}. \quad (\text{A.54})$$

În cazul în care funcția scalară s este timpul, derivata vectorului \vec{A} va fi:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\hat{x} + \frac{dA_y}{dt}\hat{y} + \frac{dA_z}{dt}\hat{z}. \quad (\text{A.55})$$

Dacă mărimea \vec{A} reprezintă vectorul de poziție a unui mobil, derivata lui \vec{A} în raport cu timpul reprezintă, așa cum s-a discutat în Capitolul întâi, viteza instantanee a mobilului.

Regulile de calcul a derivatei unei mărimi vectoriale, \vec{A} , în raport cu o mărime scalară generică, s , vor fi:

$$\frac{d}{ds}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \pm \frac{d\vec{B}}{ds}; \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{d}{ds}[f(s)\vec{A}(s)] = \frac{df}{ds}\vec{A} + f\frac{d\vec{A}}{ds}; \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds}; \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{ds}. \quad (\text{A.59})$$

Toate aceste reguli vor fi folosite în cadrul cinematicii și dinamicii punctului material și ale sistemelor de puncte materiale.

⁵Această regulă este ușor de reținut sub numele "bac minus cab".

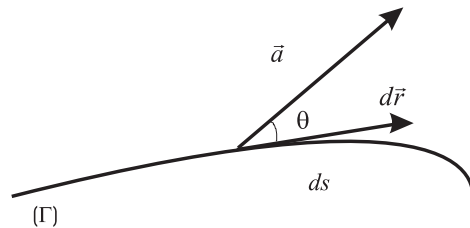


Figura A.8: Calculul integralei vectorului \vec{a} de-a lungul conturului Γ

A.3.2 Integrarea vectorilor

Să menționăm, pentru început, că în matematică se definește o *funcție scalară*⁶ de *variabilă vectorială*, de forma:

$$u(\vec{r}) = u(x, y, z) \quad (\text{A.60})$$

și o *funcție vectorială*⁷ de *variabilă vectorială*, de forma:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\hat{x} + a_y(x, y, z)\hat{y} + a_z(x, y, z)\hat{z}. \quad (\text{A.61})$$

Ambele funcții sunt definite în orice punct descris de vectorul de poziție \vec{r} și, în cele două relații scrise anterior, sunt exprimate în sistemul de referință cartezian (x, y, z) .

Să considerăm o curbă, Γ , în spațiul în care este definită în orice punct funcția vectorială \vec{a} . Integrala funcției vectoriale \vec{a} de-a lungul curbei Γ se numește *circulația* vectorului \vec{a} de-a lungul curbei Γ și se definește ca:

$$\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz), \quad (\text{A.62})$$

unde $d\vec{r}$ reprezintă o variație infinitezimală a vectorului de poziție. În coordonate carteziene:

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}. \quad (\text{A.63})$$

Putem exprima, de asemenea, relația (A.62) în funcție de distanța curbilinie ds , măsurată de-a lungul curbei Γ (Fig.A.8). Dacă notăm cu θ unghiul dintre direcția lui \vec{a} și tangenta la curba Γ în orice punct, atunci:

$$\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} a \cos \theta ds. \quad (\text{A.64})$$

A.3.3 Operatori vectoriali diferențiali

Operatorii vectoriali diferențiali permit exprimarea locală (punctuală) a legilor fizicii. Ei pot fi exprimați cu ajutorul operatorului diferențial notat " $\vec{\nabla}$ " și numit *nabla*⁸. Expresia

⁶Exemple de funcții scalare: densitatea, temperatura, energia potențială, etc.

⁷Exemple de funcții vectoriale: viteza, intensitatea câmpului gravitațional, electric, etc.

⁸De cele mai multe ori se omite scrierea lui ∇ cu vector deasupra.

concretă a lui ∇ este funcție de sistemul de coordonate utilizat. În coordonate carteziene, operatorul ∇ are expresia⁹:

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.65})$$

Operatorul

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.66})$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.67})$$

se numește *operatorul Laplace* sau *laplaceian*.

În funcție de modul în care ∇ se aplică unei mărimi fizice, scalare sau vectoriale, se definesc trei operatori vectoriali distincți:

1. *operatorul gradient* - dacă ∇ se aplică unei funcții scalare;
2. *operatorul divergență* - dacă ∇ se înmulțește scalar cu o funcție vectorială;
3. *operatorul rotor* - dacă ∇ se înmulțește vectorial cu o funcție vectorială.

Expresiile operatorilor vectoriali depind de sistemul de coordonate în care se definesc. Pentru simplitate, vom considera în cele ce urmează doar sistemul cartezian, urmând ca expresiile operatorilor diferențiali în alte sisteme de coordonate să fie deduse și utilizate mai târziu.

Operatorul gradient

Operatorul gradient se obține prin aplicarea lui ∇ unei funcții scalare. Ca rezultat, se obține o mărime vectorială.

Să considerăm o funcție scalară generică, $\varphi = \varphi(x, y, z)$. În coordonate carteziene, expresia *gradientului*¹⁰ mărimii scalare φ este:

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z}. \quad (\text{A.68})$$

Interpretarea fizică

Să considerăm că valorile funcției scalare φ nu depind decât de coordonatele punctului în care aceasta se evaluează.

Se definește noțiunea de *suprafață de nivel constant* (sau *suprafață echi-potențială* (dacă funcția φ reprezintă un potențial), locul geometric al punctelor pentru care funcția φ are aceeași valoare (Fig.A.9):

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const.} \quad (\text{A.69})$$

⁹Expresia operatorului ∇ depinde de sistemul de coordonate ales.

¹⁰Operatorul gradient este un vector, de aceea, pentru sublinierea acestui lucru, am reprezentat săgeata de vector deasupra sa. În mod curent, pentru simplificarea scrierii se omite acest semn, fără a uita însă că mărimea fizică exprimată în funcție de un gradient este o mărime vectorială.

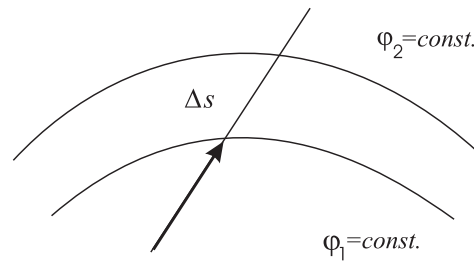


Figura A.9: Suprafețe echipotențiale

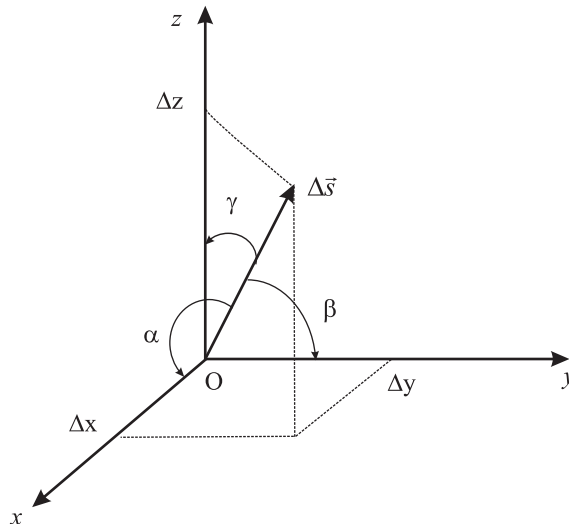


Figura A.10: Orientarea segmentului Δs în raport cu un sistem de coordonate carteziene.

