1. INTRODUCERE

1.1. Locul şi rolul fizicii în cadrul ştiinței, în general, şi al ştiințelor naturii în special

Fizica, ca orice disciplină, poate fi înțeleasă şi abordată în diferite moduri. Importanța fizicii rezidă în primul rând în faptul că este o ştiință fundamentală a naturii al cărei studiu nu presupune cu necesitate decât anumite cunoştințe de matematică. Celelalte ştiințe ale naturii nu se pot dispensa de aportul fizicii chiar dacă ele nu pot fi reduse la aceasta. În ceea ce priveşte ştiințele tehnice, nu numai că acestea se bazează pe conceptele şi legile fizicii ci în genere, ele reprezintă practic aplicații ale capitolelor fizicii (de exemplu, termotehnica, electrotehnica, etc.) Datorită dezvoltării aplicațiilor practice, acestea s-au desprins formându-şi propriul limbaj, uşor modificat, mai adecvat caracterului tehnologic dar ele nu pot fi abordate în afara cunoştințelor generale ale fizicii. Mai mult, prin anumite direcții mari de dezvoltare (ca, de exemplu, fizica nucleară, fizica corpului solid, electrodinamica cuantică), granița dintre fizică şi tehnologie a început să se şteargă, activitatea de cercetare din cadrul fizicii devenind inseparabilă de dezvoltarea tehnologică. Astfel, fizica asigură atât scheletul, arhitectura de ansamblu a cunoaşterii universului material, cât şi caracterul unitar al cunoaşterii ştiințifice.

Fizica reprezintă, însă dezvoltarea unei forme specifice de gândire ea trebuind privită în mod necesar în cadrul cultural general. În momentul de față nu se mai poate separa cultura generală de cea ştiințifică, prima înglobând-o, presupunând-o necesar pe a doua ca o parte a sa. Astfel, specificitatea gândirii fizicii moderne ne apare drept esențială formării omului contemporan.

Considerațiile de mai sus se vor un răspuns la întrebarea “Ce este fizica?”. Termenul provine de la Aristotel, de la grecescul *physis* (natura). Fizica (deci cunoaşterea naturii) împreună cu metafizica formează phylossophia (*phylos* – prieten, *sophia* – înțelepciune). Fizica se referă deci la cunoaşterea naturii, în general, iar cunoaşterea reazemului adânc al existenței (adică problema “ființei”) revine metafizicii.

Ca ştiință fundamentală a naturii, fizica studiază mişcarea materiei inerte precum şi formele de organizare ale acesteia.

Volumul de față se dorește a fi un excurs introductiv în fizică. El este completat cu probleme rezolvate, şi, ca atare, este util celor care doresc să-şi însuşească, într-un mod accesibil, elementele fundamentale necesare înțelegerii şi studiului oricărui fenomen fizic.

1.2. Mărimi fizice. Măsurare şi unități

Fizica are drept scop identificarea şi descrierea adecvată a fenomenelor din lumea materială. Pentru a putea face acest lucru este nevoie să se lucreze cu mărimi măsurabile.

O mărime este măsurabilă atunci când pentru două entități de acelaşi tip se pot defini **egalitatea** şi **adunarea**.

Raportul a două mărimi de acelaşi tip se defineşte printr-un număr care exprimă de câte ori una din mărimi este cuprinsă în cealaltă.

În general, pentru a masura o mărime fizică oarecare aceasta nu se compară cu orice altă mărime fizică de acelaşi tip ci se raportează la o mărime particular aleasă, de acelaşi tip cu mărimea considerată, numită **unitate**. Prin definiție, numărul care reprezintă rezultatul operației de măsurare a unei mărimi este dat de raportul dintre mărimea dată şi mărimea aleasă ca unitate.

Legile fizicii, formulate matematic prin ecuații, arată cum depinde o mărime fizică de alte mărimi. Mărimile sunt exprimate prin simboluri care poartă cu ele în ecuație atât valorile numerice cât şi unitățile folosite pentru măsurarea acestora. O lege fizică, scrisă printr-o ecuație, fiind rezultatul observării comportării unui sistem dat, este independentă de alegerea unităților folosite pentru măsurarea mărimilor implicate. Dar, prin introducerea valorilor numerice ale mărimilor, însoțite obligatoriu de unitățile de măsură, ecuația este verificată, iar unitățile folosite fac parte dintr-un **sistem coerent de unități**.

Un sistem coerent de unități se compune din **unități fundamentale** şi **unități derivate**. Unitățile derivate sunt obținute din unitățile fundamentale conform unor formule convenabil alese şi în concordanță cu legile fizicii. Desigur, că mărimile fizice sunt şi ele clasificate în **mărimi fundamentale** şi **mărimi derivate**. Unitățile fundamentale sunt definite cu ajutorul unor etaloane adecvate care sunt impuse de alegerea unor standarde foarte precise ce trebuie riguros îndeplinite.

Sistemul de unități cel mai larg acceptat şi folosit în majoritatea țărilor lumii este sistemul metric internațional, prescurtat SI. Acest sistem introduce unitățile a şapte mărimi fundamentale pe baza cărora se obțin toate unitățile derivate necesare în practică.

