CUPRINS

PREFAȚĂ

Începuturile geometriei diferențiale se găsesc în lucrările lui Leibniz (1646-1716) şi sunt indisolubil legate de începuturile analizei matematice.

Teoria curbelor plane a fost elaborată în a doua jumătate a secolului al XVII-lea şi în prima jumătate a secolului al XVIII-lea. L. Euler (1707-1783) a studiat curburile secțiunilor normale ale suprafețelor, a dat definiția direcțiilor principale şi a curburii unei suprafețe, proprietățile suprafețelor desfăşurabile şi unele proprietăți ale curbelor în spațiu.

A doua etapă în dezvoltarea geometriei diferențiale a fost inaugurată de G. Monge, care în lucrarea „Application de l'analyse a la geometrie", publicată în 1795, construieşte teoria curbelor în spațiu. S-a ocupat, de asemenea, cu studiul generării suprafețelor prin curbe.

A treia etapă în dezvoltarea geometriei diferențiale o inaugurează K. Gauss (1777-1855), care s-a ocupat de teoria suprafețelor, pornind de la geodezie.

Contribuții la dezvoltarea acestei teorii au avut de asemenea: J. Schouten, G. Darboux, E.J. Cartan, G. Fubini, I.N. Lobacevski, I. Bolyai, E. Beltrami, F. Klein, H. Poincaré, B. Riemann şi alții.

Prima lucrare de geometrie diferențială din țara noastră este scrisă de E. Bacaloglu, care în 1859 a considerat o altă curbură a unei suprafețe pe lângă curbura totală şi medie.

Primul geometru român, ale cărui lucrări de geometrie diferențială s-au impus atenției matematicienilor din întreaga lume, este Gh. Țițeica (1873-1939). Deoarece el a introdus şi studiat o clasă de curbe şi una de suprafețe, care astăzi îi poartă numele, el este considerat unul dintre creatorii geometriei centro-afine.

Contribuții importante la dezvoltarea geometriei diferențiale proiective şi afine a curbelor şi a suprafețelor au adus şi: acad. Al. Myller şi acad. O. Mayer.

Un alt geometru roman, Al. Pantazi (1896-1948), format în şcoala geometrului francez E.J. Cartan, a adus prin lucrările sale contribuții importante în domeniul geometriei diferențiale proiective a curbelor şi a suprafețelor.

Un loc proeminent între geometrii români, îl ocupă acad. G. Vrânceanu, creator al teoriei spațiilor neolonome şi al unei teorii unitare relativiste, care a adus contribuții importante în aproape toate ramurile geometriei diferențiale moderne.

În cartea de față sunt prezentate, pe parcursul a trei capitole, rezultate clasice din geometria diferențială: a curbelor plane, a curbelor în spațiu şi a suprafețelor.

Capitolul 1, intitulat: ***Elemente de geometrie diferențială a curbelor plane***, are în vedere, pe parcursul a şaisprezece paragrafe, studiul noțiunilor de: tangentă şi normală la o curbă plană, subtangentă, subnormală, segment tangentă şi segment normală, lungime a unui arc de curbă plană, element de arc, curbură şi rază de curbură, contact între două curbe plane, cerc osculator, puncte multiple ale unei curbe plane, înfăşurătoare a unei familii de curbe plane, evolută şi evolventă. De asemenea, pe câteva curbe plane, des utilizate în tehnică, este exemplificată reprezentarea analitică a curbelor plane.

Capitolul 2, intitulat: ***Elemente de geometrie diferențială a curbelor în spațiu***, este dedicat studierii, pe parcursul a şaptesprezece paragrafe, a noțiunilor de: tangentă, plan normal, plan osculator, normală principală, binormală, plan rectificant, triedru Frenet, indicatoare sferică, curbură, torsiune, formule ale lui Frenet cu aplicații, curbă aproximantă, contact între două curbe în spațiu, contact între o curbă şi o suprafață, sferă osculatoare. Sunt de asemenea prezentate câteva clase remarcabile de curbe în spațiu.

Capitolul 3, intitulat: ***Elemente de geometrie diferențială a suprafețelor***, conține paisprezece paragrafe, în care se realizează studiul noțiunilor de: curbă trasată pe suprafață, curbe coordonate, plan tangent, normală, prima formă fundamentală cu aplicațiile sale, a doua formă fundamentală, secțiune normală, curburi normale şi tangențiale, curburi principale, direcții principale, curbură totală şi medie, linii asimptotice, linii de curbură, linii geodezice, invarianți pe suprafață. Sunt de asemenea prezentate câteva clase remarcabile de suprafețe.

Realizată pe o structură de curs universitar, conținând partea teoretică a problematicii abordate, cartea de față cuprinde şi un bogat material exemplificativ şi în acelaşi timp, propune o serie de probleme spre rezolvare, ce permit cititorului să verifice singur calitatea însuşirii cunoştințelor studiate. Paragrafele teoretice sunt susținute de probleme rezolvate, care dau posibilitatea aprofundării noțiunilor cuprinse în paragraful respectiv.

Această carte a fost scrisă, astfel ca limbajul, noțiunile teoretice şi succesiunea lor să fie în concordanță cu programele analitice în vigoare.

Lucrarea de față se adresează studenților care urmează cursul de geometrie diferențială clasică dar şi fizicienilor şi inginerilor care folosesc metodele geometriei în studiile lor.

În acelaşi timp, cartea este utilă tuturor acelora care vor să se inițieze în acest important domeniu al matematicii.

23 aprilie, 2003 Autorul

Capitolul 1

ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ A CURBELOR PLANE

§1.1. Reprezentarea analitică a curbelor plane

Fie (π) planul (xOy) în care s-a fixat un sistem de coordonate carteziene x, y.

Definiția 1.1. Se numeşte ***arc simplu*** de curbă plană, o mulțime (Γ) de puncte M din plan ale căror coordonate carteziene x, y în raport cu reperul ortonormat $\mathscr{R} = \{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ al lui $\mathbb{R}^2$ şi vectori de poziție $\bar{r}$ satisfac una din următoarele relații:

$$(\Gamma):\ F(x, y) = 0,\ (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

$$(\Gamma):\ y = f(x),\ x \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$(\Gamma):\ \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

unde funcțiile $F, f, x, y, \bar{r}$ satisfac condițiile:

i) sunt reale, uniforme şi continue;

ii) funcțiile x şi y stabilesc o corespondență biunivocă şi bicontinuă între punctele M $\in$ (Γ) şi mulțimea valorilor parametrului real t $(t \in (t_1, t_2))$;

iii) admit derivate de ordinul întâi continue.

Relațiile (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) se numesc respectiv ***reprezentarea analitică implicită*** sau ***ecuația implicită*** a arcului simplu de curbă plană (Γ), ***reprezentarea analitică explicită*** sau ***ecuația explicită*** a arcului simplu de curbă plană (Γ), ***reprezentarea analitică parametrică*** sau ***ecuațiile parametrice*** ale arcului simplu de curbă plană (Γ) şi ***reprezentarea vectorială*** sau ***ecuația vectorială*** a arcului simplu de curbă plană (Γ).

Definiția 1.2. 1° Se numeşte ***arc regulat*** de curbă plană, mulțimea (Γ) a punctelor M din $\mathbb{R}^2$, ale căror coordonate carteziene x, y în raport cu reperul ortonormat $\mathscr{R} = \{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ al lui

$\mathbb{R}^2$ şi vectori de poziție $\bar{r}$ satisfac ecuația (1.1), sau ecuația (1.2), sau sistemul (1.3), sau ecuația (1.4), unde funcțiile F, f, x, y, $\dot{\bar{r}}$ îndeplinesc condițiile numite ***de regularitate***:

i) sunt reale, uniforme şi continue;

ii) funcțiile x şi y stabilesc o corespondență biunivocă şi bicontinuă între punctele M $\in$ (Γ) şi mulțimea valorilor parametrului real t $\left(t \in (t_1, t_2)\right)$;

iii) admit derivate de ordinul întâi continue;

iv) în intervalele considerate sunt îndeplinite relațiile:

$$(F'_x)^2 + (F'_y)^2 \neq 0, \quad \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0, \quad \left\|\dot{\bar{r}}(t)\right\| \neq 0,$$

unde:

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F'_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t), \quad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}(t), \quad \dot{\bar{r}}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt}(t).$$

2° Se numeşte ***arc regulat de ordinul n***, sau ***clasă n*** un arc regulat de curbă plană (Γ), pentru care funcțiile F, f, x, y, $\dot{\bar{r}}$ admit derivate (parțiale, respectiv ordinare) continue până la şi inclusiv ordinul n > 1, astfel încât nu toate derivatele de acelaşi ordin să se anuleze.

3° Se numeşte ***curbă regulată de ordinul n***, sau ***curbă de clasă n***, pe scurt: ***curbă***, o reuniune de arce regulate de ordinul n, care au extremitățile, eventual, puncte singulare (în sensul definiției 1.3), adică:

$$(\Gamma) = \bigcup_{i \in I} \left(\Gamma_i\right).$$

Definiția 1.3. 1° Se numeşte ***punct singular*** al unei curbe plane, punctul în care nu este îndeplinită cel puțin una din condițiile de regularitate.

2° Se numeşte ***punct ordinar*** al unei curbe plane, punctul în care sunt îndeplinite toate condițiile de regularitate.

§1.2. Stabilirea ecuațiilor unor curbe plane

Pentru a studia curbele plane este nevoie de ecuațiile lor, adică de reprezentările lor analitice. Se pot studia curbele plane în două moduri:

- fie se pleacă de la o reprezentare analitică, adică de la ecuația sau ecuațiile curbei;
- fie se stabileşte ecuația curbei, prin determinarea ei ca loc geometric, adică se pleacă de la o anumită proprietate a ei.

În cele ce urmează se vor stabili ecuațiile câtorva curbe plane.

1.2.1. Cisoida lui Diocles

Se consideră un cerc de rază dată a şi o tangentă într-un punct A fixat pe cerc. O secantă oarecare, dusă prin punctul O, diametral opus lui A, taie cercul în C şi tangenta în B (fig. 1.1).

Definiția 1.4. Locul geometric al punctului P care are proprietatea:

$$B\,P = O\,C$$

este curba care poartă numele de ***cisoida lui Diocles***.

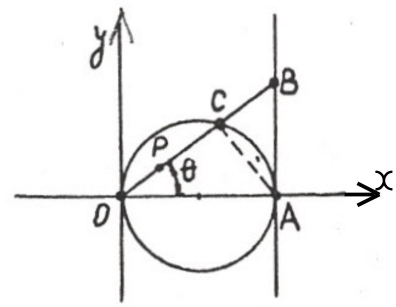


Fig. 1.1.

Pentru a determina ecuația locului geometric, se consideră punctul O originea reperului, axa Ox dreapta (OA) şi axa Oy perpendiculara în O pe OA (fig. 1.1).

Fie θ unghiul variabil format de secantă cu axa Ox şi ρ lungimea segmentului OP.

Coordonatele x, y ale punctului P sunt:

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta.$$

Deoarece ρ variază cu θ, trebuie exprimat ρ în funcție de θ şi în acest scop se obține:

$$\rho = OP = OB - BP = OB - OC = \frac{2\,a}{\cos\theta} - 2\,a\cos\theta,$$

cum rezultă din triunghiurile dreptunghice OAB şi OCA.

Deci:

$$(\Gamma):\ \ \rho = 2\,a\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

relație care reprezintă ***ecuația cisoidei în coordonate polare***, sau ***reprezentarea polară a cisoidei***.

Prin introducerea valorii lui ρ în expresiile pentru x şi y, se obține:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x = 2\,a\sin^2\theta, \\ y = 2\,a\,\dfrac{\sin^3\theta}{\cos\theta}, \end{cases}$$

relații ce exprimă ***reprezentarea parametrică a cisoidei***.

Prin eliminarea între cele două ecuații a parametrului θ, se obține:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta, \qquad \sin^2\theta = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{y^2}{x^2+y^2},$$

deci:

$$x = 2\,a\,\frac{y^2}{x^2+y^2},$$

sau:

$$(\Gamma):\ x^3 + xy^2 - 2\,ay^2 = 0,$$

relație care constituie ***reprezentarea implicită a cisoidei***.