Variația funcției φ între două suprafețe de nivel constant este:

$$\Delta\varphi = \varphi_2(x, y, z) - \varphi_1(x, y, z). \tag{A.70}$$

Având în vedere că $\Delta\varphi$ este o mărime dată, din Fig.A.9 se constată că raportul $\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)$ depinde doar de orientarea segmentului Δs .

Se definește *derivata după o direcție* a funcției scalare φ conform relației:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \tag{A.71}$$

Dacă raportăm segmentul Δs la un sistem de axe carteziene și ținem cont de faptul că funcția φ depinde de variabila s prin intermediul coordonatelor x, y, z , putem scrie:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s} \right) \tag{A.72}$$

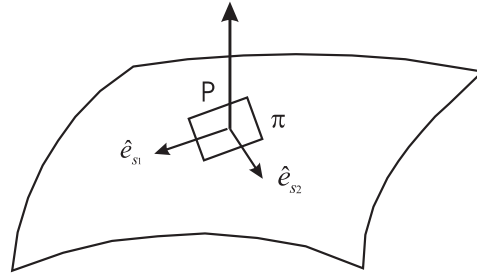


Figura A.11: Orientarea vectorului gradient

Ținând seama de relațiile cosinusurilor directoare, relația anterioară se poate scrie sub forma:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos \gamma, \quad (\text{A.73})$$

unde:

$$\cos \alpha = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta s}, \quad (\text{A.74})$$

$$\cos \beta = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta s}, \quad (\text{A.75})$$

$$\cos \gamma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta s}. \quad (\text{A.76})$$

Expresia (A.73) reprezintă rezultatul unui produs scalar:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \text{grad } \varphi \cdot \hat{e}_s, \quad (\text{A.77})$$

unde:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{z}. \quad (\text{A.78})$$

sau:

$$\text{grad } \varphi = \cos \alpha \cdot \hat{x} + \cos \beta \cdot \hat{y} + \cos \gamma \cdot \hat{z}, \quad (\text{A.79})$$

iar \hat{e}_s este versorul direcției Δs .

Mărimea vectorului gradient este:

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \quad (\text{A.80})$$

Să considerăm, în continuare, o porțiune de dimensiuni infinitezimale a unui plan (π), tangent în punctul P la suprafața de nivel constant $\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const}$ (Fig.A.11). Toate punctele din planul (π), din imediata vecinătate a lui P, se vor caracteriza prin aproximativ aceeași valoare a lui φ și, ca urmare:

$$\Delta\varphi \approx 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (\text{A.81})$$

Pentru orice direcție din acest plan, caracterizată de versorii: \hat{e}_{s_1} , \hat{e}_{s_2} , etc. vom avea:

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = \text{grad } \varphi \cdot \hat{e}_{s_1} = 0; \quad (\text{A.82})$$

$$\frac{d\varphi}{ds_2} = \text{grad } \varphi \cdot \hat{e}_{s_2} = 0. \quad (\text{A.83})$$

Relațiile anterioare sunt satisfăcute în condițiile în care $\text{grad } \varphi$ este orientat perpendicular pe oricare două direcții din planul (π). Direcția gradientului este, așadar, perpendiculară în orice punct pe suprafața $\varphi = \text{const}$, având orientarea normalei în punctul respectiv. Prin convenție, s-a ales sensul vectorului $\nabla\varphi$ ca fiind acela în care φ crește.

În concluzie, *vectorul gradient este îndreptat în direcția celei mai rapide creșteri în spațiu a lui φ* . Principalele proprietățile ale gradientului sunt:

1. este o funcție vectorială definită într-un punct (*funcție de punct*);
2. indică direcția și sensul celei mai rapide creșteri în spațiu a funcției scalare;
3. are semnificația derivatei după acea direcție pentru care funcția scalară crește cel mai rapid;
4. este orientat perpendicular pe suprafețele echipotențiale $\varphi = \text{const.}$, oricare ar fi mărimea fizică φ , căreia i se aplică.

Semnificația fizică a acestui operator a fost discutată amănunțit în legătură cu noțiunea de potențial scalar – gravitațional.

Operatorul divergență

Definiție

Operatorul *divergență* se obține prin înmulțirea scalară a operatorului ∇ cu o funcție vectorială. Să considerăm o funcție vectorială de punct, \vec{a} , care în coordonate carteziene are expresia:

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z). \quad (\text{A.84})$$

Expresia divergenței este:

$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.85})$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (\text{A.86})$$

Interpretarea fizică

Pentru a ilustra semnificația fizică a operatorului divergență ne vom folosi de un exemplu din mecanica fluidelor. Se definește *intensitatea curentului masic*, I , drept cantitatea de fluid care trece printr-o suprafață dS în unitatea de timp dt :

$$I = \frac{dm}{dt}. \quad (\text{A.87})$$

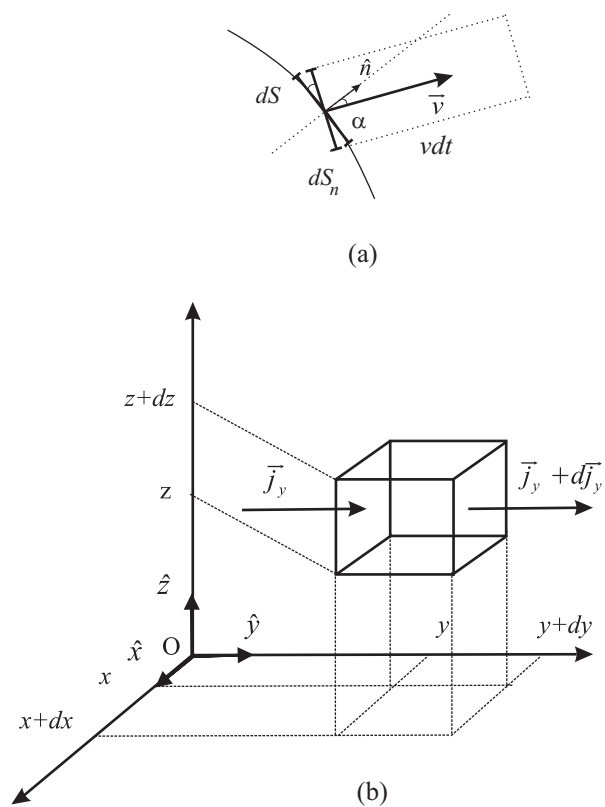


Figura A.12: Ilustrarea interpretării fizice a divergenței.

Masa dm poate fi scrisă în funcție de valoarea vitezei unei "particule" de fluid în regiunea suprafeței infinitezimale dS . Să ne folosim de Fig.A.12(a), în care s-a notat cu α unghiul dintre \vec{v} și normala la suprafață. Suprafața "văzută" efectiv de fluidul în curgere este $dS_n = dS \cos \alpha$. Cantitatea de fluid ce trece într-un timp dt prin suprafața dS (sau dS_n) este cuprinsă într-un cilindru de arie a bazei dS_n și de înălțime $v \cdot dt$. Ca urmare:

$$dm = \rho dS_n v dt = \rho dS v dt \cos \alpha \quad (\text{A.88})$$

unde ρ este densitatea volumică a fluidului. Rezultă că:

$$I = \frac{dm}{dt} = \rho dS v \cos \alpha. \quad (\text{A.89})$$

Se definește, de asemenea, densitatea curentului masic, j , prin relația:

$$j = \frac{dm}{dS_n dt} = \rho v. \quad (\text{A.90})$$

Constatăm că, întrucât viteza este o mărime vectorială, iar ρ - un scalar, j este o mărime vectorială:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (\text{A.91})$$

Având în vedere că \vec{v} se poate scrie, în coordonate carteziene, sub forma:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}, \quad (\text{A.92})$$

rezultă că:

$$\vec{j} = j_x \hat{x} + j_y \hat{y} + j_z \hat{z}, \quad (\text{A.93})$$

unde:

$$j_x = \rho v_x, j_y = \rho v_y, j_z = \rho v_z. \quad (\text{A.94})$$

Să analizăm în continuare, curgerea unui fluid în raport cu un referențial cartezian $Oxyz$. Mărimea vectorială generică \vec{a} din relația (A.85) va fi acum \vec{j} . Ne vom folosi de Fig.A.12(b) și vom începe discuția noastră cu direcția Oy din motive de vizibilitate mai bună.