Mărimile şi unitățile fundamentale ale SI sunt: **lungimea**, cu unitatea **metru (m)**, **masa,** cu unitatea **kilogram (kg)**, **timpul**, cu unitatea **secunda (s)**,

temperatura, cu unitatea **kelvin (K)**, **intensitatea curentului electric**, cu unitatea **amper (A)**, **intensitatea luminoasă**, cu unitatea **candelă (cd)** şi **cantitatea de substanţă**, cu unitatea **mol (mol)**. Unităţile de măsură pentru lungime, masă şi timp sunt unităţi fundamentale în mecanică. Denumirea mărimilor mecanice derivate, unităţile lor de măsură precum şi exprimarea acestora prin unităţile fundamentale sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Mărime	Unitate SI	Expresia în unităţi fundamentale SI
Frecvenţă	hertz (Hz)	$1Hz = 1\ s^{-1}$
Forţă	newton (N)	$1N = 1kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Presiune	pascal (Pa)	$1Pa = 1N \cdot m^{-2} = 1kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
Energie	joule (J)	$1J = 1\ N \cdot m = 1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Putere	watt (W)	$1W = 1J \cdot s^{-1} = 1kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$

Toate unităţile mărimilor electrice şi magnetice sunt unităţi derivate care se exprimă cu ajutorul celor patru unităţi fundamentale: m, kg, s, A. Denumirile, relaţiilor de definiţie şi expresiile acestora în funcţie de unităţile fundamentale SI sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Mărime	Unitate derivată (SI)	Expresii în unităţi fundamentale SI
Sarcina electrică	coulomb (C)	$1C = 1A \cdot s$
Potenţialul electric	volt (V)	$1V = 1W \cdot A^{-1} = 1kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Rezistenţa electrică	ohm (Ω)	$1\Omega = 1V \cdot A^{-1} = 1kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Capacitatea electrică	farad (F)	$1F = 1C \cdot V^{-1} = 1kg \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$
Fluxul magnetic	weber (Wb)	$1Wb = 1V \cdot s = 1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inducţia magnetică	tesla (T)	$1T = 1Wb \cdot m^{-2} = 1kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inductanţa	henry (H)	$1H = 1Wb \cdot A^{-1} = 1kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$

În ceea ce priveşte fenomenele optice, o nouă mărime fundamentală este introdusă şi anume **intensitatea luminoasă**. Unitatea SI pentru aceasta **candela (cd)** este definită ca fiind intensitatea luminoasă a unei surse, măsurată pe direcţia normalei la suprafaţă, care emite o radiaţie monocromatică cu frecvenţa de $540 \times 10^{12} Hz$ având puterea de $1/683\, W \cdot sr^{-1}$. Menţionăm că steradianul (sr), este unitatea de unghi solid, folosită în SI, şi este definit ca unghiul solid care având vârful în centrul unei sfere, delimitează pe suprafaţa acesteia o arie egală cu aria unui pătrat de latură egală cu raza sferei. Ca atare el reprezintă un număr iar unghiul solid este o mărime adimensională. Două unităţi derivate sunt folosite în optică: **lumenul (lm)**, pentru **fluxul luminos** şi **lux**-ul **(lx)**, pentru **iluminare**.

Pentru **cantitatea de substanţă** este **mol**-ul. Un mol este cantitatea de substanţă a unui sistem care conţine tot atâtea entităţi elementare (atomi, molecule, etc.) câţi atomi există în 0,012kg de carbon 12 $\left(C_6^{12}\right)$ pur. Trebuie menţionat că acest număr este dat de numărul lui Avogadro, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$.

1.3. Analiză dimensională

Orice mărime fizică are o dimensiune care se exprimă cu ajutorul mărimilor fundamentale care apar în expresia acesteia. Mărimilor fundamentale li se ataşează simboluri convenabil alese, cele mai uzitate fiind: $[L]$, pentru lungime, $[M]$, pentru masă, $[T]$, pentru timp, $[\theta]$, pentru temperatură, $[I]$, pentru curentul electric, etc.

Pornind de la ecuaţia de definiţie, formula dimensională a oricărei mărimi fizice se obţine prin înlocuirea mărimilor fundamentale care apar în expresia ei cu simbolurile lor.

Ca exemplu, ecuaţia dimensională a unei mărimi mecanice A se va scrie:

$$[A] = [L]^{\alpha}[M]^{\beta}[T]^{\gamma},$$

unde α, β, γ sunt puterile la care apar mărimile fundamentale în expresia mărimii A. Mărimile care se exprimă printr-un număr nu au dimensiune, adică sunt adimensionale, şi ca atare acestea nu apar în nici o ecuaţie dimensională.