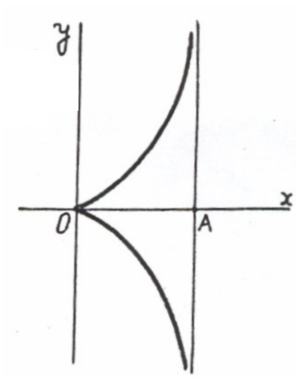


Fig. 1.2.

Din ultima ecuație se obține ***reprezentarea explicită a cisoidei***:

$$(\Gamma): \quad y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2a - x}}\,.$$

Cisoida lui Diocles este reprezentată grafic în fig. 1.2.

1.2.2. Cicloida

Definiția 1.5. ***Cicloida*** este curba plană descrisă de un punct fix de pe un cerc, care rulează, fără să alunece, pe o dreaptă fixă.

Fie O un punct fix al unui cerc de rază a, tangent în O la dreapta (d).

Pentru a determina ecuația cicloidei se consideră punctul fix O drept origine a reperului, dreapta tangentă (d), drept axă Ox şi axa Oy perpendiculară în O pe (d) (fig. 1.3).

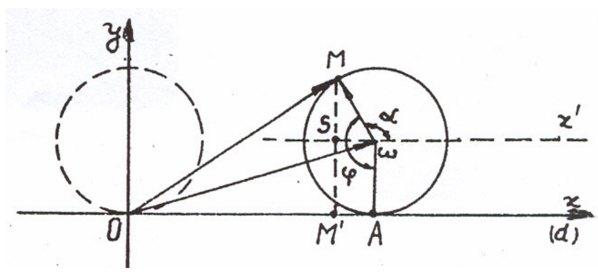


Fig. 1.3.

Când cercul rulează din poziția O până în poziția A, punctul care a fost în O a ajuns în M. Se obține:

$$OA = \overset{\frown}{AM} = a\,\varphi,$$

unde φ este unghiul de rulare.

În triunghiul OωM se obține:

$$\overline{OM} = \overline{O\omega} + \overline{\omega M}\,.$$

Dacă se proiectează pe axa Ox, respectiv pe axa Oy, ultima egalitate şi se notează cu x, y coordonatele carteziene ale lui M rezultă:

$$x = pr_{Ox}\,\overline{O\omega} + pr_{Ox}\,\overline{\omega M}, \qquad y = pr_{Oy}\,\overline{O\omega} + pr_{Oy}\,\overline{\omega M}.$$

Dar:

$$pr_{Ox}\,\overline{O\omega} = OA = a\,\varphi, \qquad pr_{Oy}\,\overline{O\omega} = A\,\omega = a, \qquad \alpha + \varphi = 270°,$$

$$pr_{Ox}\,\overline{\omega M} = \overline{\omega M}\cdot\bar{i} = -AM' = -\omega S = -a\cos(180^0 - \alpha) = a\cos\alpha =$$
$$= a\cos(270^0 - \varphi) = -a\sin\varphi,$$

$$pr_{Oy}\,\overline{\omega M} = \overline{\omega M}\cdot\bar{j} = SM = a\sin(180^0 - \alpha) = a\sin\alpha = a\sin(270^0 - \varphi) = -a\cos\varphi,$$

de unde:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = a\,\varphi - a\sin\varphi, \\ y = a - a\cos\varphi, \end{cases}$$

sau:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = a\,(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a\,(1 - \cos\varphi), \end{cases}$$

care constituie ***reprezentarea parametrică a cicloidei***.

Eliminarea parametrului φ între cele două ecuații parametrice conduce la ecuația:

$$(\Gamma): \quad x = \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2\,ay - y^2},$$

care constituie ***reprezentarea explicită a cicloidei*** şi care în general nu este utilizată.

Cicloida este reprezentată grafic în fig. 1.4.

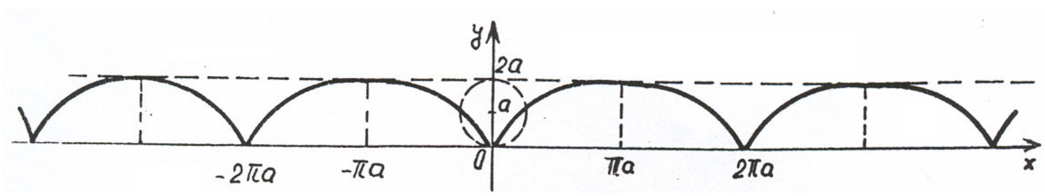


Fig. 1.4.

1.2.3. Epicicloida. Cardioida

Definiția 1.6. ***Epicicloida*** este curba descrisă de un punct de pe un cerc care rulează, fără să alunece, pe un alt cerc exterior fix.

Fie cercul cu centrul în O' de rază b care rulează pe cercul fix cu centrul în O şi de rază a.

Se alege reperul xOy cu originea în centrul O, iar axele, doi diametri perpendiculari, astfel încât axa Ox să treacă prin punctul A, punct inițial de contact între cercurile considerate.

Se consideră rularea cercului O' din poziția A într-o poziție arbitrară, cu N punct de contact.

Punctul A va trece în punctul M (fig. 1.5).

Se notează:

$$\varphi = \widehat{NOx}, \qquad \varphi' = \widehat{NO'M},$$

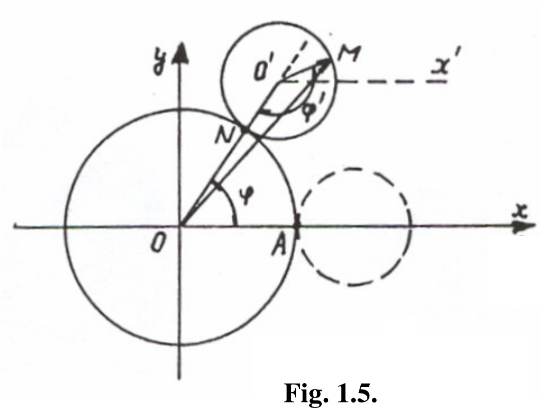


Fig. 1.5.

are loc:

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NM},$$

adică:

$$a\,\varphi = b\,\varphi',$$

de unde:

$$\varphi' = \frac{a}{b}\varphi$$

şi deci:

$$\varphi + \varphi' = \frac{a+b}{b}\varphi,$$

relație care se va utiliza în cele ce urmează.

Din triunghiul OMO' rezultă relația:

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}\ ,$$

care, prin proiectare pe axele de coordonate, unde x, y sunt coordonatele carteziene ale punctului M al epicicloidei, conduce la:

$$x = pr_{Ox}\,\overline{OO'} + pr_{Ox}\,\overline{O'M}, \qquad y = pr_{Oy}\,\overline{OO'} + pr_{Oy}\,\overline{O'M}.$$

Dar:

$$pr_{Ox}\,\overline{OO'} = \overline{OO'}\cdot\bar{i} = (a+b)\cos\varphi, \qquad pr_{Oy}\,\overline{OO'} = (a+b)\sin\varphi,$$

$$pr_{Ox}\,\overline{O'M} = pr_{O'x'}\,\overline{O'M} = b\cos(\widehat{MO'x'}) = b\cos(\varphi + \varphi' - 180°) =$$

$$= -b\cos(\varphi + \varphi') = -b\cos\frac{a+b}{b}\varphi,$$

$$pr_{Oy}\,\overline{O'M} = b\sin(\widehat{MO'x'}) = b\sin(\varphi + \varphi' - 180°) = -b\sin(\varphi + \varphi') =$$

$$= -b\sin\frac{a+b}{b}\varphi.$$

Deoarece:

$$\widehat{MO'N} = \widehat{MO'x'} + \widehat{x'O'N},$$

adică:

$$\varphi' = \widehat{MO'x'} + 180° - \varphi,$$

rezultă:

$$\widehat{MO'x'} = \varphi' + \varphi - 180°,$$

relație ce a fost folosită.

În acest fel se obține ***reprezentarea parametrică a epicicloidei*** sub forma:

$$(\Gamma):\begin{cases} x=(a+b)\cos\varphi-b\cos\dfrac{a+b}{b}\varphi, \\ y=(a+b)\sin\varphi-b\sin\dfrac{a+b}{b}\varphi. \end{cases}$$

Definiția 1.7. ***Cardioida*** este epicicloida în care cele două cercuri, cel fix şi cel mobil, au raze egale.

Dacă se consideră a = b în reprezentarea parametrică a epicicloidei, se obține ***reprezentarea parametrică a cardioidei****:*

$$(\Gamma):\begin{cases} x=a\,(2\cos\varphi-\cos 2\varphi), \\ y=a\,(2\sin\varphi-\sin 2\varphi), \end{cases}$$

reprezentată grafic în fig. 1.6.

Este interesant de determinat ecuația cardioidei în coordonate polare.

În acest scop este avantajos a se translata reperul xOy în punctul A. Rezultă schimbarea numai a abscisei x, care devine x + a. În acest reper rezultă deci:

$$(\Gamma):\begin{cases} x=a\,(2\cos\varphi-\cos 2\varphi-1), \\ y=a\,(2\sin\varphi-\sin 2\varphi), \end{cases}$$

sau:

$$(\Gamma):\begin{cases} x=2a\cos\varphi\,(1-\cos\varphi), \\ y=2a\sin\varphi\,(1-\cos\varphi). \end{cases}$$

Prin eliminarea, între cele două ecuații, a parametrului φ, se obține:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x} \quad \text{şi} \quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

deci:

$$x=2a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

adică:

$$(\Gamma):\ x^2+y^2=2a\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right),$$

sau:

$$(\Gamma):\ (x^2+y^2-2ax)^2-4a^2(x^2+y^2)=0.$$

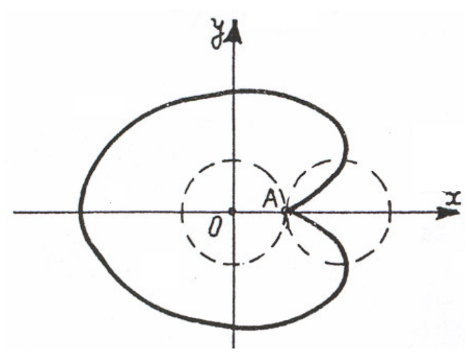


Fig. 1.6.

Ultimele două ecuații, constituie ***reprezentarea implicită*** (irațională, respectiv rațională) ***a cardioidei***.

Prin substituirea formulelor $x = \rho\cos\theta$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, se obține ***ecuația cardioidei în coordonate polare***, sau ***reprezentarea polară a cardioidei***:

$$(\Gamma):\ \rho = 2a\,(1-\cos\theta),$$

reperul polar are drept pol, punctul de contact al cercurilor, iar drept axă polară, linia centrelor celor două cercuri.

1.2.4. Hipocicloida. Astroida

Definiția 1.8. ***Hipocicloida*** este curba descrisă de un punct de pe un cerc care rulează, fără să alunece, pe un alt cerc fix, cercurile fiind interioare.

Se alege reperul xOy, format din doi diametri perpendiculari ai cercului fix de centru O, astfel încât axa Ox să treacă prin punctul A, punct inițial de contact între cercurile considerate.

Se consideră rularea cercului de centru O' din poziția A într-o poziție arbitrară, cu N punct de contact între cercul fix şi cercul mobil. Punctul A va trece în punctul M (fig. 1.7).

Se notează:

$$\varphi = \widehat{NOx},\ \ \varphi' = \widehat{MO'N}$$

(în sens trigonometric), şi se obține:

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{MN},$$

(în sens trigonometric), adică:

$$a\varphi = b\varphi',$$

de unde:

$$\varphi' = \frac{a}{b}\varphi$$

şi deci:

$$\varphi' - \varphi = \frac{a-b}{b}\varphi,$$

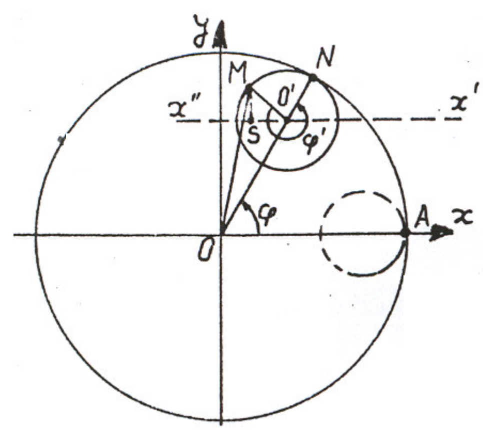


Fig. 1.7.

relație care se va utiliza în cele ce urmează.