Densitatea de curent pe fața de intrare în paralelipipedul de volum dV este $j_y(y)$, iar pe cea de ieșire $j_y(y + dy)$. Cantitatea de fluid ce intră, într-un timp dt în volumul elementar dV este:

$$dm(y) = \rho dx dz v_y(y) dt, \quad (\text{A.95})$$

iar cea care iese:

$$dm(y + dy) = \rho dx dz v_y(y + dy) dt. \quad (\text{A.96})$$

Dacă $dm(y)$ este diferit de $dm(y + dy)$, atunci putem vorbi de o masă *netă* de fluid care "izvorăște" sau "dispare" din volumul elementar dV , exprimată ca:

$$dm_y = dm(y + dy) - dm(y) = \rho dx dz dt [v_y(y + dy) - v_y(y)]. \quad (\text{A.97})$$

Observații: Am considerat mai sus că fluidul este incompresibil, deci $\rho(y) = \rho(y + dy) = \rho$. Dacă $dm(y + dy) > dm(y)$ se spune că dV se comportă (după direcția y) ca un *izvor*. În caz contrar, dV se comportă ca un *puț* sau *dren*.

Putem exprima pe $v_y(y + dy)$ sub forma unei dezvoltări în serie Taylor:

$$v_y(y + dy) = v_y(y) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) (dy)^2 + \dots \quad (\text{A.98})$$

Dacă viteza de variație a lui v_y cu y nu este foarte mare, atunci, într-o primă aproximație, putem considera că:

$$v_y(y + dy) = v_y(y) + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy, \quad (\text{A.99})$$

astfel încât:

$$dm_y = \rho \, dx \, dz \, dt \frac{\partial v_y}{\partial y} dy. \quad (\text{A.100})$$

Relații similare vor putea fi scrise cu ușurință și pentru direcțiile Ox și Oz , astfel încât:

$$dm = dm_x + dm_y + dm_z \quad (\text{A.101})$$

$$= \rho \, dx \, dy \, dz \, dt \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (\text{A.102})$$

$$= \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dV \, dt \quad (\text{A.103})$$

$$= \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) dV \, dt \quad (\text{A.104})$$

Așadar:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{dm}{dV \, dt}. \quad (\text{A.105})$$

Întrucât termenul I din relația (A.105) se poate scrie ca un produs scalar între operatorul $\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x}, \frac{\partial}{\partial y} \hat{y}, \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right)$ și vectorul $\vec{j}(j_x, j_y, j_z)$, rezultă că:

$$\text{div} \vec{j} = \frac{dm}{dV \, dt}. \quad (\text{A.106})$$

Cu alte cuvinte, $\text{div} \vec{j}$ reprezintă masa de fluid izvorâtă, în unitatea de timp, dintr-un volum elementar unitate, dV . Se spune că $\text{div} \vec{j}$ reprezintă *productivitatea volumică specifică* de fluid a unității de volum elementar, dV , a unui izvor de fluid. Evident, cu cât izvorul va fi mai puternic, cu atât $\text{div} \vec{j}$ care îl caracterizează va fi mai mare. De altfel, termenul de *divergență* provine de la cuvântul latin *divergere*, care înseamnă *a izvorî*. Având în vedere că $dm = \vec{j} \cdot \vec{dS}$, în care dS este suprafața care înconjoară volumul elementar dV , prin integrare pe întreg volumul unei surse macroscopice de fluid vom putea scrie:

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_V \text{div} \vec{j} \cdot dV \quad (\text{A.107})$$

care reprezintă *teorema lui Green-Gauss-Ostrogradski*. Această ultimă relație stabilește o legătură între o integrală de suprafață a lui \vec{j} și una de volum a unei funcții de \vec{j} .

Operatorul rotor

Definiție

Operatorul rotor rezultă din înmulțirea vectorială a lui ∇ cu o mărime vectorială, \vec{a} . Rezultatul este o mărime vectorială, care, în coordonate carteziene este dat de expresia:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{a} &= \text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \hat{z}.\end{aligned}\quad (\text{A.108})$$

Interpretarea fizică

Fie un vector \vec{a} , caracterizat prin componentele a_x, a_y și a_z în coordonate carteziene. Să considerăm o direcție oarecare, descrisă de versorul \hat{n} . În planul perpendicular pe versorul \hat{n} , alegem un contur infinitezimal închis de lungime Δl , care mărginește o suprafață mică ΔS . De obicei, sensul de parcurgere al conturului se stabilește astfel încât sensul pozitiv al versorului \hat{n} să coincidă cu cel determinat prin regula burghiului drept.

Operatorul diferențial rot este un vector a cărui proiecție pe direcția lui \hat{n} este definită prin relația:

$$\text{rot}_n \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}.\quad (\text{A.109})$$

Să considerăm, în cele ce urmează, că vectorul generic \vec{a} este viteza \vec{v} a unui punct (element de masă) dintr-un corp rigid care se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe de rotație coliniară cu versorul \hat{n} . Traiectoria punctului considerat este un cerc de rază r , cu centrul pe axa de rotație, iar viteza sa, $v = \omega r$ este orientată tangent la traiectorie. Lungimea conturului ce încheie elementul de suprafață $\Delta S = \pi r^2$ este $\oint dl = 2\pi r$.

Conform definiției (A.109) se obține:

$$\text{rot}_n \vec{v} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v \oint dl}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\omega 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega.\quad (\text{A.110})$$

Astfel, rotorul vitezei liniare a punctelor unui solid rigid aflat în mișcare de rotație are semnificația dublului vitezei unghiulare.

Din punct de vedere al calculului matematic este mult mai convenabilă definirea operatorului rotor în termeni de coordonate. Să găsim proiecțiile vectorului $\text{rot } \vec{a}$ într-un sistem de coordonate cartezian, de exemplu de-a lungul axei Oz .

Conturul pe care se integrează este un dreptunghi cu laturile $\Delta x, \Delta y$ indicat în Fig.A.13. Se obține:

$$\begin{aligned}\oint \vec{a} \cdot d\vec{l} &= \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} a_x(x,y,z) dx + \int_{(x+\Delta x,y,z)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)} a_y(x+\Delta x,y,z) dy \\ &+ \int_{(x+\Delta x,y+\Delta y,z)}^{(x,y+\Delta y,z)} a_x(x,y+\Delta y,z) dx + \int_{(x,y+\Delta y,z)}^{(x,y,z)} a_y(x,y,z) dy.\end{aligned}\quad (\text{A.111})$$

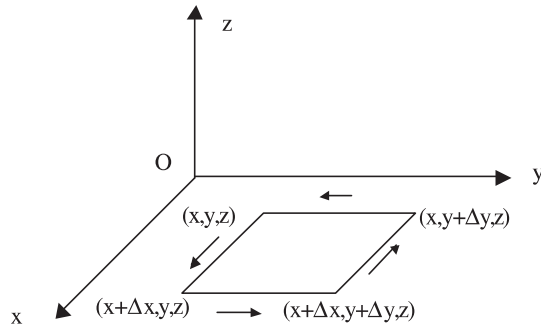


Figura A.13: Definierea operatorului rotor în termeni de coordonate.