Dacă pentru mărimile fundamentale se alege un sistem de unităţi de măsură, atunci, din ecuaţia dimensională a unei mărimi, obţinem unitatea acesteia în sistemul de unităţi considerat. Ca exemplu, dacă mărimea A este o forţă atunci unitatea acesteia în SI este **newtonul** dat de:

$$1N = 1kg \cdot m \cdot s^{-2}.$$

Ecuaţiile fizicii reprezintă o egalitate între cei doi membri ai ecuaţiei, care trebuie să aibă aceeaşi dimensiune exprimată cu ajutorul mărimilor fundamentale. Altfel spus, mărimile fundamentale trebuie să apară la aceleaşi puteri în ambii membrii ai ecuaţiei, această afirmaţie constituind aşa numitul **principiu al omogenităţii**.

În mecanică aceasta înseamnă că într-o ecuaţie dimensională, scrisă sub forma:

$$[L]^{\alpha}[M]^{\beta}[T]^{\gamma} = [L]^{\xi} \cdot [M]^{\eta} \cdot [T]^{\delta},$$

trebuie ca:

$$\alpha = \xi \quad , \quad \beta = \eta \quad , \quad \gamma = \delta,$$

adică termenii ecuației trebuie să fie omogeni din punct de vedere dimensional. Astfel, pe baza **principiului omogenității** se poate verifica valabilitatea tuturor ecuațiilor obținute prin calcul sau se pot stabili ecuații noi care să descrie un proces fizic studiat experimental atunci când se constată că o mărime anume depinde de alte mărimi dar nu se cunoaşte care este forma matematică explicită a acestei dependențe.

În final, trebuie menționat că functiile matematice care pot fi dezvoltate ca serii de puteri, precum $\sin x, \cos x, \mathrm{tg}x, \mathrm{ctg}x, \sinh x, \cosh x, e^x$, etc., unde x este o funcție de una sau mai multe mărimi, trebuie să aibă argumentul adimensional. Aceasta deoarece termenii de puteri diferite ai dezvoltării în serie trebuie să aibă o aceeaşi dimensiune, altfel ne putând să fie satisfăcut criteriul de omogenitate al ecuațiilor fizicii.

1.4. Elemente de calcul al erorilor

Legile fizicii sunt legi care trebuie verificate experimental. Aceasta implică necesitatea efectuării unor măsurători cât mai precise asupra mărimilor fizice. Pentru a putea fi luat în considerație, rezultatul unei măsurători asupra unei mărimi fizice trebuie dat întotdeauna împreună cu un estimat al erorii de măsură asupra mărimii respective.

Mărimile fizice măsurate sunt afectate de **erori aleatorii** care țin atât de precizia instrumentelor de măsură utilizate cât şi de calitatea fiziologică a ochiului observatorului.

Cea mai bună metodă de apreciere a erorii de măsură a unei mărimi x, care este direct măsurabilă, se bazează pe repetarea, în aceleaşi condiții, a măsurării acesteia, obținându-se un şir de valori $x_1, x_2, ..., x_n$. Se poate calcula, astfel, **valoarea medie** a rezultatelor obținute:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Pentru a se aprecia eroarea care afectează rezultatul măsurării, cel mai indicat este să se calculeze **abaterea medie** a rezultatelor obținute în urma măsurătorilor efectuate asupra mărimii x:

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{\sum_i |x_i - \langle x \rangle|}{n}.$$

Rezultatul măsurătorilor asupra mărimii x se poate da atunci sub forma:

$$x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle .$$

Desigur că dacă se măreşte numărul de măsurători asupra unei mărimi, atunci precizia de măsură a acesteia se îmbunătăţeşte, adică se micşorează eroarea de măsură a marimii respective. În fapt, precizia cu care este masurată o marime este dată de **eroarea relativă** de măsură a acesteia, dată de:

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} .$$

Un alt parametru folosit pentru caracterizarea erorilor aleatoare este **abaterea pătratică medie** sau **abaterea standard**, s, care, pentru mărimi măsurabile x care variază continuu este definită ca:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}{n(n-1)}} .$$

Distribuția valorilor obținute pentru o mărime măsurată x este descrisă, în general, de o funcție de distribuție $f(x)$. Funcția de distribuție $f(x)$ reprezintă probabilitatea de apariție a unei valori oarecare x definită pe intervalul $[-\infty, +\infty]$ dacă se efectuează o singură măsurare asupra mărimii date. Mărimile care variază continuu se supun distribuției Gauss iar cele care variază discontinuu se supun distribuției Poisson. Fiind definită ca o densitate de probabilitate, $f(x)$ trebuie să verifice relația:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 .$$

Cu ajutorul funcției de distribuție, **valoarea medie** şi **abaterea standard** pentru o mărime măsurată x distribuită continuu se calculează ca:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx ,$$

$$s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx .$$

Dacă mărimea a cărei eroare de măsură trebuie stabilită **nu este direct măsurabilă** ci ea depinde de alte mărimi care sunt direct măsurabile, atunci are loc **propagarea erorilor aleatorii** ale acestora asupra marimii care depinde de ele.