Din triunghiul OO'M se obține:

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}\ ,$$

din care rezultă:

$$x = pr_{Ox}\,\overline{OO'} + pr_{Ox}\,\overline{O'M}, \qquad y = pr_{Oy}\,\overline{OO'} + pr_{Oy}\,\overline{O'M}.$$

Dar:

$$pr_{Ox}\,\overline{OO'} = \overline{OO'}\cdot\bar{i} = (a-b)\cos\varphi \qquad pr_{Oy}\,\overline{OO'} = (a-b)\sin\varphi,$$

$$pr_{Ox}\,\overline{O'M} = \overline{O'M}\cdot\bar{i} = -O'S = -b\cos(\widehat{MO'x''}) = -b\cos(\varphi' - \varphi - 180°) =$$

$$= b\cos(\varphi' - \varphi) = b\cos\frac{a-b}{b}\varphi,$$

$$\mathrm{pr}_{Oy}\,\overline{O'M} = \overline{O'M}\cdot\bar{j} = SM = b\sin(\widehat{MO'x''}) = b\sin(\varphi' - \varphi - 180°) =$$

$$= -b\sin(\varphi' - \varphi) = -b\sin\frac{a-b}{b}\varphi.$$

Deoarece:

$$\widehat{MO'x''} + \widehat{x''O'O} + 180° = \widehat{MO'N},$$

(în sens trigonometric) adică:

$$\widehat{MO'x''} + \varphi + 180° = \varphi',$$

de unde:

$$\widehat{MO'x''} = \varphi' - \varphi - 180°,$$

relație ce a fost folosită.

În acest mod s-a obținut ***reprezentarea parametrică a hipocicloidei*** de forma:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x = (a-b)\cos\varphi + b\cos\dfrac{a-b}{b}\varphi, \\ y = (a-b)\sin\varphi - b\sin\dfrac{a-b}{b}\varphi. \end{cases}$$

Definiția 1.9. ***Astroida*** este hipocicloida care are patru ramuri simetrice.

În acest caz, raza b a cercului mobil trebuie să fie a patra parte din raza cercului fix, pentru ca el să se aștearnă într-o rulare completă pe un sfert de cerc fig. 1.8.

Dacă se consideră a = 4 b în ecuațiile parametrice ale hipocicloidei, se obțin ecuațiile:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x = b\,(3\cos\varphi + \cos 3\varphi), \\ y = b\,(3\sin\varphi - \sin 3\varphi), \end{cases}$$

care constituie ***reprezentarea parametrică a astroidei*** şi care se mai poate scrie şi sub forma:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x = 4\,b\cos^3\varphi, \\ y = 4\,b\sin^3\varphi. \end{cases}$$

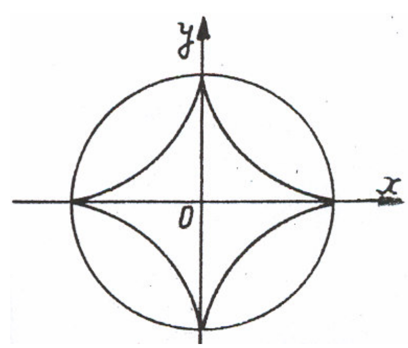


Fig. 1.8.

Prin eliminarea parametrului φ între cele două ecuații, se obține ***reprezentarea implicită a astroidei***:

$$(\Gamma):\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Se vor da în continuare câteva exemple de ***curbe plane în reprezentarea polară***:

$$\rho = \rho(\theta).$$

1.2.5. Ecuația unei drepte în coordonate polare

Fie OP = p, distanța de la originea O a reperului xOy la dreapta (d), α unghiul de înclinare al dreptei (d) față de Ox şi ρ, θ coordonatele polare ale unui punct $M \in$ (d) (fig. 1.9).

Se obține:

$$OP = OM \sin \varphi,$$

şi deoarece $\varphi = \alpha - \theta$, rezultă din ultima egalitate relația:

$$p = \rho \sin (\alpha - \theta),$$

adică ***ecuația dreptei în coordonate polare***, sau ***reprezentarea polară*** a dreptei, sub forma:

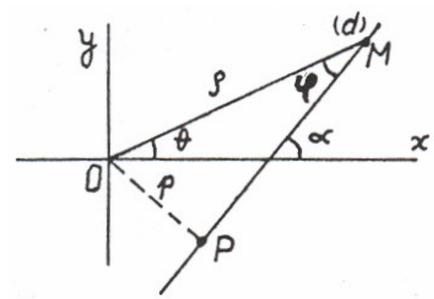


Fig. 1.9.

$$(d): \ \rho = \frac{p}{\sin (\alpha - \theta)}, \quad (\alpha = \text{arctg } m, \ \ m = \text{panta dreptei}).$$

1.2.6. Spirale

1.2.6.1. Spirala lui Arhimede

Definiția 1.10. ***Spirala lui Arhimede*** ia naştere prin deplasarea unui punct cu o mişcare uniformă pe o semidreaptă, în timp ce semidreapta se roteşte în jurul unei extremități fixe cu o viteză unghiulară constantă.

Se consideră semidreapta OD care se roteşte cu viteză unghiulară constantă ω în jurul punctului O. Punctul M parcurge dreapta cu o viteză constantă (fig. 1.10).

Se notează:

$$OM = \rho, \ \widehat{xOD} = \theta \ \text{ şi cu } t, \text{ timpul}.$$

Se obține:

$$\rho = vt, \ \theta = \omega t,$$

de unde:

$$\rho = \frac{v}{\omega}\theta,$$

adică:

$$(\Gamma): \ \rho = k \cdot \theta,$$

care constituie ***ecuația spiralei lui Arhimede în coordonate polare***, sau ***reprezentarea polară a spiralei lui Arhimede*** (fig. 1.11).

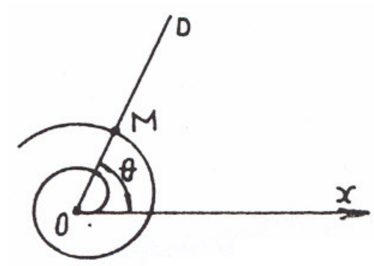


Fig. 1.10.

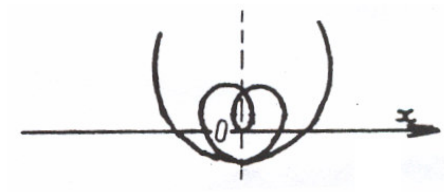
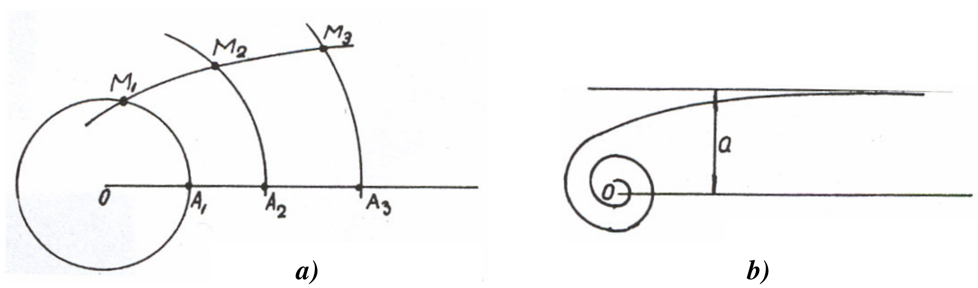


Fig. 1.11.

1.2.6.2. Spirala hiperbolică

Se construiesc în jurul polului O o serie de cercuri concentrice, care taie axa polară în punctele A_1, A_2, A_3, ... Se duc din aceste puncte pe cercurile respective arce egale, de lungime dată a. Locul geometric al extremităților acestor arce este spirala hiperbolică (fig. 1.12 *a* şi *b*).



a) ***b)***

Fig. 1.12.

Rezultă:

$$\overset{\frown}{A_1M_1} = \overset{\frown}{A_2M_2} = \overset{\frown}{A_3M_3} = ... = a,$$

sau

$$\rho_1\theta_1 = \rho_2\theta_2 = \rho_3\theta_3 = ... = a.$$

Coordonatele polare ale punctului M_i verifică deci ecuația:

$$\rho \cdot \theta = a,$$

de unde:

$$(\Gamma): \ \rho = \frac{a}{\theta},$$

este ***ecuația în coordonate polare a spiralei hiperbolice***, sau ***reprezentarea polară a spiralei hiperbolice***.

Din această ecuație rezultă că dacă $\theta \to \infty$, atunci $\rho \to 0$, adică punctul de pe curbă ajunge în pol după un număr infinit de mare de rotiri complete. Se spune că polul este ***punct asimptotic***.

Mai mult, din:

$$y = \rho \sin\theta \qquad \text{şi} \qquad \rho = \frac{a}{\theta},$$

se obține:

$$y = a\frac{\sin\theta}{\theta},$$

de unde:

$$\lim_{\theta\to 0} y = \lim_{\theta\to 0} a\frac{\sin\theta}{\theta} = a,$$

ceea ce arată că y = a este asimptotă orizontală pentru spirala hiperbolică şi motivează reprezentarea grafică a ei dată în fig. 1.12 *b*.

Spirala lui Arhimede şi spirala hiperbolică sunt cazuri particulare ale spiralelor generale de ecuație:

$$\rho = K \cdot \theta^m.$$

1.2.6.3. Spirala logaritmică

Definiția 1.11. ***Spirala logaritmică*** este curba în care argumentul θ este proporțional cu logaritmul razei vectoare (fig. 1.13), adică:

$$\theta = \frac{1}{k}\ln\rho,$$

de unde:

$$\rho = e^{K\theta}.$$

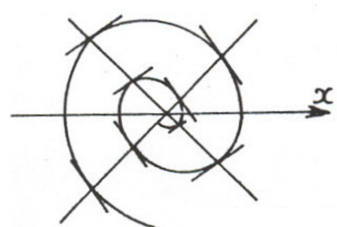


Fig. 1.13.

1.2.7. Lemniscata

Definiția 1.12. ***Lemniscata*** este locul geometric al punctelor cu proprietatea că produsul distanțelor la două puncte fixe este constant şi egal cu pătratul jumătății distanței între cele două puncte fixe.

Se consideră F_1, F_2, cele două puncte fixe, O mijlocul segmentului $[F_1F_2]$ şi M un punct oarecare al lemniscatei. Prin alegerea reperului polar cu O drept pol şi axă polară dreapta (OF_2) (fig. 1.14), se obține:

$$OM = \rho,\ \widehat{xOM} = \theta,\ OF_1 = OF_2 = a.$$

Dacă se aplică teorema cosinusului în triunghiurile OMF_1, respectiv OMF_2, rezultă relațiile:

$$MF_1^2 = \rho^2 + a^2 + 2a\rho\cos\theta; \qquad MF_2^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\theta,$$

care introduse în definiția locului geometric:

$$MF_1 \cdot MF_2 = a^2,$$

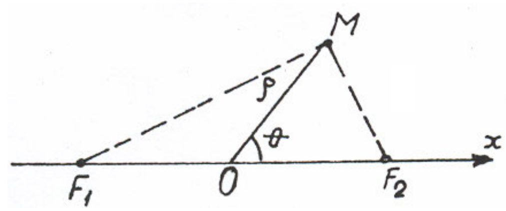


Fig. 1.14.

conduc la ecuația:

$$(\rho^2 + a^2)^2 - 4\, a^2\, \rho^2 \cos^2 \theta = a^4.$$

Ultima ecuație este echivalentă cu ecuația:

$$\rho^4 + 2\, a^2\, \rho^2 = 4\, a^2\, \rho^2 \cos^2 \theta,$$

sau cu ecuația:

$$\rho^2 = 2\, a^2\, (2 \cos^2 \theta - 1),$$

şi prin înlocuirea parantezei, se obține ***ecuația lemniscatei în coordonate polare***, sau ***reprezentarea polară a lemniscatei***, de forma:

$$(\Gamma): \ \rho^2 = 2\, a^2 \cos 2\theta.$$

Dacă se folosesc formulele $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathrm{tg}\, \theta = \dfrac{y}{x}$ se obține ecuația:

$$(\Gamma): \ (x^2 + y^2)^2 - 2\, a^2\, (x^2 - y^2) = 0,$$

adică ***reprezentarea implicită a lemniscatei***.