Considerând că Δx și Δy sunt mici, putem dezvolta termenii A_x, A_y în serie Taylor și reține doar termenii semnificativi:

$$A_x(x, y + \Delta y, z) = A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \dots \quad (\text{A.112})$$

$$A_y(x + \Delta x, y, z) = A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \dots \quad (\text{A.113})$$

Să revenim în relația (A.111) în care, pentru claritate, să calculăm suma dintre prima și a treia, respectiv dintre a doua și a patra integrală. După inversarea limitelor unei integrale și apariția semnului minus, se obține:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} A_x(x, y, z) dx - \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \left[A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \right] dx \\ &= -\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \Delta x. \end{aligned} \quad (\text{A.114})$$

În mod similar se găsește:

$$I_2 = -\frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (\text{A.115})$$

Ca urmare, conform definiției (A.109), proiecția vectorului $\text{rot } \vec{A}$ pe axa Oz este:

$$(\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (\text{A.116})$$

În mod similar se obțin și celelalte proiecții (considerând dreptunghiuri cu laturile $\Delta y, \Delta z$ și, respectiv $\Delta z, \Delta x$):

$$(\text{rot } \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad (\text{A.117})$$

$$(\text{rot } \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (\text{A.118})$$

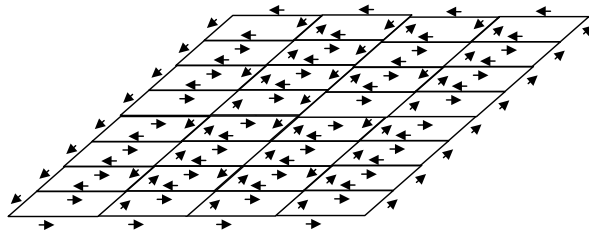


Figura A.14: Ilustrarea teoremei lui Stokes-Ampère

Din aceste relații rezultă expresia vectorului rotor în coordonate carteziene:

$$\text{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}. \quad (\text{A.119})$$

Teorema integrală Stokes-Ampère

Să calculăm fluxul vectorului $\text{rot}\vec{a}$ printr-o suprafață oarecare mărginită de un contur închis, divizând suprafața considerată în mici elemente de suprafață ΔS_i .

$$\int_S \text{rot}\vec{a} \cdot d\vec{S} = \sum_{(i)} \int_{\Delta S_i} \text{rot}\vec{a} \cdot d\vec{S}. \quad (\text{A.120})$$

Cum ΔS_i este foarte mic, se obțin în primă aproximație, folosind relația de definiție (A.109), următoarele expresii ce corespund fiecărui element de suprafață:

$$\int_{\Delta S_i} \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_i} (\text{rot}\vec{A})_n dS \approx (\text{rot}\vec{A})_n \Delta S_i \approx \oint_i \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (\text{A.121})$$

Ca urmare:

$$\int_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} \approx \sum_{(i)} \oint_i \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (\text{A.122})$$

Conform Fig.A.14, integralele de pe contururile ce mărginesc două suprafețe vecine sunt opuse ca semn (deoarece sunt parcurse în ambele sensuri) și ca urmare se anulează reciproc. Singurii termeni ce rămân necompensați sunt cei de pe conturul exterior ce mărginește suprafața considerată. Considerând suprafețele ΔS_i din ce în ce mai mici, prin trecere la limită se obține relația:

$$\int_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} \approx \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (\text{A.123})$$

Această relație este cunoscută ca *teorema Stokes-Ampère*.

A.4 Probleme

1. Poate fi rezultanta a doi vectori de mărimi diferite, egală cu zero?

2. Folosind definiția produsului scalar a doi vectori să se demonstreze teorema cosinusului.
3. Folosind definiția produsului vectorial într-un triunghi construit cu vectorii, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ($\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$) deduceți teorema sinusului:

$$\frac{\sin(\vec{A}, \vec{B})}{C} = \frac{\sin(\vec{B}, \vec{C})}{A} = \frac{\sin(\vec{A}, \vec{C})}{B}.$$

4. Fie vectorii:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \hat{x} - \hat{y} + 4\hat{z}; \\ \vec{b} &= \hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}; \\ \vec{c} &= -2\hat{x} + 2\hat{y} - 2\hat{z}.\end{aligned}$$

- (a) reprezentați grafic vectorii \vec{a}, \vec{b} și \vec{c} ;
- (b) calculați $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$; $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$; $\vec{b} \times \vec{a} \times 2\vec{c}$;
- (c) determinați:
- proiecția lui \vec{b} pe $\vec{c} - 2\vec{a}$;
 - unghiul dintre $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ și $\vec{c} - 2\vec{a}$;
 - cosinusurile directoare dintre $3\vec{b}$ și \vec{c} .

5. Forțele:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= 2\hat{x} - \hat{y} - 4\hat{z}, \\ \vec{F}_2 &= -4\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}.\end{aligned}$$

acționează asupra unui punct material care se deplasează în linie dreaptă din punctul $A(2, 2, 1)$ în punctul $B(2, 4, -1)$. Calculați lucrul mecanic $L = \int \vec{F} d\vec{r}$ efectuat de forța care rezultă din compunerea lui \vec{F}_1 cu \vec{F}_2 , ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2$).

6. Care este valoarea distanței dintre vârfurile vectorilor de poziție $\vec{r}_1 = \hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}$ și $\vec{r}_2 = 2\hat{x} - 4\hat{y} + 5\hat{z}$?

Răspuns: 5

7. Pentru ce valoare a lui c următorii trei vectori sunt coplanari?

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 3\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}; \\ \vec{b} &= 3\hat{x} + 4\hat{y} - 5\hat{z}; \\ \vec{c} &= c(\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}).\end{aligned}$$

Care este valoarea lui c pentru ca ei să formeze un triunghi?

Răspuns: $c = -7$; $c = 4\sqrt{2}$

8. Demonstrați egalitățile:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) &= 0 \\(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{c} - (\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{d} = \\&= (\vec{a} \times \vec{c} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{d}) \cdot \vec{a}.\end{aligned}$$

9. Demonstrați egalitatea: $\text{rot}(\text{rot } \vec{a}) = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$.

10. Calculați gradientul funcției $1/r^3$ cunoscând că $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

11. Calculați rotorul funcției $U = k/r$ și componentele carteziene ale forței definite prin relația $\vec{F} = -\nabla U$, unde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, iar k - o constantă.

12. Determinați divergența vectorului $\vec{r} = xy\hat{x} - yz\hat{y} - zx\hat{z}$.

Noțiuni introductive despre ecuații diferențiale ordinare

O *ecuație diferențială* este acea ecuație în care necunoscuta y (o funcție de una sau mai multe variabile, x_1, x_2, \dots, x_m) apare împreună cu derivatele sale până la un ordin n . Ordinul maxim al derivatei, n , reprezintă *ordinul ecuației diferențiale*. Dacă funcția y este de o singură variabilă ($m = 1$), ecuația diferențială se numește *ordinară*. Dacă $m > 1$, ecuația diferențială se numește *cu derivate parțiale*.

