Cinematica fluidelor

Se ocupă cu studiul mişcării fluidelor fără a ține seama de forțele şi transformările energetice care apar. Se intenționează determinarea componentelor vitezei vectoriale $\overline{v}$ şi ale accelerației vectoriale precum şi traiectoriile parcurse de particulele fluide.

Mişcarea se caracterizează sintetic prin spectrul hidrodinamic sau aerodinamic.

Se consideră că mărimile sunt funcții continue şi derivabile în timp şi spațiu şi se aplică elemente de teoria câmpului. Formulele sunt valabile atât pentru fluidele ideale cât şi pentru fluidele reale.

Metode de studiu în cinematică

1.Metoda Lagrange

În metoda Lagrange se urmăreşte fiecare particulă pe traseul străbătut de aceasta, iar mişcarea întregului fluid este caracterizată prin ansamblul traiectoriilor parcurse de particulele fluide.

Pentru o particulă, traiectoria este caracterizată de:

$$\begin{cases} X = X(X_0, Y_0, Z_0, t) \\ Y = Y(X_0, Y_0, Z_0, t) \\ Z = Z(X_0, Y_0, Z_0, t) \end{cases}$$

, în care X_0, Y_0 si Z_0 sunt coordonatele inițiale ale particulei la momentul t_0 iar t este variabila temporală.

Considerăm că fluidul este format din N particule deci un ansamblu de N ecuații de acest tip caracterizează mişcarea fluidului.

Din ecuațiile traiectoriilor se deduc componentele vitezei vectoriale

$$\overline{v} = \overline{v}(u, v, w)$$

Componentele de viteză după cele trei direcții ale sistemului de axe triortogonal sunt:

$$u = \frac{\partial X}{\partial t},\ v = \frac{\partial Y}{\partial t},\ w = \frac{\partial Z}{\partial t}$$

Componentele accelerației vectoriale $\overline{a} = \overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ sunt:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} \\ a_y = \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \\ a_z = \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2} \end{cases}$$

2.Metoda Euler

În cadrul acestei metode se determină componentele de viteză în puncte fixe din spaţiu în care se pot plasa aparate de măsură.

u, v, w sunt funcţii de 4 variabile, trei spaţiale şi una temporală:

$$\begin{cases} u = u(X, Y, Z, t) \\ v = v(X, Y, Z, t) \\ w = w(X, Y.Z, t) \end{cases}$$

Din componentele de viteză se deduc traiectoriile din următoarele ecuaţii:

$$u = \frac{dX}{dt},\ v = \frac{dY}{dt},\ w = \frac{dZ}{dt}$$

Componentele acceleraţiei se deduc derivând componentele de viteză:

$$a_x = \frac{du}{dt},\ a_y = \frac{dv}{dt},\ a_z = \frac{dw}{dt}$$

Pentru a efectua derivatele totale ale componentelor de viteză de calculează mai întâi diferenţialele acestora:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial X} dX + \frac{\partial u}{\partial Y} dY + \frac{\partial u}{\partial Z} dZ$$

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{dY}{dt} + \frac{\partial u}{\partial Z}\frac{dZ}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a_x = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial t} + w\dfrac{\partial u}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial t} + w\dfrac{\partial v}{\partial t} \\ a_z = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial t} + v\dfrac{\partial w}{\partial t} + w\dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases}$$

Calculul accelerației vectoriale

Se înmulțesc componentele a_x, a_y, a_z cu versorii $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ şi se adună:

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial t}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial t}\overline{i} + \right) + u\left(\frac{\partial u}{\partial X}\overline{i} + \frac{\partial v}{\partial X}\overline{j} + \frac{\partial w}{\partial X}\overline{k} \right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\overline{i} + \frac{\partial v}{\partial Y}\overline{j} + \frac{\partial w}{\partial Y}\overline{k} \right) +$$

$$+ w\left(\frac{\partial u}{\partial Z}\overline{i} + \frac{\partial v}{\partial Z}\overline{j} + \frac{\partial w}{\partial Z}\overline{k} \right)$$

$$\overline{a} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \overline{v}}{\partial X} + v\frac{\partial \overline{v}}{\partial Y} + w\frac{\partial \overline{v}}{\partial Z}$$

$$\overline{a} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial X}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial Y}\frac{dY}{dt} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial Z}\frac{dZ}{dt} = \frac{d\overline{v}}{dt} \qquad \overline{v} = \overline{v}(X, Y, Z, t)$$