1.2.8. Concoide

Definiția 1.13. ***Concoida*** unei curbe dată în reprezentare polară:

$$(\Gamma): \ \rho = \rho(\theta),$$

este curba obținută din curba dată prin adăugarea unui segment constant razei vectoare. Cu alte cuvinte concoida curbei $(\Gamma): \ \rho = \rho(\theta)$ este:

$$(\Gamma'_k): \ \rho' = \rho(\theta) + k.$$

1.2.8.1. Concoida cercului

Pentru a determina ***concoida unui cerc*** de rază dată a, se scrie ecuația în coordonate polare a acestui cerc. Se consideră reperul polar cu polul O, un punct fixat pe cerc şi, axă polară, prelungirea unui diametru fixat ce trece prin O (fig. 1.15).

În triunghiul OMN se obține:

$$OM = ON \cos (180° - \theta) = -2\, a \cos \theta.$$

Se adaugă razei vectoare mărimea constantă k şi se obțin toate ***concoidele cercului*** dat, ***în reprezentare polară***:

$$(\Gamma'_k): \ \rho' = k - 2\, a \cos \theta.$$

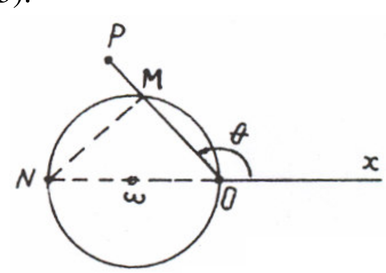


Fig. 1.15.

Dacă k = 2 a, se obține una din concoidele cercului, de ecuație:

$$(\Gamma'_{k_0}) \; : \; \rho' = 2\,a\,(1 - \cos\theta),$$

care, comparată cu ecuația cardioidei în coordonate polare, permite a afirma că această concoidă este cardioida.

1.2.8.2. Concoida unei drepte (concoida lui Nicomede)

Se consideră o dreaptă (d) perpendiculară pe axa polară, la distanța a de pol şi se urmăreşte determinarea concoidei acestei drepte.

În acest scop, dacă se foloseşte ecuația dreptei în coordonate polare din paragraful curent, cu $\alpha = 90^0$, p = a, rezultă pentru dreapta (d) reprezentarea polară:

$$(d): \; \rho = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Atunci reprezentarea polară a conoidei drepte (d) este:

$$(\Gamma'_k): \; \rho' = \frac{a}{\cos\theta} + k$$

şi reprezentarea ei grafică este dată în fig. 1.16.

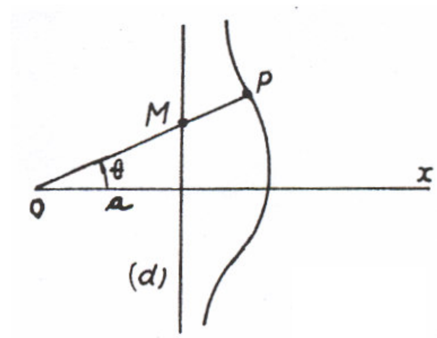


Fig. 1.16.

§1.3. Tangenta şi normala la o curbă plană într-un punct ordinar

Definiția 1.14. Se numeşte ***tangentă*** la o curbă plană (Γ) într-un punct ordinar $M_0 \in (\Gamma)$, poziția limită a dreptei secante la curbă ce trece prin M_0 şi printr-un punct $M \in (\Gamma)$ când $M \to M_0$ (fig. 1.17).

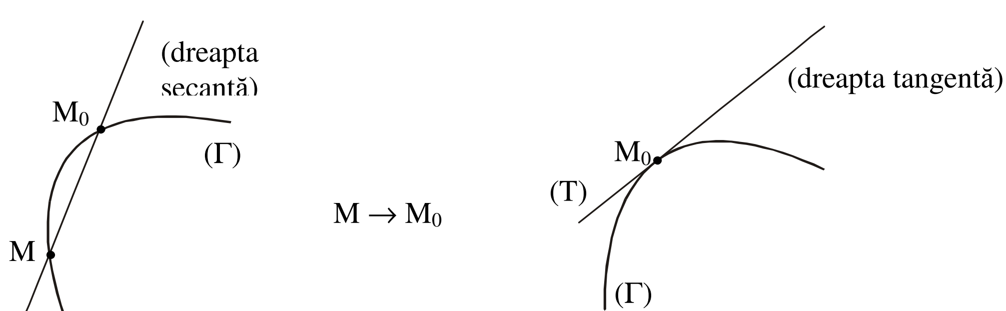


Fig. 1.17.

Se determină ecuația tangentei pentru diverse reprezentări analitice ale curbei (Γ):

1° Fie curba (Γ), dată în coordonate carteziene ortogonale prin ecuația explicită:

$$(\Gamma):\ y = f(x),\ \ x \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$$

şi fie M un punct ordinar oarecare de pe această curbă. Ecuația tangentei în M este de forma:

$$(T):\ Y - y(x) = m(X - x),$$

în care m = y'(x), conform interpretării geometrice a derivatei.

Rezultă atunci că ecuația tangentei este:

$$(T):\ Y - y(x) = y'(x)\,(X - x),$$

unde X, Y sunt coordonate curente pe dreapta tangentă.

2° Fie curba (Γ) dată prin ecuația implicită:

$$(\Gamma):\ F(x, y) = 0,\ \ (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

care defineşte pe y ca funcție implicită pe x, se obține:

$$y' = m = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

conform formulei de derivare a funcțiilor implicite. Atunci ecuația tangentei devine:

$$(T):\ Y - y = -\frac{F'_x}{F'_y}\,(X - x),$$

care se mai scrie după efectuarea calculelor:

$$(T):\ (X - x)\,F'_x + (Y - y)\,F'_y = 0.$$

3° Fie curba (Γ) dată prin ecuațiile parametrice:

$$(L):\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}. \end{cases}$$

Au loc succesiv:

$$y' = m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}, \quad \dot{x}(t) \neq 0.$$

Ecuația tangentei se scrie atunci:

$$(T):\ Y - y(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\left[X - x(t)\right],$$

sau sub forma:

$$(T):\ \frac{X-x(t)}{\dot{x}(t)}=\frac{Y-y(t)}{\dot{y}(t)}.$$

Definiția 1.15. Se numeşte ***normală*** într-un punct ordinar la o curbă plană, perpendiculara pe tangenta în acel punct la curba dată (fig. 1.18).

Corespunzător celor trei cazuri considerate în determinarea ecuației tangentei, rezultă cazurile similare în scopul determinării ecuației normalei:

1° Deoarece normala este perpendiculară pe tangentă, se obține:

$$\mu=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{y'(x)},$$

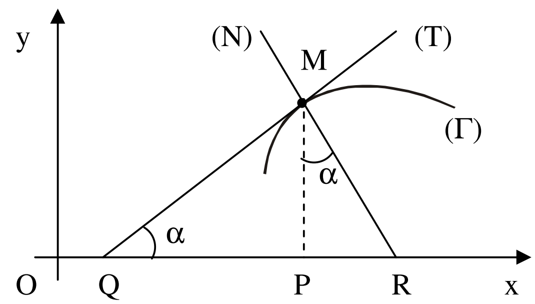


Fig. 1.18.

unde μ este panta normalei în punctul M la curba (Γ) dată de ecuația:

$$y=y(x),\ \ x\in(x_1,x_2)\subseteq\mathbb{R}.$$

Ecuația normalei este aşadar:

$$(N):\ Y-y(x)=-\frac{1}{y'(x)}(X-x),$$

unde X, Y sunt coordonate curente pe dreapta normală.

2° Dacă curba (Γ) este dată prin ecuația implicită:

$$(\Gamma):\ F(x,y)=0,\ \ (x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2,$$

se obține:

$$\mu=-\frac{1}{m}=\frac{F'_y}{F'_x}.$$

Ecuația normalei devine:

$$(N):\ Y-y=\frac{F'_y}{F'_x}(X-x),$$

care după efectuarea calculelor se mai scrie:

$$(N):\ \frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}.$$

3° Dacă curba (Γ) este dată prin ecuațiile parametrice:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases}$$

atunci se obține:

$$\mu = -\frac{1}{m} = -\frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}, \quad \dot{y}(t) \neq 0 .$$

Ecuația normalei se scrie:

$$(N):\; Y - y(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}\left[X - x(t)\right],$$

sau sub forma:

$$(N):\; \dot{x}(t)\left[X - x(t)\right] + \dot{y}(t)\left[Y - y(t)\right] = 0 .$$

Observația 1.1. Dacă se ține seama de faptul că în cazul în care m = 0 atunci dreapta este paralelă cu axa Ox, iar dacă $m = \pm\infty$ dreapta este paralelă cu axa Oy, se obține pentru $F'_x = 0$ şi $F'_y \neq 0$ că tangenta este paralelă cu Ox, iar dacă $F'_x \neq 0$ şi $F'_y = 0$ tangenta este paralelă cu Oy.

Condiția ca punctul să fie ordinar este esențială, deoarece în caz contrar ambele derivate parțiale s-ar anula şi deci nu s-ar putea preciza panta tangentei.

Exemplul 1.1. Să se scrie ecuațiile tangentelor şi normalelor în punctele indicate, la curbele:

a) $y = \ln x + 1$ în punctul de abscisă e;

b) $x = e^t \cos t,\; y = e^t \sin t$ în punctul A(1, 0);

c) $x^3 + 3x^2y - y^2 + 9 = 0$ în punctul B(0, 3).

Soluție: a) Punctul de abscisă e are ordonata y = 2, iar panta tangentei $m = y' = \frac{1}{x}$ se calculează pentru x = e. Ecuația tangentei este:

$$(T):\; y - 2 = \frac{1}{e}(x - e), \quad \text{sau} \quad (T):\; x - ey + e = 0,$$

iar a normalei:

$$(N):\; y - 2 = -e(x - e), \quad \text{sau} \quad (N):\; ex + y - 2 - e^2 = 0.$$

b) Se observă că punctul A(1, 0) corespunde bijectiv valorii $t_0 = 0$. Derivatele :

$$\dot{x}(t) = e^t(\cos t - \sin t), \quad \dot{y}(t) = e^t(\sin t + \cos t),$$

calculate în A au valorile $\dot{x}_0 = 1$ şi $\dot{y}_0 = 1$.

Panta tangentei în A este m = 1, iar ecuația tangentei în A la curba considerată este:

$$(T):\; x - y - 1 = 0.$$

Ecuația normalei se scrie:

(N) : x + y – 1 = 0.

c) Deoarece:

$$y' = -\frac{F'_x}{F_y} = -\frac{3x^2 + 6xy}{3x^2 - 2y},$$

panta tangentei în B are valoarea m = 0. Ecuația tangentei în B la curba considerată este:

(T) : y – 3 = 0,

şi a dreptei normale:

(N) : x = 0. ❒

§1.4. Subtangenta, subnormala, segmentul tangentă, segmentul normală

Definiția 1.16. 1° ***Segmentul tangentă*** într-un punct ordinar al unei curbe plane este segmentul de pe tangentă cuprins între punct şi intersecția acestei tangente cu axa Ox.

2° ***Segmentul normală*** într-un punct ordinar al unei curbe plane este segmentul de pe normală cuprins între punct şi intersecția acestei normale cu axa Ox.

3° ***Subtangenta*** într-un punct ordinar al unei curbe plane este proiecția ortogonală pe axa Ox a segmentului tangentă.

4° ***Subnormala*** într-un punct ordinar al unei curbe plane este proiecția ortogonală pe axa Ox a segmentului normală.

Lungimea segmentelor tangentă, normală, subtangentă şi subnormală se notează cu s_{tg}, s_n, s_{stg} şi respectiv s_{sn}.

Fie curba plană (Γ) dată prin ecuația explicită:

$$(\Gamma): \ y = y(x),\ x \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$$

şi fie M un punct ordinar oarecare de pe această curbă. Se notează cu Q, R punctele de intersecție cu axa Ox a tangentei (T), respectiv a normalei (N), în punctul M la curba plană (Γ), cu P proiecția ortogonală pe axa Ox a punctului M şi cu α unghiul format de tangentă cu sensul pozitiv al axei Ox (fig. 1.19).

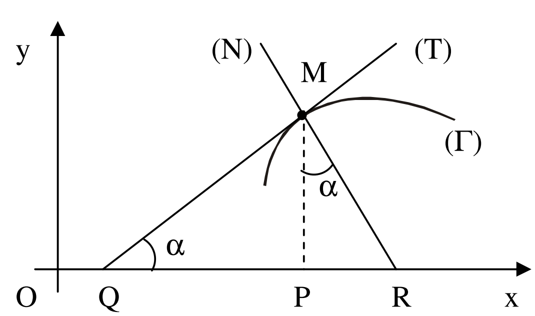


Fig. 1.19.

