Integrale pe interval necompact
(generalizate, improprii)

Definiție. $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrabilă pe orice $[a,u]\subset[a,b)$ spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este <u>convergentă</u> dacă $\exists \lim_{u\to b}\int_a^u f(x)dx = l\in\mathbb{R}$; în acest caz punem $\int_a^b f(x)dx = l$. În caz contrar integrala este divergentă.

Teoremă. $\int_a^b f(x)dx$ convergentă $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon, a<\delta_\varepsilon<b, \left|\int_u^v f(x)dx\right|<\varepsilon, \forall u,v:\delta_\varepsilon<u<v<b$

Observație. Daca f are <u>limită</u> în b iar b este <u>finit</u>, atunci integrala este convergentă şi coincide cu integrala prelungirii prin continuitate a funcției f.

Teoremă (criteriul de comparație) Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}_+$, $f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b)$, atunci

a) $\int_a^b g(x)dx$ convergentă $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ convergentă

b) $\int_a^b f(x)dx$ divergentă $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ divergentă

Teoremă. Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$, atunci

a) $\exists\alpha>1, \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = l$ (finit) $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ convergentă

b) $\exists\alpha\le 1, \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = l$ (nenul) $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ divergentă

Teoremă. Fie $f:(a,b]\to\mathbb{R}_+$, atunci

a) $\exists\alpha<1, \lim_{x\downarrow a}(x-a)^\alpha f(x) = l$ (finit) $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ convergentă

b) $\exists\alpha\ge 1, \lim_{x\downarrow a}(x-a)^\alpha f(x) = l$ (nenul) $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ divergentă

Teoremă. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}_+$, atunci

a) $\exists\alpha<1, \lim_{x\uparrow b}(b-x)^\alpha f(x) = l$ (finit) $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ convergentă

b) $\exists\alpha\ge 1, \lim_{x\uparrow b}(b-x)^\alpha f(x) = l$ (nenul) $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ divergentă

Teoremă (Dirichlet). Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ continuă, $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ mărginită, $g:[a,b)\to\mathbb{R}$ descrescătoare şi $\lim_{x\to b} g(x)=0$ atunci $\int_a^b f(x)g(x)dx$ este convergentă.

Definiție. $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă dacă $\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă

Lemă. Dacă $\int_a^b f(x)dx$ este absolut convergentă atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă

Teoremă (Criteriul integral al lui Cauchy). $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}_+$ descrescătoare, $\int_1^\infty f(x)dx$ are aceeaşi natură (convergentă sau divergentă) cu seria $\sum_{n=1,\infty} f(n)$

Integrale pe interval necompact

Exercițiu. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx, \alpha > 0$

Soluție. $\alpha \neq 1 \Rightarrow \int_1^{u} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \Big|_1^u = \frac{u^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$, $\lim_{u\to\infty} u^{-\alpha+1} = \begin{cases} 0, \alpha > 1 \\ \infty, \alpha < 1 \end{cases}$ deci integrală convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha < 1$. Pentru $\alpha = 1$, $\int_1^{u} \frac{1}{x} dx = \ln u$, iar $\lim_{u\to\infty} \ln u = \infty$, deci este divergentă pentru $\alpha \leq 1$

Exercițiu. $\int_0^{1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx, \alpha > 0$

Soluție. Pentru $\alpha \neq 1$ $\lim_{u\to 0} u^{-\alpha+1} = \begin{cases} 0, \alpha < 1 \\ \infty, \alpha > 1 \end{cases}$, convergentă pentru $\alpha < 1$, divergentă pentru $\alpha \geq 1$

Exercițiu. $\int_1^{\infty} \frac{1}{2+3x+4x^2} dx$

Soluție. $0 < \frac{1}{2+3x+4x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ iar $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ este convergentă, rezultă $\int_1^{\infty} \frac{1}{2+3x+4x^2} dx$ convergentă

Exercițiu. $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$

Soluție. Deoarece $0 < \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ şi $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ este divergentă rezultă $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$ divergentă

Exercițiu. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}} dx$

Soluție. Deoarece $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, iar $\alpha = \frac{1}{3} \leq 1$ şi $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \neq 0$ rezultă că integrala este divergentă

Exercițiu. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^3+3}} dx$

Soluție. Deoarece $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x^3+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ iar $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ şi $\frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$ rezultă că integrala este convergentă

Exercițiu. $\int_2^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2(3-x)^4}} dx$

Soluție Considerăm suma: $\int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2(3-x)^4}} dx + \int_{\frac{5}{2}}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2(3-x)^4}} dx$, $\lim_{x\to 2} (x-2)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2(3-x)^4}} = 1$,

$\lim_{x\to 3} (3-x)^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2(3-x)^4}} = 1$ prima integrală este convergentă, doua divergentă. Suma este divergentă.

Exercițiu. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Soluție. $\int_0^{1} \frac{\sin x}{x} dx$ convergentă deoarece $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Pentru $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, avem $F(u) = \int_1^{u} \sin x dx = -\cos x + \cos 1$ este mărginită iar $g(x) = \frac{1}{x}$, $g:(1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ este descrescătoare şi $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ deci $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă.

Exercițiu. $\int_1^{\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{2x+3} dx$

Soluție $\sum \frac{1+\sqrt{n}}{2n+3}$ este divergentă deci integrala este divergentă

Exercițiu. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2} dx$

Soluție. Considerăm $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2+2}\right| dx$, $\sum \left|\frac{\sin n}{n^2+2}\right| < \infty$ deci integrala este absolut convergentă deci convergentă