Primul termen din accelerația vectorială, $\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}$, apare în cazul unei mişcări nepermanente şi reprezintă variația vitezei vectoriale în timp în anumite puncte fixe din spațiu iar următorii 3 termeni reprezintă variația vitezei vectoriale la deplasarea în spațiu.

Primul termen reprezintă accelerația instantanee, iar ultimii 3 reprezintă accelerația convectivă.

Accelerația obținută anterior corespunde unei mişcări nepermanente şi neuniforme.

Dacă mişcarea este permanentă, atunci $\frac{d\overline{v}}{dt} = 0$

Dacă mişcarea este uniformă, atunci derivatele parțiale în raport cu una sau mai multe variabile spațiale sunt nule.

Mişcarea cea mai simplă, permanentă şi uniformă corespunde la a=0.

Noțiuni generale de cinematică

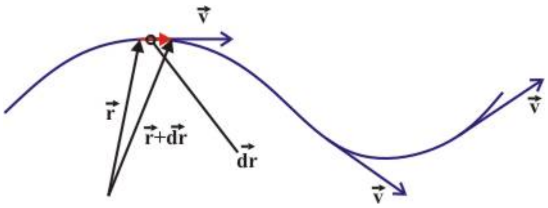
Curentul de fluid reprezintă o masă de fluid aflată în mişcare.

Linia de curent reprezintă înfăşurătoarea vectorilor viteză care se găsesc la un moment dat cu originea pe curba respectivă .

Altfel spus, linia de curent este curba la care vectorii viteză corespunzători particulelor fluide sunt tangenți la curbă în punctele în care se găsesc particulele respective.

Ecuația liniilor de curent

Considerând că vectorul de viteza $\bar{v}$ este paralel cu diferențiala vectorului de poziție se obțin :



$$\bar{v} \parallel dr$$

$$\bar{v}(u, v, w)$$

$$\overline{dr}(dX, dY, dZ)$$

$$\frac{dX}{u} = \frac{dY}{v} = \frac{dZ}{w}$$ - ecuațiile linilor de curent.

Doua linii de curent nu se intersectează niciodată. Daca s-ar intersecta, în punctul respectiv particula fluidă ar avea două viteze, fiecare viteză tangentă la linia de curent corespunzătoare, ceea ce este fals.

Liniile de curent umplu complet spațiul în care evoluează fluidul.

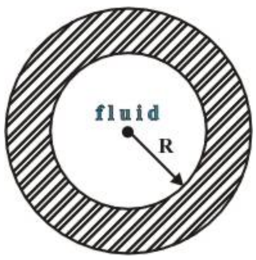
Traiectoria reprezintă drumul parcurs de particula fluidă în mişcare.

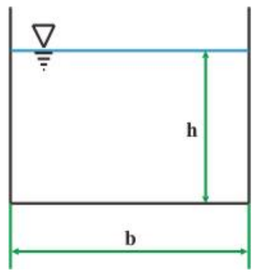
Ecuațiile traiectoriei se deduc plecând de la:

$$\overline{dr} = \bar{v}(\bar{r}, t)dt \Rightarrow \frac{\overline{dr}}{\bar{v}} = dt$$

În mişcarea permanentă traiectoria coincide cu linia de curent.