Astfel, pentru o mărime $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, în condițiile unor abateri standard mici ale variabilelor x_i, abaterea standard a mărimii y, S_y, se calculează cu formula:

$$S_y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 S_{x_i}^2} .$$

1.5. Sisteme de coordonate

Pentru precizarea poziției unui punct material în spațiu este necesar să se aleagă un **sistem de coordonate** cu ajutorul căruia se stabileşte poziția punctului geometric în care este plasat punctul material. Există mai multe sisteme de coordonate posibil a fi alese, trecerea de la unul la altul făcându-se prin relații de transformare adecvate.

Sistemul de coordonate carteziene este un sistem dextrogir constituit din trei axe perpendiculare între ele. În acest sistem, fiecărui punct din spațiu îi corespunde un ansamblu de trei numere reale notate cu x, y, z, care reprezintă coordonatele proiecțiilor punctului geometric pe axele sistemului (Fig. 1.1).

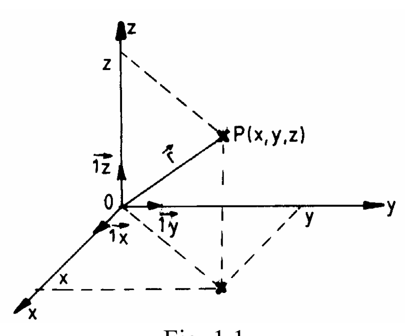


Fig. 1.1

Poziția punctului P poate fi indicată şi cu ajutorul **vectorului de poziție**, $\vec{r}$, definit ca fiind vectorul cu originea în originea sistemului de coordonate O si cu vârful în punctul considerat P.

Introducând **vectorii unitate** pentru axele de coordonate, $\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z$, ca fiind vectorii de modul unitate, având direcția şi sensul axelor de coordonate, vectorul de poziție $\vec{r}$ se scrie:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{1}_x + y \cdot \vec{1}_y + z \cdot \vec{1}_z .$$

Vectorul de poziție $\vec{r}$ mai poate fi scris şi ca:

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \vec{1}_r = r \cdot \vec{1}_r,$$

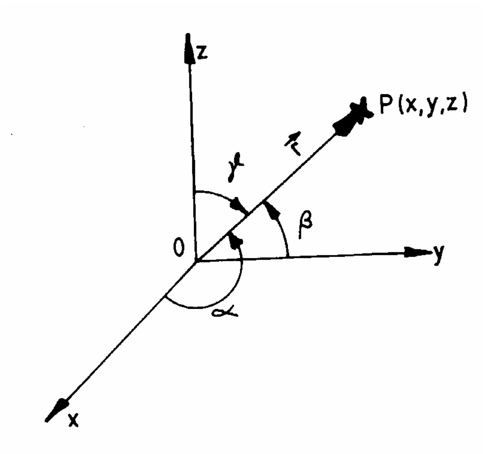


Fig. 1.2

unde $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ reprezintă mărimea sau modulul vectorului $\vec{r}$, iar $\vec{1}_r$ este vectorul unitate pentru direcția lui $\vec{r}$. Aceasta poate fi precizată cu ajutorul unghiurilor pe care vectorul $\vec{r}$ le face cu axele Ox, Oy, Oz (Fig. 1.2), prin **cosinuşii directori** dați de:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Ținând cont că: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, cosinuşii directori verifică relația:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Poziția relativă a unui punct $P_1(x_1, y_1, z_1)$ față de un punct $P_2(x_2, y_2, z_2)$, aceasta este dată de:

$$\vec{r}_{12} = (x_1 - x_2)\cdot\vec{1}_x + (y_1 - y_2)\cdot\vec{1}_y + (z_1 - z_2)\cdot\vec{1}_z.$$

Distanța dintre două puncte din spațiu, $P_i(x_i, y_i, z_i)$ şi $P_j(x_j, y_j, z_j)$, se calculează cu teorema lui Pitagora:

$$l = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

ea constituind **metrica spațiului**.

Sistemul de coordonate cilindrice atașează fiecărui punct geometric trei coordonate: ρ, φ şi z (Fig. 1.3). Formulele de trecere de la coordonatele carteziene, la coordonate cilindrice, şi relațiile reciproce, sunt:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \rho\cos\varphi$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad y = \rho\sin\varphi$$
$$z = z, \quad z = z$$

unde $\varphi \in [0,2\pi]$.

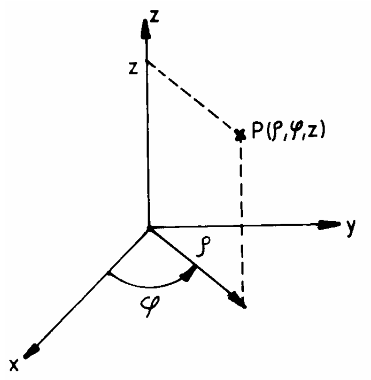


Fig. 1.3

Sistemul de coordonate sferice atașează fiecărui punct din spațiu coordonatele r, φ şi θ (Fig. 1.4). Formulele de trecere de la coordonatele carteziene la cele sferice, şi reciproc, sunt date de relațiile:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad z = r\cos\theta$$