În cele ce urmează, vom face o foarte scurtă trecere în revistă a principalelor tipuri de *ecuații diferențiale ordinare* și vom prezenta modalitatea de aflare a soluțiilor acestora, atunci când acest lucru este posibil. Am ales, în special tipurile de ecuații diferențiale ordinare care apar în cartea de față.

Concretizând cele arătate anterior, o ecuație diferențială ordinară se scrie sub *forma generală*:

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\text{B.1})$$

O ecuație de forma:

$$f(x, y, y') = 0 \quad (\text{B.2})$$

este de ordinul I, deoarece aici apare doar derivata de ordin I a lui y . În același sens, ecuația:

$$f(x, y, y', y'') = 0 \quad (\text{B.3})$$

este de ordinul II.

În anumite condiții, ecuația diferențială (B.1) se poate scrie sub forma echivalentă:

$$y^{(n)} = \psi(x, y, y', \dots, y^{n-1}), \quad (\text{B.4})$$

denumită *formă normală*.

Rezolvarea (integrarea) unei ecuații diferențiale urmărește găsirea mulțimii funcțiilor $y(x)$ care verifică ecuația diferențială respectivă¹. Prin *soluție a ecuației diferențiale* pe intervalul

¹Această mulțime se numește *soluția generală* a ecuației diferențiale.

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ se înțelege o funcție $y(x)$, pentru care există derivatele $y', y'', \dots, y^{(n)}$ și verifică relația (B.4) pe (a, b) , pentru orice valoare a lui x .

Ecuațiile diferențiale descriu evoluția unui sistem în timp și/sau spațiu. Integrarea lor conduce la găsirea unei familii de soluții $y(x)$, de forma:

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (\text{B.5})$$

unde a_i sunt constante arbitrare, fiecare putând lua valori într-un interval finit sau infinit. Numărul n al constantelor este egal cu *ordinul ecuației diferențiale*.

Relația (B.5) precizează *soluția generală a ecuației diferențiale*. Pentru o anumită valoare a constantelor a_i (cu $i = 1 \dots n$), se găsește o *soluție particulară* a ecuației diferențiale.

Din păcate, nu există o metodă generală de integrare a ecuațiilor diferențiale, ci metode valabile doar pentru anumite tipuri de ecuații diferențiale. Alegerea metodei se face în funcție de forma ecuației diferențiale și ea este aplicabilă într-un număr limitat de situații.

B.1 Ecuații diferențiale de ordinul I cu variabile separabile

Forma generală a acestor ecuații este:

$$y' \cdot g(y) = h(x) \Rightarrow g(y)dy = h(x)dx. \quad (\text{B.6})$$

Aceasta se integrează imediat:

$$\int g(y)dy = \int h(x)dx + C, \quad (\text{B.7})$$

unde C este o constantă reală oarecare. Ecuațiile diferențiale cu variabile separabile apar, de exemplu, în studiul mișcării punctului material sub acțiunea unor forțe dependente de viteză sau de timp.

Exemple

(1) Fie ecuația diferențială:

$$y' + y^2 \cos x = 0. \quad (\text{B.8})$$

Ea se poate scrie sub forma:

$$-\frac{dy}{y^2} = \cos x dx, \quad (\text{B.9})$$

de unde:

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \sin x + C \quad (\text{B.10})$$

sau:

$$y = \frac{1}{\sin x + C}, \quad ; C \in \mathbb{R} \quad (\text{B.11})$$

(2) Fie ecuația diferențială:

$$xy' = \sqrt{1 - y^2}. \quad (\text{B.12})$$

Ea se poate scrie și sub forma:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{x}. \quad (\text{B.13})$$

După integrare vom găsi:

$$\arcsin y = \ln|x| + \ln C = \ln C|x|, \quad (\text{B.14})$$

de unde:

$$y = \sin(\ln C|x|), \quad C > 0 \quad (\text{B.15})$$

B.2 Ecuatii diferențiale liniare de ordinul I

Ecuatiile diferențiale liniare de ordinul I au forma:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x), \quad (\text{B.16})$$

unde $f(x)$ și $g(x)$ sunt funcții oarecare de x , în particular nule sau constante.

Unei astfel de ecuații i se asociază ecuația omogenă:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0, \quad (\text{B.17})$$

Soluția ecuației omogene este ușor de găsit, deoarece ecuația (B.17) este cu variabile separabile; ea se poate rescrie sub forma:

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx. \quad (\text{B.18})$$

Dacă $F(x)$ este o primitivă a lui $-f(x)$ avem:

$$\ln|y| = F(x) + C \Rightarrow |y| = e^C e^{F(x)}, \quad (\text{B.19})$$

și deci:

$$y = \pm e^C e^{F(x)} = a e^{F(x)} \quad \text{cu } a = \pm e^C \quad (\text{B.20})$$

Să presupunem cunoscută o soluție particulară, $y_0(x)$ a ecuației (B.16). Atunci:

$$\frac{dy_0}{dx} + f(x)y_0 = g(x). \quad (\text{B.21})$$

Scăzând, membru cu membru, ecuațiile (B.16) și (B.21) avem:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dy_0}{dx} + f(x)(y - y_0) = 0, \quad (\text{B.22})$$

ceea ce înseamnă că diferența $(y - y_0)$ este o soluție a ecuației diferențiale (B.22) și deci:

$$y - y_0 = a e^{F(x)}, \quad (\text{B.23})$$

adică:

$$y = y_0 + ae^{F(x)}. \quad (\text{B.24})$$

Prin urmare, putem afirma că:

Soluția generală a unei ecuații diferențiale liniare neomogene de ordinul I este sumă dintre o soluție particulară a acestei ecuații și soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare.

În continuare, rămâne problema găsirii unei soluții particulare a ecuației neomogene. Acest lucru poate fi realizat folosind așa-numita metodă a variației constantei și anume:

Să presupunem că constanta a , care apare în expresia soluției ecuației omogene ar fi o funcție de x , adică $a = a(x)^2$. Căutăm în ce condiții funcția $y(x) = a(x)e^{F(x)}$ este soluție a ecuației (B.16). Vom avea:

$$\frac{dy}{dx} = a'(x)e^{F(x)} + a(x)F'(x)e^{F(x)}. \quad (\text{B.25})$$

Având în vedere că $F'(x) = -f(x)$, după înlocuirea lui dy/dx în ecuația (B.16) obținem:

$$a'(x)e^{F(x)} - a(x)f(x)e^{F(x)} + f(x)a(x)e^{F(x)} = g(x), \quad (\text{B.26})$$

de unde:

$$a'(x)e^{F(x)} = g(x). \quad (\text{B.27})$$

Ca urmare, $a(x)$ este o primitivă a lui $g(x)e^{-F(x)}$, deci:

$$a(x) = \int g(x)e^{-F(x)} dx. \quad (\text{B.28})$$

Putem acum scrie soluția generală a ecuației neomogene sub forma:

$$y = [a + \int g(x)e^{-F(x)} dx] e^{F(x)}, \quad (\text{B.29})$$

unde $F(x)$ este o primitivă a funcției $f(x)$, care apare ca un coeficient al lui y în ecuația (B.16).