Conform definițiilor se obține:

[PQ] = subtangenta,
[PR] = subnormala,

[MQ] = segmentul tangentă,
[MR] = segmentul normală.

În triunghiurile dreptunghice QPM şi RPM, au loc relațiile:

$$PQ = \frac{MP}{|\text{tg }\alpha|}, \quad PR = MP|\text{tg }\alpha|, \quad MQ = \frac{MP}{\sin\alpha}, \quad MR = \frac{MP}{|\cos\alpha|}.$$

Se obține apoi succesiv:

$$MP = |y|, \quad \text{tg }\alpha = y', \quad \sin\alpha = \frac{|\text{tg }\alpha|}{\sqrt{1+\text{tg}^2\,\alpha}} = \frac{|y'|}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Rezultă astfel că se poate scrie:

$$PQ = \left|\frac{y}{y'}\right|, \quad PR = |yy'|, \quad MQ = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}, \quad MR = |y|\sqrt{1+y'^2},$$

adică:

$$s_{tg} = \left|\frac{y}{y'}\right|, \quad s_n = |yy'|, \quad s_{stg} = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}, \quad s_{sn} = |y|\sqrt{1+y'^2},$$

unde valorile lui y şi y’ se calculează în abscisa x a punctului M considerat.

Exemplul 1.2. Să se calculeze segmentul tangentă, segmentul normală, subtangenta şi subnormala curbei:

$$(\Gamma):\; x^3 - xy^2 + 2x + y - 3 = 0,$$

în punctul în care aceasta se intersectează cu axa (Oy).

Soluție: Lungimile celor patru segmente se calculează cu ajutorul formulelor:

$$s_{tg} = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}, \quad s_n = |y|\sqrt{1+y'^2}, \quad s_{stg} = \left|\frac{y}{y'}\right|, \quad s_n = |y \cdot y'|,$$

unde y = f(x) este reprezentarea explicită a curbei, iar valorile lui y şi y’ se calculează în abscisa x = 0 a punctului de intersecție a curbei cu axa (Oy). În cazul exemplului, reprezentarea curbei din enunț este implicită, prin urmare:

$$y' = -\frac{F'_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - y^2 + 2}{-2xy + 1}.$$

Punctul de intersecție dintre curbă și axa (Oy) are coordonatele (0, 3) și prin înlocuire în formulele precedente se obține:

$$s_{tg} = \frac{15\sqrt{2}}{7}, \quad s_n = 15\sqrt{2}, \quad s_{stg} = \frac{3}{7}, \quad s_{sn} = 21. \qquad ❒$$

§1.5. Lungimea unui arc de curbă plană. Elementul de arc

În scopul definirii lungimii unui arc $\overset{\frown}{AB}$ al unei curbe plane (Γ), format doar din puncte ordinare, se va înscrie în $\overset{\frown}{AB}$ o linie poligonală cu n coarde, care unește punctele extreme A și B ale arcului (fig. 1.20). Acest lucru poate fi făcut pentru fiecare întreg pozitiv n, într-un mod arbitrar, astfel încât lungimea coardei maxime să tindă la zero, când n tinde la infinit. Lungimile L_n ale acestor linii poligonale se obțin din teorema lui Pitagora. Dacă șirul $\{L_n\}$ al acestor lungimi este convergent cu limita L, atunci arcul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei (Γ) se spune a fi ***rectificabil***, iar valoarea $L = L_{\overset{\frown}{AB}}$ este numită ***lungimea arcului*** $\overset{\frown}{AB}$ al curbei plane (Γ).

Teorema 1.1. Un arc $\overset{\frown}{AB}$ al unei curbe plane (Γ), de clasă cel puțin 1 (unu) este rectificabil.

Dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei plane (Γ) este dat în reprezentare explicită:

$$(\Gamma):\ y = f(x),\ x \in [x_A, x_B] \subset (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R},$$

atunci lungimea sa este dată de:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (f')^2}\, dx,$$

iar dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei plane (Γ) este dat în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in [t_A, t_B] \subset (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases}$$

atunci lungimea sa este dată de:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

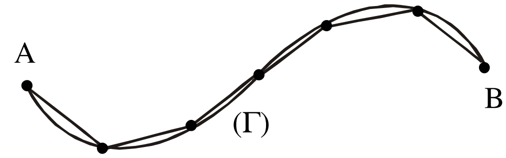


Fig. 1.20.

Demonstrație. Se consideră o linie poligonală P_n, de n coarde, cu vârfurile $M_j(x_j, f(x_j))$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$; $x_0 = x_A < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = x_B$).

Linia poligonală P_n are lungimea:

$$L(P_n) = l_1 + l_2 + \ldots + l_n,$$

unde $l_i = M_{i-1}M_i$ este lungimea coardei a i-a din această linie poligonală (fig. 1.21).

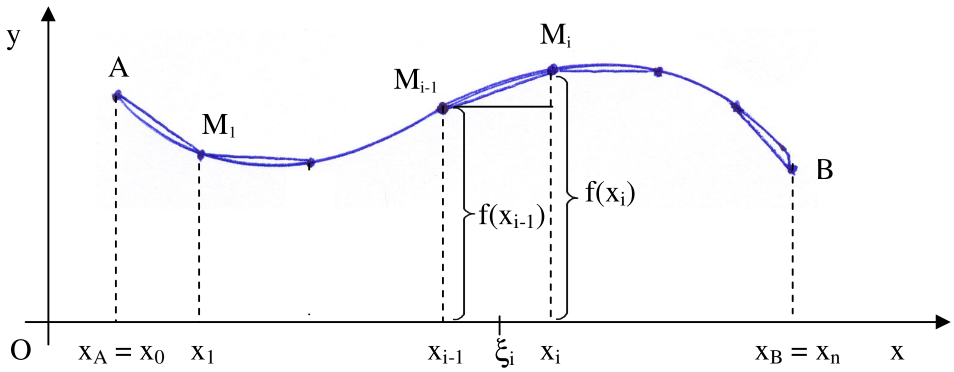


Fig. 1.21.

Se obține:

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\,.$$

Deoarece funcția f este continuă cu derivata f ’ continuă se poate aplica teorema de medie din calculul diferențial:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}),\ \ (x_{i-1} < \xi_i < x_i)$$

şi atunci l_i devine:

$$l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Prin însumarea după i de la 1 la n se obține:

$$L(P_n) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Din faptul că f ’ este continuă şi lungimea coardei maxime tinde la zero, rezultă că suma $L(P_n)$ tinde la $\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+f'^2}\,dx$ pentru $n \to \infty$.

Dacă de face schimbarea de variabilă x = x(t) în integrala $\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+f'^2}\,dx$ şi se ține cont de relațiile:

$$dx = \dot{x}\,dt, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad dy = \dot{y}\,dt,$$

se obține:

$$L_{\widehat{AB}} = \int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{t_A}^{t_B}\sqrt{1+\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}\,\dot{x}\,dt = \int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt\,.$$

❒

Dacă se schimbă valoarea fixă t_B în $L_{\widehat{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$, printr-o variabilă t, atunci $L_{\widehat{AB}}$ devine o funcție de t, fie ea s(t). Dacă se înlocuieşte t_A printr-o valoare fixată $t_0 \in (t_1, t_2)$ se obține:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, d\tilde{t}\,, \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{d\tilde{t}},\ \dot{y} = \frac{dy}{d\tilde{t}}\right).$$

Această funcție ***s(t),*** numită ***lungimea arcului*** $\widehat{M_0M}$ al curbei (Γ), are o interpretare geometrică simplă. Pentru aceasta fie:

Definiția 1.17. Se numeşte ***sens pozitiv*** pe o curbă plană (Γ), sensul care corespunde la valorile crescătoare ale parametrului ales pe curbă (fig. 1.22).

Dacă se revine la $s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, d\tilde{t}$ $\left(\dot{x} = \frac{dx}{d\tilde{t}},\ \dot{y} = \frac{dy}{d\tilde{t}}\right)$, dacă $t > t_0$, atunci s(t) este lungimea porțiunii din (Γ) cu punctul inițial $M_0(t_0)$ şi punctul final M(t). Dacă $t < t_0$, atunci s(t) este negativ şi în acest caz lungimea arcului $\widehat{M_0M}$ este dată de $-s(t) > 0$.

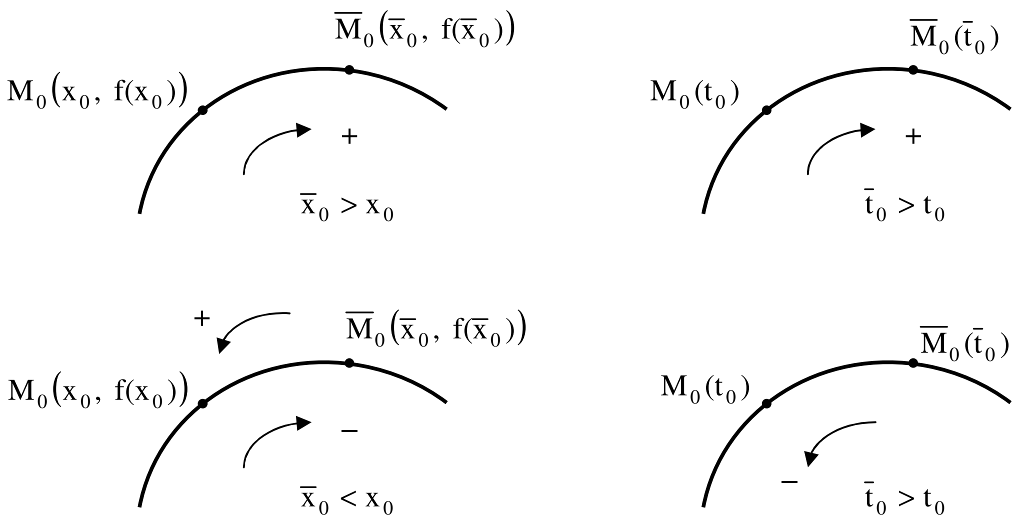


Fig. 1. 22.

Teorema 1.2. Lungimea de arc s(t) poate fi întrebuințată ca parametru în reprezentările parametrice ale curbelor. Trecerea de la t la s păstrează clasa curbei.

Demonstrație. Din relația care-l defineşte pe s(t) şi din condițiile de regularitate pentru funcțiile x = x(t) şi y = y(t) este asigurată continuitatea funcției s(t), neanularea derivatei lui s(t) în raport cu parametrul t:

$$\dot{s}^2(t) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0,$$

rezultă că funcția s(t) este monoton crescătoare. Se obține că funcția:

$$s = s(t),$$

admite o funcție inversă, fie ea:

$$t = t(s),$$

care înlocuită în reprezentarea parametrică a arcului de curbă plană (Γ),

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

conduce la reprezentarea parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t(s)), \\ y = y(t(s)), \end{cases} \tag{1.5}$$

sau:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x^*(s), \\ y = y^*(s), \end{cases} \tag{1.6}$$

şi demonstrează prima parte a teoremei.

Dacă se presupune că funcțiile x(t) şi y(t) din reprezentarea parametrică sunt de clasă n, ceea ce implică cel puțin una dintre funcțiile $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ de clasă n-1 se obține din relația:

$$\dot{s}^2(t) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

că funcția $\dot{s}(t)$ este de clasă n-1 şi $\dot{s}(t) \neq 0$.

Prin folosirea relațiilor (1.5) se obține:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{y}}{\dot{s}},$$

ceea ce implică:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{s}^2} = 1 > 0,$$

adică $\frac{dx}{ds}(s), \frac{dy}{ds}(s)$ sunt de clasă n-1 şi deci funcțiile $x^*(s)$ şi $y^*(s)$ din relațiile (1.6) sunt de clasă n. ❐

Definiția 1.18. Parametrul s este numit ***parametru natural*** al curbei plane (Γ), iar reprezentarea:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \quad \text{s parametru natural,} \end{cases}$$

se numeşte ***reprezentarea naturală*** a curbei plane (Γ).

Pentru lungimea de arc se obține cu uşurință formula:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \ .$$

Se face notația:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \ .$$

Definiția 1.19. Se numeşte ***element de arc (liniar)*** al curbei plane (Γ) expresia ds.