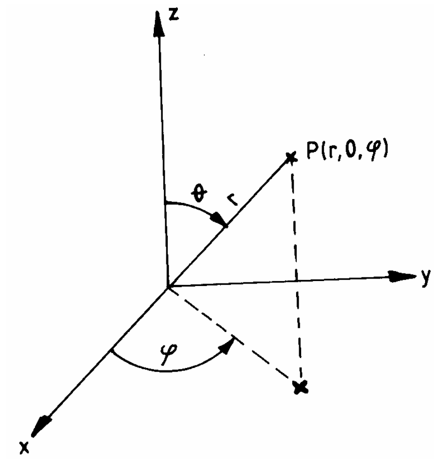


Fig. 1.4

unde $\varphi \in [0,2\pi]$ si $\theta \in [0,\pi]$.

Dacă se trece de la un sistem de coordonate carteziene (S) la un alt sistem de coordonate carteziene (S') obținut printr-o **translație** de vector $\vec{R}$, atunci între vectorii de poziție ai unui punct P față de cele două sisteme (S) şi (S') respectiv $\vec{r}'$ (Fig. 1.5), există relația:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'.$$

Dacă se trece de la un sistem de coordonate carteziene (S) la un alt sistem de coordonate carteziene (S') obținut printr-o rotație a axelor, sistemele având originea comună (Fig. 1.6), atunci între coordonatele punctului P față de cele două sisteme există relațiile:

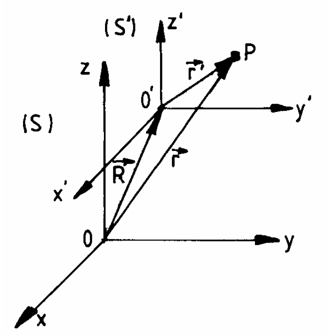


Fig. 1.5

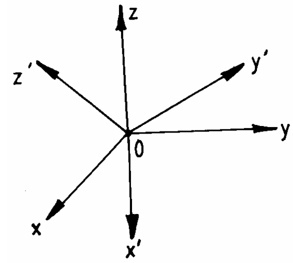


Fig. 1.6

$$\begin{aligned}
x &= x'\cos\left(\vec{1}_{x'},\vec{1}_x\right) + y'\cos\left(\vec{1}_{y'},\vec{1}_x\right) + z'\cos\left(\vec{1}_{z'},\vec{1}_x\right)\\
y &= x'\cos\left(\vec{1}_{x'},\vec{1}_y\right) + y'\cos\left(\vec{1}_{y'},\vec{1}_y\right) + z'\cos\left(\vec{1}_{z'},\vec{1}_y\right)\\
z &= x'\cos\left(\vec{1}_{x'},\vec{1}_z\right) + y'\cos\left(\vec{1}_{y'},\vec{1}_z\right) + z'\cos\left(\vec{1}_{z'},\vec{1}_z\right).
\end{aligned}$$

În ecuațiile de mai sus doar trei dintre unghiuri sunt independente, iar restul se calculează în funcție de acestea.

1.6. Elemente de calcul vectorial

Mărimile fizice sunt fie **mărimi scalare**, caracterizate doar de **o valoare numerică**, aşa cum sunt: masa, sarcina, energia, densitatea, fie **mărimi vectoriale** caracterizate, pe lângă **valoarea numerică**, şi de **o direcție** pe care acționează acestea precum şi de **sensul** în care sunt orientate pe direcția respectivă.

Mărimi vectoriale sunt: vectorul de poziție, viteza, accelerația, forța, momentul forței, câmpul electric, câmpul magnetic, etc. Orice mărime vectorială poate fi reprezentată printr-un segment de dreaptă având lungimea proporțională cu valoarea numerică a mărimii respective şi sensul şi direcția coincizând cu sensul şi direcția mărimii. Atunci, orice marime vectorială $\vec{A}$ se poate scrie ca:

$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{1}_x + A_y \cdot \vec{1}_y + A_z \cdot \vec{1}_z,$$

unde $\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z$ sunt versorii axelor de coordonate Ox, Oy, Oz ale sistemului de referință cartezian ales pentru reprezentarea lui $\vec{A}$, iar A_x, A_y, A_z sunt proiecțiile lui $\vec{A}$ pe axele sistemului, numite **componente** ale vectorului $\vec{A}$. Vectorul $\vec{A}$, precizat prin coordonatele sale se mai scrie concentrat astfel: $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$.