Exemple

(1). Fie ecuația diferențială:

$$\frac{dy}{dx} = 2x(e^{x^2} + y). \quad (\text{B.30})$$

Ea se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2xe^{x^2}. \quad (\text{B.31})$$

În acest caz, $f(x) = -2x$, iar o primitivă a lui $-f(x)$ este x^2 . Prin urmare:

$$y = [a + 2 \int xe^{x^2} \cdot e^{-x^2} dx] e^{x^2} = (a + x^2)e^{x^2}. \quad (\text{B.32})$$

²De aici denumirea de *variația constantei*.

(2). Fie ecuația diferențială:

$$\frac{dy}{dx}(1+x^2) + 2xy = \cos x. \quad (\text{B.33})$$

Ea se mai poate scrie și sub forma:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{\cos x}{1+x^2}. \quad (\text{B.34})$$

În acest caz:

$$-f(x) = -\frac{2x}{1+x^2}, \quad (\text{B.35})$$

care are o primitivă dată de $-\ln(1+x^2)$. Rezultă, în final:

$$y = \left[a + \int \frac{\cos x}{1+x^2} e^{\ln(1+x^2)} dx \right] e^{\ln(1+x^2)} = \frac{a + \sin x}{1+x^2}. \quad (\text{B.36})$$

B.3 Ecuația de tip Bernoulli

O astfel de ecuație are forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y + g(x) \cdot y^\alpha, \quad (\text{B.37})$$

unde α este o constantă arbitrară. Dacă $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$, ecuația este liniară. Dacă α este diferit de 0 sau 1, iar $y \neq 0$, împărțind ecuația precedentă prin y^α , vom obține:

$$\frac{dy}{dx} y^{-\alpha} = f(x) y^{1-\alpha} + g(x). \quad (\text{B.38})$$

Mai departe, făcând schimbarea de variabilă $z = y^{1-\alpha}$, avem:

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha) y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y''}{1-\alpha} \frac{dz}{dx}. \quad (\text{B.39})$$

Înlocuind acest rezultat în (B.38) găsim:

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)[f(x) \cdot z + g(x)]. \quad (\text{B.40})$$

Am ajuns astfel la o ecuație diferențială în $z(x)$. După ce găsim soluția $z = z(x)$, expresia lui y se poate obține din relația:

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (\text{B.41})$$

Exemplu

Fie ecuația diferențială:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + x^3 y^3. \quad (\text{B.42})$$

Folosind procedeul analizat în cazul ecuațiilor liniare, vom găsi:

$$z = \left[a + \int -2x^3 e^{2x^2} \right] e^{-2x^2}. \quad (\text{B.43})$$

După integrare:

$$z = ae^{-2x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}. \quad (\text{B.44})$$

Așadar, expresia lui y este:

$$y = \left(ae^{-2x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.45})$$

B.4 Ecuații diferențiale liniare de ordinul II

Forma generală a ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul II este:

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x). \quad (\text{B.46})$$

Ecuației diferențiale (B.46) i se asociază ecuația omogenă:

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0. \quad (\text{B.47})$$

Să presupunem că se cunoaște o soluție particulară, $y_0(x)$, a ecuației (B.46). Atunci:

$$f_2(x)y_0'' + f_1(x)y_0' + f_0(x)y_0 = g(x). \quad (\text{B.48})$$

Scăzând ecuațiile (B.46) și (B.48) găsim:

$$f_2(x)(y'' - y_0'') + f_1(x)(y' - y_0') + f_0(x)(y - y_0) = g(x). \quad (\text{B.49})$$

Deci diferența $(y - y_0)$ este soluție a ecuației omogene. În concluzie: *Soluția generală a unei ecuații liniare de ordinul II este suma unei soluții particulare a acestei ecuații și soluția ecuației omogene asociate.*

Căutăm, într-o prima etapă, soluția ecuației omogene. Presupunem că $y_1(x)$ este o soluție a ecuației omogene și să considerăm că y este legat de y_1 printr-o relație de forma:

$$y = zy_1, \quad (\text{B.50})$$

unde z este o noua funcție necunoscută. Calculând y' și y'' și înlocuind în (B.48) vom avea:

$$f_2(x)(y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'') + f_1(x)(y_1'z + y_1z') + f_0(x)y_1z = 0. \quad (\text{B.51})$$

Deoarece y_1 este o soluție, ținând cont de (B.48), găsim:

$$z [f_2(x)y_1'' + f_1(x)y_1' + f_0(x)y_1] = 0. \quad (\text{B.52})$$

Din ecuația (B.51) mai rămâne:

$$f_2(x)(2y_1'z' + y_1z'') + f_1(x)y_1z' = 0, \quad (\text{B.53})$$

care este de forma:

$$F_2(x)z'' + F_1(x)z' = 0. \quad (\text{B.54})$$

Făcând schimbarea de variabilă $u = z'$ găsim o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul I, despre care am discutat mai înainte. Prin integrare se găsește z , apoi soluția ecuației omogene.

De remarcat că dacă $y_1(x)$ este o soluție particulară a ecuației omogene, ky_1 (unde k este o constantă arbitrară) este, de asemenea, o soluție particulară a aceleiași ecuații diferențiale. Să presupunem acum că se cunoaște o a doua soluție particulară a ecuației (B.48), $y_2(x)$, care nu este de forma ky_1 . Acestei a 2-a soluții trebuie să îi corespundă o soluție $z_1(x)$, așa încât $y_2(x) = z_1(x)y_1(x)$. Prin urmare, soluția generală a acestei ecuații trebuie să fie:

$$z = k_2 z_2 + k_1, \quad (\text{B.55})$$

sau:

$$z = k_2 \frac{y_2}{y_1} + k_1. \quad (\text{B.56})$$

(k_1 și k_2 sunt două constante arbitrare). În concluzie:

Soluția unei ecuații diferențiale liniare de ordinul II, omogene, este de forma:

$$y = k_1 y_1 + k_2 y_2, \quad (\text{B.57})$$

y_1 și y_2 fiind două soluții particulare, al căror raport nu este o constantă.

Cu alte cuvinte:

Soluția ecuației diferențiale (B.46) se poate obține dacă se cunoaște o soluție particulară a sa și două soluții ne-proportionale ale ecuației (B.48). Prima soluție particulară, y_0 , se poate obține prin metoda variației constantei, de care ne-am ocupat în cazul ecuațiilor liniare. Nu exista, însă, metode generale de aflare a lui y_1 și y_2 .

B.5 Ecuatii diferențiale liniare de ordinul II cu coeficienți constanți

Astfel de ecuații sunt de forma:

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad (\text{B.58})$$

a , b , c fiind constante reale arbitrare.

Ecuatia omogenă asociată este:

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (\text{B.59})$$

Cum acesta este un caz particular a situației discutate anterior, aici se pot obține două soluții particulare ale ecuației omogene (B.59) căutând o soluție de forma:

$$y = e^{rx}, \quad (\text{B.60})$$

unde r este o constantă ce trebuie determinată. Vom avea:

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \quad (\text{B.61})$$

și:

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (\text{B.62})$$

Ecuația (B.62) se numește *ecuația caracteristică* asociată ecuației diferențiale (B.59). Ea are rădăcini $r_{1,2}$ reale sau complexe, distincte sau confundate. Există trei situații distincte:

(a) r_1 și r_2 sunt reale și distincte. Soluția generală a ecuației omogene este:

$$y = k_1e^{r_1x} + k_2e^{r_2x}, \quad (\text{B.63})$$

k_1 și k_2 fiind două constante arbitrare.