Se obține:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

de unde:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ dt\,,$$

sau:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\ dx\,.$$

§1.6. Curbura şi raza de curbură a unei curbe plane

Pentru a introduce noțiunea de curbură a unei curbe plane se reaminteşte relația care există într-un cerc, între unghiul la centru, arcul corespunzător şi raza cercului.

Se consideră un cerc cu centru O şi rază R, două tangente (T_1) şi (T_2) în punctele M_1 şi M_2 situate pe cerc şi se notează cu α (măsurat în radiani), măsura $\widehat{M_1OM_2}$, iar cu arc $\alpha = \overset{\frown}{M_1M_2}$ (fig. 1.23). deoarece $OM_1 \perp M_1P_1$ şi $OM_2 \perp M_2P_2$, rezultă că α este şi măsura unghiului tangentelor. Se cunoaşte din geometria sintetică elementară că:

$$\overset{\frown}{M_1M_2} = \text{arc}\ \alpha = \alpha \cdot R \text{ radiani},$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha}{\text{arc}\ \alpha} \ \text{(constant)},$$

relație care arată că oricare ar fi poziția punctelor M_1, M_2 pe cerc, raportul între măsura unghiului tangentelor şi lungimea

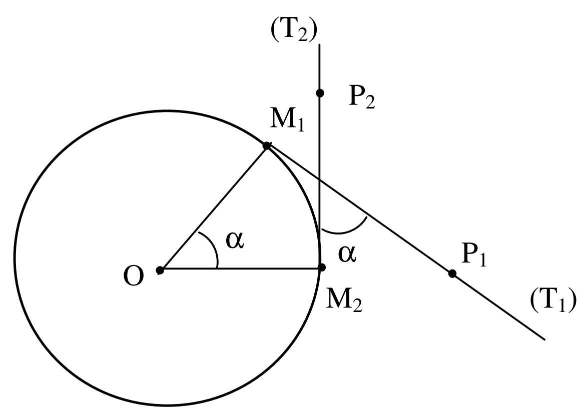


Fig. 1.23.

arcului M_1M_2 este acelaşi, sau cu alte cuvinte "abaterea" cercului de la tangentă este aceeaşi în orice punct al cercului şi anume $\frac{1}{R}$, cantitate notată cu K şi numită ***curbura cercului***.

Pentru o curbă plană oarecare acest lucru nu mai este posibil, dar sugerează introducerea noțiunii de curbură, în general, pentru o curbă plană oarecare într-un punct ordinar.

Definiția 1.20. Se numeşte ***unghi de contingență*** al unui arc de curbă, unghiul ascuțit format de tangentele duse la extremitățile arcului.

Definiția 1.21. Se numeşte ***curbură medie*** a unui arc de curbă, raportul dintre măsura unghiului de contingență şi lungimea arcului.

Definiția 1.22. Se numeşte ***curbura*** unei curbe plane într-un punct ordinar, limita curburii medii, când lungimea arcului tinde către zero. Inversul modulului curburii este ***raza de curbură*** a curbei în acel punct.

Potrivit definițiilor de mai sus se obțin pentru curba (Γ) următoarele relații (fig. 1.24):

$\Delta\alpha$ = măsura unghiului de contingență,

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = K_m = \text{curbura medie},$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = K = \text{curbura},$$

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \left|\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}\right| = R = \frac{1}{|K|}.$$

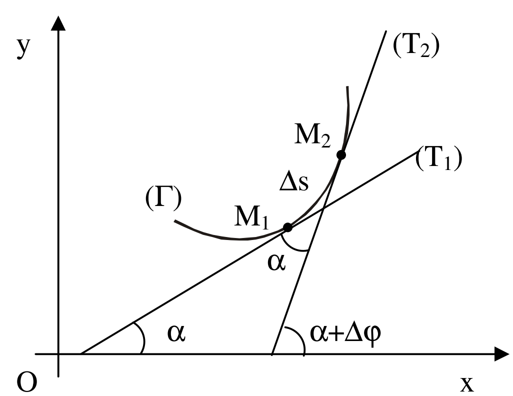


Fig. 1.24.

Teorema 1.3. Se consideră o curbă plană (Γ), dată în reprezentare explicită:

$$(\Gamma) : y = f(x),\ \ x \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R},$$

de clasă cel puțin 2 în vecinătatea unui punct ordinar al său. Atunci curbura curbei (Γ) în punctul ordinar considerat este dat de relația:

$$K = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}},$$

în care derivatele sunt calculate în punctul considerat.

Demonstrație. Fie curba (Γ) clasă cel puțin 2 în vecinătatea unui punct ordinar $M_1(x, y)$ al curbei ($y' \neq 0$, $y'' \neq 0$ şi continue), $M_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punct al lui (Γ) infinit apropiat, de M şi (T_1), (T_2) tangentele în M_1 respectiv în M_2, care formează cu axa (Ox) unghiurile de măsuri φ şi respectiv $\varphi + \Delta\varphi$ (fig. 1.24), deci:

$\Delta\alpha = \Delta\varphi$.

Curbura medie este:

$$K_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

sau prin împărțire cu Δx a numărătorului şi numitorului:

$$K_m = \frac{\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}.$$

La limită se obține:

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}},$$

deci:

$$K = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

S-a folosit faptul că dacă $\Delta s \to 0$ ($M_2 \to M_1$) atunci $\Delta x \to 0$.

Dacă se ține cont de interpretarea geometrică a derivatei şi anume:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi,$$

rezultă:

$$\varphi = \operatorname{arctg} y'$$

şi prin derivare în raport cu x se obține:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot y''.$$

Pe de altă parte din definiția 1.19 se obține:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

adică:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2},$$

deci:

$$K = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}, \qquad R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}.$$

❐

Observația 1.2. Dacă curba plană (Γ) este dată în reprezentare implicită:

$$(\Gamma) : F(x, y) = 0, \ (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

atunci, conform formulelor de derivare a funcțiilor implicite:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}, \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{F'_x}{F'_y}\right) = -\frac{F'_y \frac{d}{dx}(F'_x) - F'_x \frac{d}{dx}(F'_y)}{(F'_y)^2} =$$

$$= -\frac{F'_y\left(F''_{x^2} + F''_{xy}\cdot y'\right) - F'_x\left(F''_{yx} + F''_{y^2}\cdot y'\right)}{(F'_y)^2}.$$

Deoarece clasa curbei este cel puțin 2 (teorema lui Schwarz este îndeplinită $F''_{xy} = F''_{yx}$) se obține:

$$y'' = -\frac{(F'_x)^2 \cdot F''_{y^2} - 2F'_x F'_y F''_{xy} + (F'_y)^2 F''_{x^2}}{(F'_y)^3}.$$

Curbura şi raza de curbură au atunci expresiile:

$$K = \frac{2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_y)^2 F''_{x^2} - (F'_x)^2 F''_{y^2}}{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{3/2}},$$

$$R = \frac{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{3/2}}{\left|2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_y)^2 F''_{x^2} - (F'_x)^2 F''_{y^2}\right|},$$

în care derivatele sunt calculate în punctul considerat. ❐

Observația 1.3. Dacă curba plană (Γ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases}$$

atunci se obțin formulele:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}.$$

Expresiile curburii şi razei de curbură devin:

$$K = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}},$$
$$R = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\left|\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}\right|},$$

în care derivatele sunt calculate în punctul considerat. ❒

§1.7. Contactul între două curbe plane

Noțiunea de „contact" între curbe plane descrie analitic situații cum sunt cele prezentate în figura 1.25.

Intuitiv, problema contactului se pune în punctele comune ale celor două curbe plane şi măsoară cât de mult se apropie una de alta în vecinătatea acestor puncte.

Problema intersecției a două curbe plane îşi are soluția în problema algebrică de rezolvare a sistemului format din reprezentările analitice ale celor două curbe.

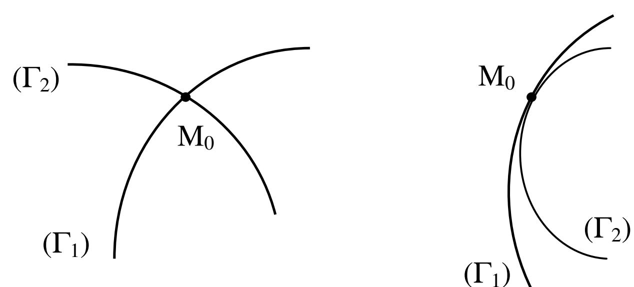


Fig. 1.25.

Se consideră curbele plane de reprezentări analitice:

$$(\Gamma_1): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (\Gamma_2): F(x, y) = 0, \ (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

ambele de clasă k, $k \in \mathbb{N}^*$. Punctele lor comune se obțin prin rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

care este echivalent cu ecuația:

$$\phi(t) \equiv F(x(t), y(t)) = 0.$$

Cele două curbe au forma cu atât mai asemănătoare în vecinătatea unui punct $M_0(t_0)$, cu cât ordinul de multiplicare al lui t_0, ca soluție a ecuației $\phi(t) = 0$, este mai mare.

Definiția 1.23. Două curbe plane au într-un punct comun un ***contact de ordinul n*** dacă în acel punct sunt confundate n+1 puncte comune celor două curbe.

Teorema 1.4. Fie curbele plane (Γ_1) şi (Γ_2) de clasă k, $k \in \mathbb{N}^*$, date respectiv prin ecuațiile:

$$(\Gamma_1): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (\Gamma_2): F(x, y) = 0\ ,\quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Condițiile ca într-un punct comun $M_0(t = t_0)$ să existe un contact de ordinul n, $n \leq k$ sunt:

$$\phi(t_0) = 0,\ \phi'(t_0) = 0,\ ...,\ \phi^{(n)}(t_0) = 0,\ \phi^{(n+1)}(t_0) \neq 0,$$

unde:

$$\phi(t) = F(x(t), y(t)).$$

Demonstrație. După cum s-a arătat mai sus, determinarea punctelor de intersecție între cele două curbe plane (Γ_1) şi (Γ_2) revine la rezolvarea ecuației $\phi(t) = 0$.

Fie t_i (i = 1, 2, ..., k, ..., s) rădăcinile sale reale. Acestor valori ale parametrului t le corespund punctele $M_i(x(t_i), y(t_i))$ comune curbelor (Γ_1) şi (Γ_2).

Dacă în punctul M_0 corespunzător valorii t_0 a parametrului t, cele două curbe plane au un contact de ordinul n, atunci pe baza definiției 1.23 rezultă că $t = t_0$ este o rădăcină de ordinul n+1 de multiplicitate pentru ecuația $\phi(t) = 0$. cu alte cuvinte se obțin relațiile:

$$\phi(t_0) = 0,\ \phi'(t_0) = 0,\ ...,\ \phi^{(n)}(t_0) = 0,\ \phi^{(n+1)}(t_0) \neq 0. \qquad \square$$

Observația 1.4. Teorema 1.4 caracterizează contactul de ordinul n pentru două curbe plane, într-un punct comun al lor, în cazul în care o curbă este dată în reprezentare parametrică, iar a doua în reprezentare implicită, iar teorema următoare se referă la cazul în care ambele curbe sunt date în reprezentare explicită.

Teorema 1.5. Dacă două curbe plane (Γ_1) şi (Γ_2) de clasă k, $k \in \mathbb{N}^*$, date respectiv prin ecuațiile explicite:

$$(\Gamma_1): y = f_1(x)\ ,\quad x \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}\ ,$$

$$(\Gamma_2): y = f_2(x)\ ,\quad x \in (x_3, x_4) \subseteq \mathbb{R}\ ,$$

au într-un punct comun M_0 un contact de ordinul n, $n \leq k$, atunci funcțiile $f_1(x)$, $f_2(x)$ şi derivatele lor până la şi inclusiv ordinul n, sunt egale în acel punct, derivatele de ordinul n+1 au valori distincte în punctul respectiv.

Demonstrație. După cum s-a menționat mai sus, găsirea punctelor comune a două curbe plane, revine la rezolvarea sistemului format din reprezentările analitice ale celor două curbe (Γ_1) şi (Γ_2), adică la rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} y = f_1(x), \\ y = f_2(x), \end{cases}$$

care este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} y = f_i(x), \\ f_1(x) - f_2(x) = 0, \end{cases} \quad (i = 1 \text{ sau } 2).$$

Prin rezolvarea ecuației:

$$E(x) \equiv f_1(x) - f_2(x) = 0,$$

se obțin abscisele punctelor comune celor două curbe plane, fie acestea:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_s,$$

adică:

$$f_1(x_i) = f_2(x_i), \ (\forall)\, i \in \{0, 1, \ldots, s\}.$$

Dacă se presupune că $x = x_0$ este abscisa punctului M_0 în care cele două curbe au un contact de ordinul n, înseamnă, în conformitate cu definiția 1.23, că în punctul M_0 se confundă n+1 puncte comune celor două curbe, adică $x = x_0$ este rădăcină a ecuației $E(x) = 0$, de ordinul n+1 de multiplicitate.