Suma a doi vectori $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ şi $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$, este vectorul $\vec{A}+\vec{B}$ dat de:

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\vec{1}_x+(A_y+B_y)\vec{1}_y+(A_z+B_z)\vec{1}_z.$$

Diferența a doi vectori $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ este vectorul $\vec{A}-\vec{B}$ dat de:

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\vec{1}_x+(A_y-B_y)\vec{1}_y+(A_z-B_z)\vec{1}_z.$$

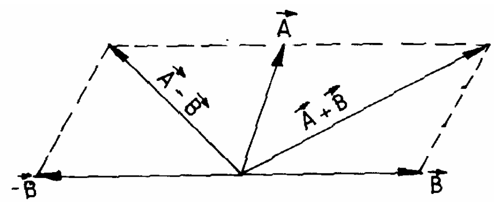


Fig. 1.7

Vectorii sumă şi diferență pot fi obținuți şi grafic prin metoda paralelogramului. Conform acesteia, paralelo-gramul format cu $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ are drept diagonală mare **vectorul sumă** $\vec{A}+\vec{B}$ şi drept diagonală mică **vectorul diferență** $\vec{A}-\vec{B}$ (Fig. 1.7), cu sensurile din figură. Conform regulii paralelogramului, care nu reprezintă altceva decât aplicarea teoremei lui Pitagora generalizate, modulul lui $\vec{A}+\vec{B}$ este:

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{\left|\vec{A}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2+2\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)}.$$

În cazul diferenței, deoarece $\vec{A}-\vec{B}$ reprezintă suma $\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$, notând $\alpha=\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$, şi observând că:

$$\left(\widehat{\vec{A},-\vec{B}}\right)=180^\circ-\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) \text{ şi } \cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$$

avem:

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{\left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 - 2\left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cos\alpha} \, .$$

Înmulțirea unui vector $\vec{A}$ cu un scalar a, conduce la vectorul $a\vec{A}$ care are acelaşi sens cu $\vec{A}$ dacă $a > 0$ şi opus dacă $a < 0$.

Produsul scalar a doi vetori este un scalar dat de:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cos\alpha \, ,$$

unde $\alpha = \left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$.

Produsul scalar este **comutativ**:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \, ,$$

şi **distributiv**:

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \, .$$

Produsul vectorial a doi vectori $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ este un vector $\vec{C}$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

al cărui modul este dat de:

$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \sin\alpha \, , \qquad \text{unde } \alpha = \left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right).$$

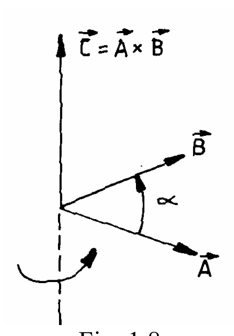


Fig. 1.8

Vectorul produs vectorial este perpendicular pe planul vectorilor $\vec{A}$ şi $\vec{B}$, având sensul dat de **regula burghiului drept** conform căreia sensul vectorului $\vec{A} \times \vec{B}$ coincide cu sensul de înaintare al unui burghiu al carui mâner efectuează o rotație de unghi minim în planul vectorilor $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ pentru a-l aduce pe $\vec{A}$ peste $\vec{B}$ (Fig. 1.8). Se poate observa că **produsul vectorial este anticomutativ**:

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} \, ,$$

dar este **distributiv**:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \, .$$

Ținând cont de definițiile produsului vectorial şi produsului scalar, acestea se pot calcula uşor pentru vectorii unitari ai axelor carteziene, obținându-se:

$$\vec{1}_x \cdot \vec{1}_y = \vec{1}_y \cdot \vec{1}_z = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_x = 0$$
$$\vec{1}_x \cdot \vec{1}_x = \vec{1}_y \cdot \vec{1}_y = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_z = 1$$
$$\vec{1}_x \times \vec{1}_y = \vec{1}_z, \quad \vec{1}_y \times \vec{1}_z = \vec{1}_x, \quad \vec{1}_z \times \vec{1}_x = \vec{1}_y$$
$$\vec{1}_x \times \vec{1}_x = \vec{1}_y \times \vec{1}_y = \vec{1}_z \times \vec{1}_z = 0,$$

unde s-a ținut cont că $\left|\vec{1}_x\right| = \left|\vec{1}_y\right| = \left|\vec{1}_z\right| = 1$.

Acum, scriind vectorii $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ cu ajutorul componentelor carteziene, produsul scalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ se scrie:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

iar produsul vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ va fi dat de determinantul:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{1}_x \left(A_y B_z - A_z B_y\right) + \vec{1}_y \left(A_z B_x - A_x B_z\right) + \vec{1}_z \left(A_x B_y - A_y B_x\right).$$

Fiind dați trei vectori $\vec{A}$, $\vec{B}$ şi $\vec{C}$, **dublul produs vectorial** al acestora se calculează cu relația:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

care poate fi probată aplicând regulile de calcul vectorial prezentate anterior.

Un vector cu proprietăți speciale, larg utilizat în fizică, este **vectorul** ∇ **(nabla)**, ale cărui componente sunt operatorii de derivare $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Astfel, acesta are expresia:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{1}_z.$$

Orice operație cu vectorul ∇ presupune respectarea regulilor de calcul vectorial şi în plus a celor de calcul diferențial asupra mărimilor care figurează în dreapta sa.