(b) r_1 și r_2 sunt reale și confundate. Soluția generală a ecuației omogene este:

$$y = (ax + b)e^{r_1x}, \quad (\text{B.64})$$

cu a, b - constante arbitrare

(c) r_1 și r_2 sunt complex conjugate. $r_1 = \alpha + i\beta$, iar $r_2 = \alpha - i\beta$.

Soluția generală este:

$$y = k_1e^{r_1x} + k_2e^{r_2x} = e^{\alpha x}(k_1e^{i\beta x} + k_2e^{-i\beta x}), \quad (\text{B.65})$$

adică:

$$y = e^{\alpha x}[k_1(\cos \beta x + i \sin \beta x) + k_2(\cos \beta x - i \sin \beta x)]. \quad (\text{B.66})$$

Soluția reală trebuie să aibă coeficienți reali, astfel încât:

$$y = e^{\alpha x}(a \cos \beta x + b \sin \beta x), \quad (\text{B.67})$$

sau:

$$y = Ce^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi). \quad (\text{B.68})$$

Pentru a obține soluția generală a ecuației neomogene, la o soluție particulară a acestei ecuații trebuie adunată soluția generală a ecuației omogene, menționată anterior.

Constante fizice și unități de măsură

Constante fizice

Viteza luminii în vid	$c = 2,997\,924\,58 \times 10^8 m/s$
Constanta atracției universale	$\gamma = 6,673 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$
Masa atomului de hidrogen	$m_H = 1,673\,52 \times 10^{-27} kg$
Masa electronului	$m_e = 9,1094 \times 10^{-31} kg$
Sarcina electronului	$e = 1,602\,18 \times 10^{-19} C$

Valori definite ca standard

Accelerația gravitațională standard	$g_0 = 9.806\,65 m/s^2$
Presiunea atmosferică normală	$p_0 = 1,013\,25 \times 10^5 Pa$

Mărimi specifice Pământului

Masa	$M_P = 5,974 \times 10^{24} kg$
	$\gamma M_P = 3,9860 \times 10^{14} m^3/s^2$
Raza la poli	$R_p = 6356,8 km$
Raza la ecuator	$R_e = 6378,1 km$
Semiaxa mare a orbitei	$a_p = 1,495\,98 \times 10^8 km$
Excentricitatea orbitei	$\varepsilon = 0,016722$
Perioada orbitală	$T = 3,1558 \times 10^7 s$
Viteza maximă pe orbită	$v_{max} = 29,785 km/s$
Viteza de evadare în spațiu	$v_e = 11,9 km/s$
Viteza unghiulară medie orbitală	$\omega = 7,2921 \times 10^{-5} s^{-1}$

Mărimi specifice Soarelui și Lunii

Masa Soarelui	$M_S = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$ $= 3,3295 \times 10^5 M_P$
	$\gamma M_S = 1,32712 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Masa Lunii	$m_L = 7,348 \times 10^{22} \text{ kg}$ $= 0,012300 M_P$
Semiaxa mare a orbitei Lunii	$a_L = 3,8440 \times 10^5 \text{ km}$
Perioada orbitală a Lunii	$T_M = 2.3606 \times 10^6 \text{ s}$

Unitățile de măsură ale mărimilor fundamentale din SI

1. *Kilogramul, kg*: masa etalonului internațional păstrat la Biroul Internațional de Măsură și Greutăți de la Sèvres, din Franța.

2. *Secunda, s*: durata a 9 192 631 770 perioade de oscilație a tranziției hiperfine între nivelele $F = 4, m_F = 0$ și $F = 3, m_F = 0$ ale stării fundamentale a izotopului ^{133}Cs .

3. *Metru, m*: distanța parcursă în vid de lumină în $1/299\,792\,458 \text{ s}$.

4. *Amperul, A*: intensitatea curentului care, trecând prin două conductoare de secțiune neglijabilă, infinit lungi și paralele între ele, plasate în vid la o distanță de 1m , determină o forță de interacțiune între acestea de $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ pentru fiecare metru de lungime a conductorului.

5. *Kelvinul, K*: intervalul de temperatură egal cu $1/273,16$ din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei.

6. *Candela, cd*: intensitatea luminoasă emisă, într-o direcție dată, de o sursă monocromatică cu frecvența de $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$ și a cărei intensitate energetică în această direcție este de $1/683 \text{ W/sr}$.

Unități derivate

Newton	$1\text{N} = 1\text{kg m/s}^2$
Joule	$1\text{J} = 1\text{Nm}$
Watt	$1\text{W} = 1\text{J/s}$
Pascal	$1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$
Hertz	$1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$

Prefixe pentru multiplii și submultiplii mărimilor metrice

10^3	kilo-	(<i>k</i>)
10^6	Mega-	(<i>M</i>)
10^9	Giga-	(<i>G</i>)
10^{12}	Terra-	(<i>T</i>)
10^{-3}	mili-	(<i>m</i>)
10^{-6}	micro-	(μ)
10^{-9}	nano-	(<i>n</i>)
10^{-12}	pico-	(<i>p</i>)

Bibliografie

1. G. Aniculăesei, *Ecuatii diferențiale și ecuațiile fizicii matematice*. Ed. Univ. "Alexandru Ioan Cuza" Iași, 2003.
2. A. P. Arya, *Introduction to Classical Mechanics*, 2-nd Edition, Prentice Hall International Inc., 1990.
3. V. Barger, M. Olson, *Classical Mecanics - A Modern Perspective*, McGraw-Hill, New York, 1973.
4. F. S. Crawford, *Cursul de fizică Berkeley, vol 3: Unde*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
5. A. P. French, M. G. Ebison *Introduction to Classical Mechanics*, Van Nostrand, UK, 1986.
6. H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3-rd Edition, Addison Wesley, 2000.
7. D. Halliday, R. Resnick, *Fizica vol 1*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975.
8. W. Hauser, *Introduction to the Principles of Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Comp. Inc., 1965.
9. R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press 1994.
10. A. Hristev, *Mecanică și acustică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
11. I. Irodov, *Problemes de Physique Generale*, Ed. Mir, Moscov, 1983.
12. T.W. Kibble, F.H. Berkshire, *Clasical Mechanics*, Longman, 4-th Edition, 1985.
13. Ch. Kittel, W. Knight, M. Ruderman, *Cursul de fizică Berkeley, vol 1: Mecanica*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
14. I. Mercheș, L. Burlacu, *Applied Analytical Mechanics*, "The Voice of Bucovina Press", Iasi, 1995.

15. E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, CUP 1993.
16. C. Plăvițu, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, C. Stanescu, L. Ionescu, R. Moldovan, *Probleme de mecanică fizică și acustică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
17. I. M. Popescu, *Fizica* vol 1, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982.
18. M. Sanduloviciu, *Mecanica*, curs litografiat, Ed. Universității "Al. I. Cuza" Iași, 1983.
19. H. G. Schuster *Deterministic Chaos*, Springer-Verlag 1984.
20. C. Stan, *Fizica 1*, Ed. Bren, Bucuresti, 2002.
21. H. J. Weber, G. B. Arfken, *Essential Mathematical Methods for Physicist*, Elsevier Academic Press, 2004.