Analitic, aceasta revine la faptul cunoscut din analiza matematică:

$$E(x_0) = 0,\ E'(x_0) = 0,\ \ldots,\ E^{(n)}(x_0) = 0 \text{ şi } E^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Dacă se ține cont de notația făcută pentru E(x), ultimele relații se pot scrie sub forma:

$$f_1(x_0) = f_2(x_0),\ f'_1(x_0) = f'_2(x_0),\ \ldots,\ f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0) \text{ şi } f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0).$$

❐

Propoziția 1.1. Tangenta la o curbă plană de clasă k, $k \geq 1$, într-un punct ordinar al său, are cu aceasta un contact de cel puțin ordinul 1.

Demonstrație. Fie $M_0(t = t_0)$ un punct ordinar al curbei plane (Γ) dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases}$$

şi

$$(T): \frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)},$$

ecuația tangentei în M_0 la curba (Γ). Dacă se notează:

$$\phi(t) = \frac{x(t) - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} - \frac{y(t) - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)},$$

se verifică uşor că:

$$\phi(t_0) = \phi'(t_0) = 0.$$ ❐

Exemplul 1.3. Se consideră curbele plane:

$$(\Gamma_1): \; y = e^x,$$

$$(\Gamma_2): \; y = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

a) Să se afle ordinul contactului lor în punctul comun.
b) Să se calculeze curbura lor în acel punct.

Soluție: a) Fie funcția:

$$E(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1.$$

Zeroul funcției E(x), adică abscisa punctului de intersecție a curbelor (Γ_1) şi (Γ_2) este x = 0. Se poate cu uşurință verifica unicitatea acestei soluții. Rezultă că punctul comun are coordonatele (0, 1).

Se calculează:

$$E'(x)\big|_{x=0} = (e^x - x - 1)\big|_{x=0} = 0,$$
$$E''(x)\big|_{x=0} = (e^x - 1)\big|_{x=0} = 0,$$
$$E'''(x)\big|_{x=0} = e^x\big|_{x=0} = 1 \neq 0.$$

Rezultă că cele două curbe au în punctul comun un contact de ordinul 2, adică trei puncte confundate.

b) În punctul comun, curburile celor două curbe sunt egale, deoarece ordinul contactului în acest punct este 2, deci ele admit acelaşi cerc osculator.

$$K = \frac{(e^x)''}{\left[1 + (e^x)'^2\right]^{3/2}}\Bigg|_{x=0} = \frac{1}{2^{3/2}} = 2^{-3/2}.$$ ❐

§1.8. Cercul osculator al unei curbe plane

Fie curba plană (Γ) de clasă k, $k \geq 2$. Se studiază în continuare existența unui cerc al cărui contact cu (Γ) în punctul ordinar $M_0 \in (\Gamma)$ să fie de cel puțin ordinul 2.

Definiția 1.24. Se numeşte ***cerc osculator*** al unei curbe plane într-un punct ordinar, cercul care are cu curba în punctul ordinar un contact de cel puțin ordinul 2.

În scopul studierii existenței cercului osculator, fie curba (Γ) dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

şi $M_0 \in (\Gamma)$ un punct ordinar, corespunzător la $t = t_0$. Se caută ecuația cercului sub formă implicită:

$$(\mathscr{C}):\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0,$$

unde (α, β) - coordonatele centrului cercului şi R - raza cercului, se determină din condițiile de contact. În conformitate cu teorema 1.4 în care:

$$\phi(t) = [x(t) - \alpha]^2 + [y(t) - \beta]^2 - R^2,$$

$$\phi'(t) = 2\{[x(t) - \alpha]\dot{x}(t) + [y(t) - \beta]\dot{y}(t)\},$$

$$\phi''(t) = 2\{[x(t) - \alpha]\ddot{x}(t) + [y(t) - \beta]\ddot{y}(t) + \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\},$$

condițiile de contact de cel puțin ordinul 2 între (Γ) şi $(\mathscr{C})$ în $M_0(t_0)$ sunt:

$$\phi(t_0) = \phi'(t_0) = \phi''(t_0) = 0.$$

Rezultă că α, β, R sunt soluțiile sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - R^2 = 0, \\ (x_0 - \alpha)\ \dot{x}_0 + (y_0 - \beta)\ \dot{y}_0 = 0, \\ (x_0 - \alpha)\ \ddot{x}_0 + (y_0 - \beta)\ \ddot{y}_0 = -(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2}), \end{cases}$$

unde:

$$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0),\ \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0),\ \ddot{x}_0 = \ddot{x}(t_0),\ \ddot{y}_0 = \ddot{y}(t_0).$$

Dacă se consideră necunoscutele $(x_0 - \alpha)$, $(y_0 - \beta)$ în sistemul format de ultimele două ecuații de mai sus, în ipoteza:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix} = 0,$$

prin regula lui Cramer se obține:

$$x_0 - \alpha = \frac{\dot{y}_0(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2})}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}, \qquad y_0 - \beta = -\frac{\dot{x}_0(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2})}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0},$$

de unde se deduc pentru coordonatele centrului cercului osculator expresiile:

$$\alpha = x_0 - \frac{\dot{y}_0(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2})}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}, \qquad \beta = y_0 + \frac{\dot{x}_0(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2})}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}.$$

Pentru a afla raza cercului, se înlocuiesc valorile pentru $(x_0 - \alpha)$ şi $(y_0 - \beta)$ în ecuația $\phi(t_0) = 0$ şi se obține:

$$R = \frac{\left(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2}\right)^{3/2}}{\left|\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0\right|}.$$

Dacă curba plană (Γ) este dată în reprezentare explicită:

$$(\Gamma): y = f(x),\ \ x \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R},$$

atunci prin trecerea la reprezentarea parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \quad t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases}$$

se obține:

$$\dot{x} = 1, \quad \ddot{x} = 0, \quad \dot{y} = f', \quad \ddot{y} = f'', \quad t_0 = x_0,$$

şi deci coordonatele centrului cercului osculator şi raza cercului osculator, într-un punct ordinar $M_0(x_0) \in (\Gamma)$ la curba dată în reprezentare explicită, sunt date de:

$$\alpha = x_0 - \frac{y'_0\left(1 + y'^{\,2}_0\right)}{y''_0}, \qquad \beta = y_0 + \frac{\left(1 + y'^{\,2}_0\right)}{y''_0}, \quad R = \frac{\left(1 + y'^{\,2}_0\right)^{3/2}}{\left|y''_0\right|}.$$

Pentru a răspunde complet la problema existenței cercului osculator, trebuie cercetat cazul:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix} = 0,$$

sau pentru reprezentarea explicită $(\Gamma) : y = y(x),\ x \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$, ecuația echivalentă:

$$\begin{vmatrix} 1 & y' \\ 0 & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

care conduce la ecuația diferențială:

$$y'' = 0,$$

de unde prin integrare, se obține:

$$y = c_1x + c_2,$$

adică ecuația unei familii de drepte. S-a demonstrat astfel:

Teorema 1.6. Orice curbă plană, de clasă cel puțin 2 în vecinătatea unui punct ordinar al ei, admite un cerc osculator şi numai unul în acel punct, care are coordonatele centrului şi raza date de expresiile:

$$\alpha = x_0 - \frac{\dot{y}_0\left(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2}\right)}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}, \qquad \beta = y_0 + \frac{\dot{x}_0\left(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2}\right)}{\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0}, \qquad R = \frac{\left(\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2}\right)^{3/2}}{\left|\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0\right|},$$

pentru cazul în care curba este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases}$$

sau:

$$\alpha = x_0 - \frac{y'_0\left(1 + y'^{\,2}_0\right)}{y''_0}, \qquad \beta = y_0 + \frac{1 + y'^{\,2}_0}{y''_0}, \qquad R = \frac{\left(1 + y'^{\,2}_0\right)^{3/2}}{\left|y''_0\right|},$$

pentru cazul în care curba este dată în reprezentare explicită:

$$(\Gamma): y = f(x), \ x \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}.$$

Definiția 1.25. Punctul $M_0(t_0) \in (\Gamma)$ se numeşte ***punct de inflexiune*** al curbei (Γ) dacă în el se verifică condiția:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Observația 1.5. Se remarcă deci, că în punctele dreptelor, în punctele unui arc - segment de dreaptă - al unei curbe, în punctele de inflexiune ale unei curbe, nu se poate ataşa cerc osculator.

Exemplul 1.4. Să se determine ecuația cercului osculator la elipsă în punctul de intersecție al acesteia cu semiaxa pozitivă a absciselor.

Soluție: Punctul considerat este A(a, 0), iar ecuațiile parametrice ale elipsei sunt:

$$(E): \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Punctul A corespunde valorii $t = 0$.
Coordonatele centrului cercului osculator sunt:

$$\begin{cases} \alpha = \left[x(t) - \dot{y}(t) \dfrac{\dot{x}^2(t) + \ddot{y}(t)}{\dot{x}(t)\cdot\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\cdot\dot{y}(t)} \right] \Bigg|_{t=0}, \\ \beta = \left[y(t) + \dot{x}(t) \dfrac{\dot{x}^2(t) + \ddot{y}(t)}{\dot{x}(t)\cdot\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\cdot\dot{y}(t)} \right] \Bigg|_{t=0}, \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} \alpha = a - b \cdot \dfrac{b^2}{ab} = \dfrac{a^2 - b^2}{a}, \\ \beta = 0 - 0 \cdot \dfrac{b^2}{ab} = 0. \end{cases}$$

Raza cercului osculator este:

$$R=\frac{\left[\dot{x}(t)+\dot{y}^2(t)\right]^{3/2}}{\dot{x}(t)\cdot\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\cdot\dot{y}(t)}\Bigg|_{t=0}=\frac{(b^2)^{3/2}}{ab}=\frac{b^2}{a}.$$

Ecuația cercului osculator căutat este:

$$(\mathscr{C}):\ \left(x-\frac{a^2-b^2}{a}\right)^2+y^2=\frac{b^4}{a^2}.$$

❒

§1.9. Puncte multiple ale unei curbe plane

Definiția 1.26. Se spune că M_0 este un ***punct multiplu de ordinul p*** al curbei plane (Γ) de clasă k, $k \geq p$, dacă prin M_0 curba trece de ***p*** ori.

Observația 1.6. Dacă $p = 2$, punctul M_0 este un punct dublu al curbei (Γ) (fig. 1.26), dacă $p = 3$, punctul M_0 este un punct triplu (fig. 1.27).

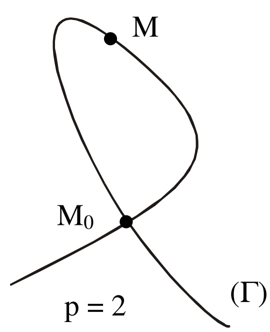


Fig. 1.26.

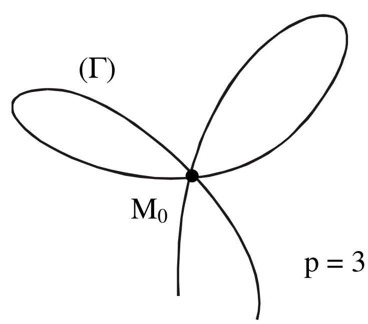


Fig. 1.27.

Teorema 1.7. Fie curba plană (Γ), de clasă k, $k \in \mathbb{N}^*$, dată în reprezentare implicită:

$$(\Gamma):\ F(x, y) = 0,\quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

şi $M_0 \in (\Gamma)$. Dacă $M_0(x_0, y_0)$ este un punct multiplu de ordinul p, $p \leq k$ al curbei plane (Γ), atunci în M_0 se anulează toate derivatele parțiale până la şi inclusiv ordinul p-1, fără a se anula şi toate derivatele parțiale de ordinul p:

$$\frac{\partial^m F}{\partial x^r\ \partial y^s}(x_0, y_0)=0,\ (\forall)\ (r, s) \text{ astfel încât } r + s = m,\ m \in \{0, 1, ..., p-1\}$$

şi

$$\frac{\partial^p F}{\partial x^r\ \partial y^s}(x_0, y_0)\neq 0,\ \text{ pentru cel puțin o pereche } (r, s) \text{ cu proprietatea } r + s = p.$$

Demonstrație. Se consideră $M_0(x_0, y_0)$ un punct multiplu de ordinul p, $p \leq k$, al curbei (Γ) dată în reprezentare implicită:

$$(\Gamma) : F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

şi fie (d) o dreaptă ce trece prin M_0, de direcție $\overline{v}(l, m)$, deci a cărei reprezentare parametrică este:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + l\,t, \\ y = y_0 + m\,t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

punctul M_0 se obține pentru valoarea zero a parametrului t (fig. 1.28).