Secțiunea vie reprezintă secțiunea străbătută de particulele de fluid în mişcare, perpendiculară pe liniile de curent corespunzătoare.





$$A = \pi R^2 \qquad\qquad A = bh$$

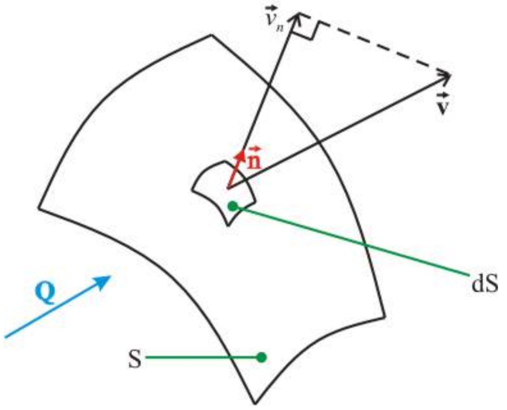
Perimetrul udat reprezintă lungimea conturului solid cu care fluidul se găseşte în contact în cadrul secțiunii vii.

$$P = 2\pi R \qquad\qquad P = b + 2h$$

Raza hidraulică este raportul dintre secțiunea vie şi perimetrul udat.

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2} \qquad\qquad R_h = \frac{bh}{2h + b}$$

Debitul volumic (Q) reprezintă fluxul vectorului viteză printr-o suprafață curbă deschisă.



$$Q=\int \bar{v}\bar{n}dS$$

$$Q=\int_S v_n dS$$, unde

$$\bar{v}\bar{n}=vn\cos\alpha=v_n$$

Dacă viteza este constantă în orice punct al suprafeței S, atunci:

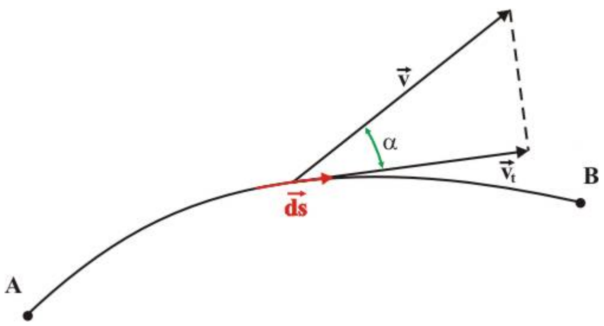
$$Q=v_nS \Rightarrow Q=vS$$

În cazul unui circuit deschis debitul volumic se poate determina ca raportul dintre volumul de lichid scurs și timpul corespunzător.

$$Q=\frac{V}{t}\left[\frac{m^3}{s}\right],\left[\frac{l}{s}\right] \qquad Q_m=\frac{m}{t}\left[\frac{kg}{s}\right]$$ ⟶ debitul masic

$$Q_G=\frac{G}{t}\left[\frac{N}{s}\right]$$ ⟶ debitul de greutate

Circulația vitezei de-a lungul unei curbe deschise AB este:



$$\Gamma=\int_A^B \bar{v}\bar{ds}=\int_A^B v_t ds$$

Vârtejul este dat de:

$$\bar{\omega}=\frac{1}{2}rot\bar{v}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

În legătură cu vârtejul se poate enunța teorema lui Helmholtz:
Fluxul vectorului vârtej printr-o suprafață curbă închisă este constant.

$$\int_S \bar{\omega}ndS=ct$$

$\omega dS=ct$ pentru o suprafață foarte mică

Un vârtej nu se poate închide în interiorul fluidului.

Daca s-ar închide în interiorul fluidului $dS \rightarrow 0 \Rightarrow \omega \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \bar{v} \rightarrow \infty$, ceea ce este practic imposibil.

Un vârtej se închide pe o suprafață solidă cu care se învecinează un fluid sau se închide în el însuşi (vârtejuri toroidale).

Din punct de vedere practic este bine ca în situația în care te prinde un vârtej dintr-un râu, să încerci să ieşi cât mai repede din el.

În caz contrar vârtejul te învârteşte din ce în ce mai repede şi te trage la o adâncime din ce în ce mai mare.

În cazul tornadelor produse în atmosferă viteza maximă a vârtejului apare din păcate tocmai la nivelul solului, deoarece pe sol se închide vârtejul respectiv şi din această cauză tocmai la acest nivel forța distrugătoare este maximă.