Astfel, produsul $\nabla \cdot \varphi$, unde φ este un scalar, conduce la un vector numit **gradientul** lui φ, dat de:

$$\nabla \cdot \varphi = \mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{1}_z .$$

Dacă se efectuează produsul scalar dintre operatorul ∇ şi un vector $\vec{A}$, se obține un scalar numit **divergența lui** $\vec{A}$:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .$$

Produsul vectorial dintre ∇ şi un vector $\vec{A}$ este un vector care se numeşte **rotorul lui** $\vec{A}$, care conform regulilor de calcul prezentate, este dat de:

$$\nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{1}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) +$$

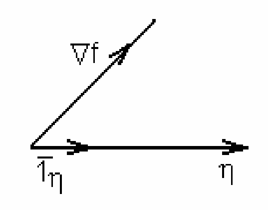
$$+ \vec{1}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{1}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

După cum vom vedea în cele ce urmează interpretarea rezultatelor operării cu operatorul vectorial ∇ asupra mărimilor fizice furnizează date semnificative asupra mărimilor respective. Astfel, pentru o mărime fizică $f = f(x, y, z)$, calculând ∇f şi înmulținâd apoi cu deplasarea elementară $d\vec{r} = dx \cdot \vec{1}_x + dy \cdot \vec{1}_y + dz \cdot \vec{1}_z$, se obține diferențiala funcției f:

$$\nabla f \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{1}_z\right) \cdot$$

$$\cdot \left(dx \cdot \vec{1}_x + dy \cdot \vec{1}_y + dz \cdot \vec{1}_z\right) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df.$$

De aici, scriind $d\vec{r} = d\eta \cdot \vec{1}_\eta$, observăm că viteza de variaţie a lui f pe o direcţie dată se obţine proiectând ∇f pe aceea direcţie (Fig. 1.9):



$$\nabla f \cdot \vec{1}_\eta = \frac{df}{d\eta}.$$

Fig. 1.9

Trebuie remarcat că ∇f ne dă direcţia după care viteza de variaţie a funcţiei f este maximă precum şi valoarea vitezei maxime de variaţie.

În ceea ce priveşte interpretarea rezultatelor ce pot fi obţinute prin calcularea divergenţei unui vector, să luăm, ca exemplu, vectorul $\vec{A} = A_x \cdot \vec{1}_x$ şi să calculăm divergenţa acestuia. Dacă $\nabla\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$, atunci rezultă că $A_x = \text{const.}$ sau $A_x = A_x(y,z)$. Aceasta înseamnă că în orice punct ne-am situa de-a lungul direcţiei Ox, $\vec{A} = \text{const.}$, adică avem de-a face cu un câmp vectorial constant de-a lungul axei Ox (Fig. 1.10). Dacă însă $\nabla\vec{A} \neq 0$, cea mai simplă dependenţă pe care o putem considera pentru A_x este cea lineară, $A_x = ax$. Atunci $\nabla\vec{A} = a$, astfel că pentru $a < 0 \Rightarrow \nabla\vec{A} < 0$ şi invers, pentru $a > 0 \Rightarrow \nabla\vec{A} > 0$.

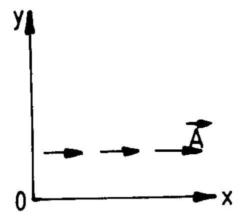


Fig. 1.10

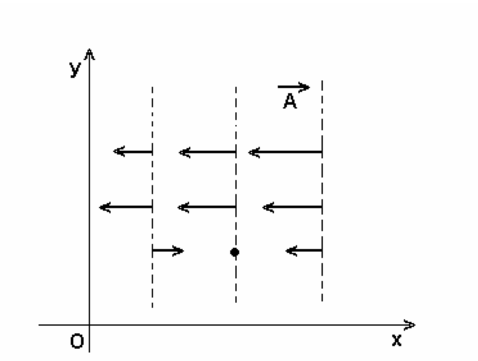


Fig. 1.11

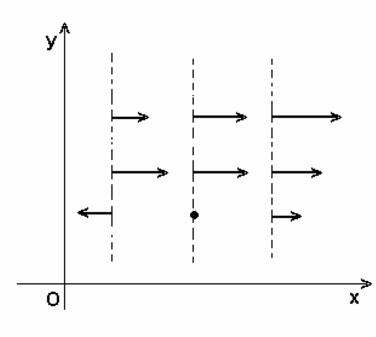


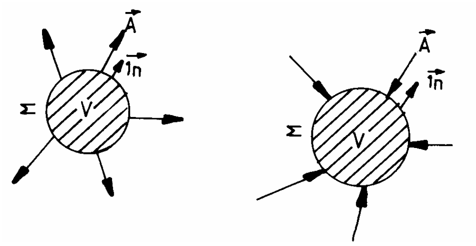
Fig. 1.12

În primul caz, în fiecare punct al axei Ox câmpul vectorial $\vec{A}$ poate fi privit ca suprapunerea dintre un câmp vectorial constant şi un câmp vectorial convergent în acel punct (Fig. 1.11), iar în cazul al doilea peste un câmp constant în fiecare punct de pe axa Ox se suprapune un câmp divergent (Fig. 1.12).

Se poate deci spune că punctele de divergență nenulă sunt surse radiale de câmp convergent dacă $\nabla\vec{A} < 0$ şi surse radiale de câmp divergent dacă $\nabla\vec{A} > 0$.