Glosar

- șă
 - instabilă, 259
- acțiune, 206
- acclerație, 7, 9, 11
 - centripetă, 14
 - Coriolis, 14
 - instantanee, 7
 - medie, 7
 - normală, 17
 - tangențială, 17
- amplitudine, 49
- atractor, 261
- atractori, 255
 - haotici, 255
 - stranii, 255
- balanța
 - de torsiune, 61
- bazin de atracție, 255
- Bernoulli
 - ecuația de tip, 325
- bifurcații, 269
 - șă-nod, 270
 - furcă, 270
 - subcritice, 271
 - supercritice, 271
 - transcritice, 271
- bifurcații[Hopf, 272
- centru de masă, 73
- ciclu limită, 263, 265
- circulația
 - unui vector, 307
- coeficient
 - de rezistență, 43
 - de restituție, 85
- colatitudine, 20
- condiții inițiale, 32
- contractia lungimilor, 233
- coordonate, 2
 - carteziene, 3, 9
 - ciclice, 208
 - cilindrice, 17
 - generalizate, 198
 - naturale, 17
 - polare plane, 12
 - reduse, 67
 - sferice, 19
- cosinusuri directe, 303
- cuadrivector
 - de poziție, 244
 - forță-putere, 248
 - impuls-energie, 247
 - interval, 245
 - viteză, 246
- curbura
 - trajectoriei, 17
- curgere
 - laminară, 180
- densitate
 - liniară, 128
 - superficială, 128
 - volumică, 128
 - de forță exterioară, 176
- densitatea

- curentului masic, 313
- derivata
 - substanțială, 175
- diagrama
 - de stabilitate, 259
- dilatarea duratelor, 231
- dimensiune
 - de capacitate, 277
 - fractală, 277
- distribuție
 - liniară de masă, 130
 - superficială de masă, 130
- durata proprie, 232
- echilibru, 48
 - indiferent, 48
 - instabil, 48
 - stabil, 48
- ecuația
 - de continuitate, 178
 - Euler, 176
 - fundamentală a hidrostacii, 169
 - lui Bernoulli, 180
 - lui Toricelli, 182
- ecuații
 - canonice (Hamilton), 209
 - Lagrange, 204, 205
- ecuația
 - Binet, 56
 - parametrică, 3
- ecuații
 - Lorenz, 282
- efectul
 - Magnus, 189
- elipsoidul de inerție, 143
- energie
 - cinetică, 37, 38, 76
 - cinetică internă, 76
 - cinetică orbitală, 76
 - cinetica relativista, 240
 - de reacție, 78
 - internă, 76
 - potențială, 40, 75
 - relativista, 239
 - energie cinetică
 - de rotație, 141
- eveniment, 240
- exponenți Lyapunov, 274
- faza, 49, 210
- fluid, 165
 - newtonian, 185
- focar
 - instabil, 259
 - stabil, 259
- forța
 - de adeziune, 166
 - de coeziune, 165
 - portantă, 184
- forțe generalizate, 200
- forță
 - conservativă, 39
 - medie, 32
- forțe
 - externe, 72
 - impulsive, 80
 - interne, 72
- formalism
 - Hamilton, 195
 - Lagrange, 195
- formula Q, 90
- fractal, 275
- frecvența
 - unghiulară, 49
- funcția
 - Hamilton, 208
 - Lagrange, 203, 206
- funcție
 - scalară, 307
 - vectorială, 307
- giroscop
 - liber, 146
- grade de libertate, 123
- impuls, 28
- inerție, 29
- integrală
 - primă, 214

- integrale prime, 41
- intensitatea
 - curentului masic, 311
- interval
 - spatial, 243
 - temporal, 243
- Joule, 37
- latitudine
 - nordică, 20
 - sudică, 20
- legături
 - neolome, 196
 - olome, 196
 - reolome, 196
 - sclerolome, 196, 198
- legea
 - lui Poiseuille, 187
 - conservării energiei mecanice, 75
 - conservării energiei totale, 75
 - conservării impulsului, 74
 - de conservare a energiei, 47
 - lui Arhimede, 173
 - lui Bernoulli, 181
 - lui Stokes, 189
 - Pascal, 170
- linie de univers, 240
- longitudine
 - estică, 20
 - vestică, 20
- lucru mecanic, 36
- mărimi
 - tensoriale, 297
 - vectoriale, 297
- mărimi
 - tensoriale, 16, 297
- masa
 - de mișcare, 234, 236
 - de repaus, 234
 - inertă, 29
 - longitudinală, 237
 - redușă, 83
 - redușă, 63
- menisc
 - concav, 167
 - convex, 167
- mișcare
 - de rotație, 151
 - de precesie, 148
- mobil, 2
- modul, 298
- moment
 - al forței, 34
 - de inerție, 126
 - liniar, 28
 - unghiular, 34
 - unghiular total, 77
- momente
 - centrifugale de inerție, 141
 - principale de inerție, 141
- momentul
 - forței, 126
- nod
 - instabil, 259
 - stabil, 259
- nulcline, 256
- operator
 - divergență, 308, 311
 - gradient, 308
 - Laplace, 308
 - nabla, 308
 - rotor, 308, 315
- parametri
 - de control, 253
- parametru
 - de ciocnire, 86, 94
- pereche acțiune - reacțiune, 33
- portretul fazic, 254
- presiune
 - dinamică, 181
 - statică, 181
- produs
 - mixt, 305
 - scalar, 302
 - vectorial, 303

- pulsația, 49
- punct
 - material, 2
- punct material, 2, 9, 72
 - liber, 28
- puncte
 - critice, 256
 - fixe, 256
 - singulare, 256
- putere mecanică, 36
- regula
 - paralelogramului, 300
 - poligonului, 300
 - bac minus cab, 306
 - burghiului drept, 10, 15, 303, 315
 - burghiului stâng, 16
 - mâinii drepte, 18
- reper
 - inerțial, 28
 - spațial inerțial, 28
 - temporal inerțial, 28
- rotația
 - cu punct fix, 139
 - in jurul axie fixe, 125
- rotație
 - cu punct fix, 146
- secțiunea Poincaré, 267
- separatoare, 255
- sistem
 - al centrului de masă, 66, 74
 - al laboratorului, 64, 74
 - autonom, 253
 - conservativ, 254, 288
 - de referință, 223
 - de referință inerțial, 227
 - dinamic, 253
 - disipativ, 254, 258
 - integrabil, 286, 287
 - izolat, 66, 74, 75, 78
 - legat, 76, 196
 - liber, 196
 - neautonom, 253
 - nonintegrabil, 287, 290
- solid
 - rigid, 121
- spațiul
 - configurațiilor, 200
 - fazelor, 210, 254
- stare liberă, 48
- suprafață echipotențială, 308
- teorema
 - axelor paralele, 128
 - axelor perpendiculare, 131
 - Green-Gauss-Ostrogradski, 314
 - Stokes-Ampère, 317
 - variației energiei cinetice, 37
 - variației impulsului, 32
 - variației momentului unghiular, 34
- timp
 - de relaxare, 43
- traectoria, 3
- traietorie
 - generalizată, 201
- transformări
 - Galilei, 226
 - Lorentz directe, 230
 - Lorentz inverse, 230
- unghi
 - azimutal, 20
- variabile
 - conjugate, 208
- vector
 - axial, 16
 - polar, 16
- versori, 9, 298
- viteza
 - absolută, 225
 - areolară, 55
 - de transport, 225
 - generalizată, 198
 - instantanee, 5
 - medie, 5
 - relativă, 225
 - unghiulară, 15