Cele de mai sus pot fi mai bine înțelese cu ajutorul teoremei lui Gauss, dată de ecuația:

$$\iiint_V \nabla\vec{A}dv = \oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{1}_n da.$$



a) b)

Fig. 1.13

În această ecuație membrul drept reprezintă fluxul vectorului $\vec{A}$ prin suprafața închisă Σ care mărgineşte volumul V. Astfel, conform teoremei lui Gauss, dacă $\nabla\vec{A} > 0$ atunci $\vec{A}\cdot\vec{1}_n > 0$ ceea ce înseamnă că liniile câmpului vectorial $\vec{A}$ ies din volumul V, adică sunt divergente (Fig. 1.13a) iar dacă $\nabla\vec{A} < 0$ atunci $\vec{A}\cdot\vec{1}_n < 0$ ceea ce înseamnă că $\vec{A}$ este orientat spre interiorul volumului V, adică liniile de câmp sunt convergente (Fig. 1.13b).

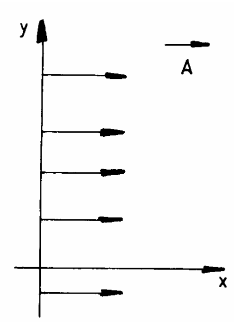


Fig. 1.14

Să discutăm în final semnificația rotorului unui vector. Pentru simplitate, să presupunem că $\vec{A} = A_x\vec{1}_x$ şi A_x nu depinde de z. Atunci $\nabla\times\vec{A} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\vec{1}_z$. Dacă $A_x = \text{const.}$ sau independent de y atunci $\nabla\times\vec{A} = 0$. În acest caz vectorul $\vec{A}$ reprezintă un câmp vectorial nerotațional pe care l-am reprezentat în figura 1.14. Dacă însă $A_x = ay$, în acest caz $\nabla\times\vec{A} = -a\vec{1}_z$ şi, în funcție de semnul lui $a, \nabla\times\vec{A}$ va fi orientat în sens opus lui $\vec{1}_z$ pentru $a > 0$ şi în acelaşi sens pentru $a < 0$.

În ambele cazuri mărimea $\vec{A}$ reprezintă un câmp vectorial rezultat prin suprapunerea unui câmp rotațional în planul perpendicular pe axa Oz, peste un câmp vectorial constant, aflat tot în acest plan, cele două cazuri fiind reprezentate în figurile 1.15 şi respectiv 1.16.

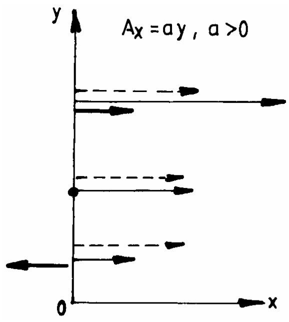


Fig. 1.17

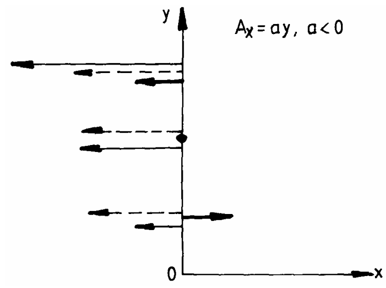


Fig.1.18

La modul general se poate spune că toate punctele pentru care $\nabla \times \vec{A} \neq 0$ sunt surse de câmp rotațional.

Cele discutate anterior pot fi mai bine înțelese cu ajutorul teoremei lui Stokes care afirmă că circulația unui vector $\vec{A}$ pe un contur închis Γ se poate calcula cu ajutorul fluxului rotorului lui $\vec{A}$ printr-o suprafață deschisă S care se sprijină pe conturul Γ:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} = \iint_{S} \left(\nabla \times \vec{A}\right) \vec{1}_n \, da .$$

Conform teoremei lui Stokes, în jurul oricărui punct în care $\nabla \times \vec{A} \neq 0$, există un câmp rotațional al vectorului $\vec{A}$. Cu alte cuvinte, rotorul unui vector reprezintă sursă de câmp rotațional.

În final, iată câteva elemente de calcul cu operatorul ∇:

$$\nabla(AB) = A\nabla B + B\nabla A$$

$$\nabla\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = \left(\nabla \cdot \vec{B}\right)\vec{A} + \left(\nabla \cdot \vec{A}\right)\vec{B} + \vec{A} \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) + \vec{B} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)$$

$$\nabla \times \left(\lambda \vec{A}\right) = \lambda \nabla \times \vec{A} + (\nabla \lambda) \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(\nabla \cdot \vec{B}\right)\vec{A} - \left(\nabla \vec{A}\right)\vec{B} + \left(\vec{A}\nabla \cdot \vec{B}\right) - \vec{B}\nabla \vec{A}$$

$$\nabla\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) - \vec{A}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$$

$$\nabla \times (\nabla \cdot A) = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0 .$$

Expresia operatorului $\nabla^2 = \Delta$ (laplaceian) în coordonate sferice:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

iar în coordonate cilindrice este:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$