Intersecția dintre curba plană (Γ) şi dreapta (d) revine la rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t, \\ y = y_0 + m\,t, \\ F(x, y) = 0, \end{cases}$$

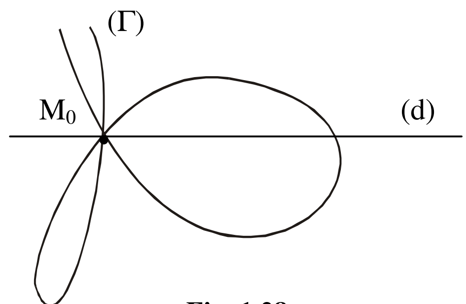


Fig. 1.28.

care este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t, \\ y = y_0 + m\,t, \\ F(x_0 + l\,t, y_0 + m\,t) = 0, \end{cases}$$

ultima ecuație a acestui sistem este ecuația care determină valorile parametrului t corespunzătoare punctelor de intersecție.

Dacă se aplică formula lui Taylor pentru funcții de două variabile, din ultima ecuație a sistemului se obține:

$$F(x_0, y_0) + \frac{t}{1!}\left(l\,F'_{x_0} + m\,F'_{y_0}\right) + \frac{t^2}{2!}\left(l\,F'_{x_0} + m\,F'_{y_0}\right)^{(2)} + \frac{t^3}{3!}\left(l\,F'_{x_0} + m\,F'_{y_0}\right)^{(3)} + \ldots +$$
$$+ \frac{t^p}{p!}\left(l\,F'_{x_0} + m\,F'_{y_0}\right)^{(p)} + \ldots = 0,$$

unde:

$$F'_{x_0} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \quad F'_{y_0} = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), \quad F''_{x_0 y_0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0), \text{ etc.}$$

Dacă M_0 este un punct multiplu de ordinul p, această ecuație în t trebuie să aibă pe t = 0 ca rădăcină multiplă de ordinul p, ceea ce implică condițiile enunțate.

❒

Observația 1.7. Deoarece pentru orice punct multiplu de ordinul p, $p \geq 2$ au loc condițiile:

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0,$$

rezultă că el este un punct singular al curbei (Γ).

Teorema 1.8. Se consideră o curbă plană (Γ), de clasă k, $k \in \mathbb{N}^*$, dată în reprezentare implicită:

$$(\Gamma) : F(x, y) = 0, \ (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

şi fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct dublu al curbei (Γ). Atunci pantele tangentelor la cele două ramuri ale curbei plane (Γ), care trec prin el sunt date de relația:

$$F''_{y_0^2}\, m^2 + 2\,F''_{x_0 y_0}\, m + F''_{x_0^2} = 0.$$

Demonstrație. Panta tangentei într-un punct dublu $M_0(x_0, y_0)$ la curba plană (Γ) este dată de formula:

$$m = y'_0 = -\frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}}$$

(expresia este o nedeterminare de tip $\frac{0}{0}$ în cazul punctului dublu M_0).

Se ridică nedeterminarea, dacă se aplică regula lui l'Hôspital:

$$m = y'_0 = -\lim_{M \to M_0} \frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{F''_{x_0^2} + F''_{x_0 y_0}\, y'_0}{F''_{x_0 y_0} + F''_{y_0^2}\, y'_0} = -\frac{F''_{x_0^2} + m\,F''_{x_0 y_0}}{F''_{x_0 y_0} + m\,F''_{y_0^2}},$$

de unde rezultă relația enunțată. ❒

Observația 1.8. Realizantul ecuației de gradul doi în m este:

$$\Delta' = {F''_{x_0 y_0}}^2 - F''_{x_0^2}\, F''_{y_0^2}, \quad (\Delta = 4\,\Delta').$$

În funcție de semnul lui Δ' se disting trei cazuri în ceea ce priveşte natura punctelor duble:

1° Dacă $\Delta' > 0$, se obțin $m_1 \neq m_2$ (reale). În acest caz, în punctul dublu există două tangente reale şi distincte. Punctul dublu M_0 este un ***nod*** (fig. 1.29).

2° Dacă $\Delta' = 0$, se obțin $m_1 = m_2$ (reale). În acest caz, în punctul dublu există două tangente reale confundate. Punctul dublu M_0 este un ***punct de întoarcere*** (***de primă speță*** - fig. 1.30; ***de a doua speță*** - fig. 1.31; ***de contact (tacnod)*** - fig. 1.32).

3° Dacă $\Delta' < 0$, se obțin m_1, m_2 imaginare. În acest caz, în punctul dublu nu se pot duce tangente reale la curbă. Dacă se ține cont de definiția 1.14, rezultă că nu există puncte pe curbă într-o vecinătate, suficient de mică a punctului dublu. Punctul M_0 este un ***punct izolat*** (fig. 1.33).

❒

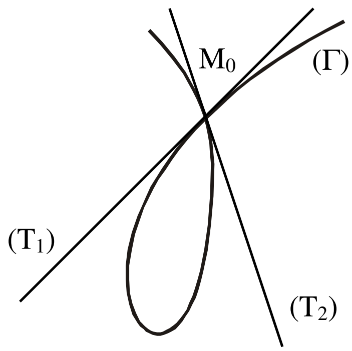


Fig. 1.29.

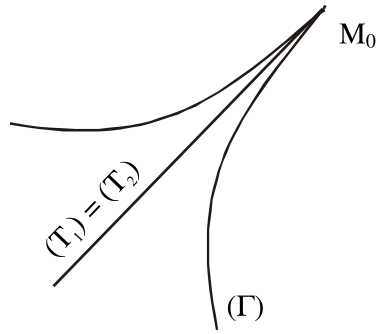


Fig. 1.30.

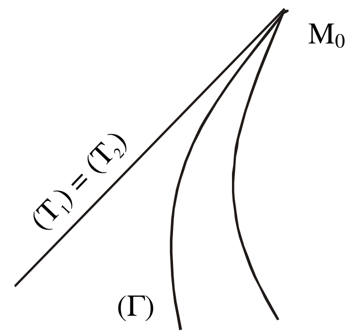


Fig. 1.31.

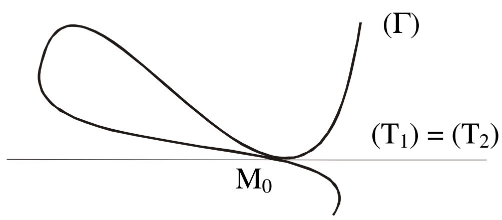


Fig. 1.32.

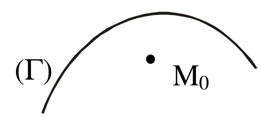


Fig. 1.33.

Observația 1.9. Dacă p = 3, (M_0 punct triplu), membrul doi al relației:

$$y'_0 = -\frac{F''_{x_0^2} + F''_{x_0 y_0}\, y'_0}{F''_{x_0 y_0} + F''_{y_0^2}\, y'_0},$$

este tot o nedeterminare de tip $\frac{0}{0}$, care ridicată din nou cu regula lui l'Hôspital va conduce la implicații de natură algebrică; ş.a.m.d. ❒

Exemplul 1.5. Să se studieze punctele singulare ale curbei:

$$(\Gamma):\ y^2 - (x-a)^2\,(x-b) = 0,\quad a, b \neq 0$$

şi să se scrie ecuațiile tangentelor corespunzătoare lor.

Soluție: Se notează $F(x, y) = y^2 - (x-a)^2\,(x-b)$. Punctele singulare ale curbei de ecuație $F(x, y) = 0$ se află printre soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ F'_x\,(x, y) = 0, \\ F'_y\,(x, y) = 0, \end{cases}$$

adică:

$$\begin{cases} y^2 - (x-a)^2\,(x-b) = 0, \\ -2\,(x-a)\,(x-b) - (x-a)^2 = 0, \\ 2\,y = 0. \end{cases}$$

Soluția sistemului anterior este:

$$\begin{cases} x = a, \\ y = 0. \end{cases}$$

Se obține punctul A(a, 0). Derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției F(x, y) sunt:

$$F''_{x^2} = -2(3\,x - b - 2\,a), \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{y^2} = 2,$$

şi calculate în A(a, 0) ele sunt:

$$F''_{x_0^2} = 2\,(b - a), \quad F''_{x_0 y_0} = 0, \quad F''_{y_0^2} = 2,$$

deci discriminantul Δ' = 4 (a – b).

1° Dacă a > b, atunci Δ > 0 şi punctul A este nod.
Din ecuația:

$$m^2\left(F''_{y_0^2}\right) + 2\,m\left(F''_{x_0 y_0}\right) + \left(F''_{x_0^2}\right) = 0,$$

adică:

$$2\,m^2 - 2\,(a - b) = 0,$$

rezultă $m_{1,2} = \pm\sqrt{a - b}$ şi ecuațiile tangentelor la curba plană (Γ) în punctul A sunt:

$$(T_{1,\,2}):\;\; y = \pm\sqrt{a - b}\;\,(x - a).$$

2° Dacă a = b, atunci Δ = 0 şi punctul A este de întoarcere, iar ecuația tangentei devine:

$$(T):\;\; y = 0.$$

3° Dacă a < b, atunci Δ < 0 şi punctul A este punct izolat. ❒

Exemplul 1.6. Să se studieze punctele singulare ale curbei:

$$(\Gamma):\;\; x^4 + 2\,ax^2y - ay^3 = 0$$

şi să se scrie ecuațiile tangentelor corespunzătoare lor.

Soluție: Sistemul algebric:

$$\begin{cases} F(x, y) \equiv x^4 + 2\,ax^2y - ay^3 = 0, \\ F'_x\,(x, y) \equiv 4\,x^3 + 4\,axy = 0, \\ F'_y\,(x, y) \equiv 2\,ax^2 - 3\,ay^2 = 0, \end{cases}$$

este verificat în originea O(0,0) a sistemului cartezian. Se constată uşor că acest punct anulează şi toate derivatele parțiale de ordinul doi, dar $F'''_{x^2y}\Big|_0 \neq 0$, deci O este un punct triplu. Pentru a determina pantele tangentelor în punctul triplu O se continuă procedeul de eliminare a nedeterminării de tip $\frac{0}{0}$ şi au loc succesiv relațiile:

$$m = y'_0 = -\lim_{M\to O}\frac{F'_x}{F'_y} = -\lim_{M\to O}\frac{F''_{x^2}+y'F''_{xy}}{F''_{xy}+y'F''_{y^2}} = -\frac{F'''_{x^3}+2F'''_{x^2y}\cdot y'+F'''_{xy^2}(y')^2}{F'''_{x^2y}+2F'''_{xy^2}\cdot y'+F'''_{y^3}(y')^2}\Bigg|_0 .$$

Deci ecuația pantelor tangentelor se scrie:

$$m = -\frac{2\cdot 4a\cdot m}{4a-6am^2},$$

cu soluțiile $m_1 = 0$, $m_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. Tangentele corespunzătoare au ecuațiile:

$$(T_1):\ y=0,\quad (T_2):\ y = x\sqrt{2},\quad (T_3):\ y=-x\sqrt{2}.$$ ❐

§1.10. Înfăşurătoarea unei familii de curbe plane

Definiția 1.27. Se numeşte ***familie de curbe plane*** mulțimea curbelor $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, în care fiecare curbă din familie să fie perfect determinată de valoarea respectivă a parametrului α.

Definiția 1.28. Fie familia de curbe plane $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, date în reprezentare implicită:

$$(\Gamma_\alpha) : F(x, y, \alpha) = 0,\quad (x, y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2,\quad \alpha\in\mathbb{R},$$

de clasă k, $k \geq 1$, astfel încât funcția F să fie diferențiabilă şi în raport cu α.

Se consideră două curbe vecine (Γ_α) şi $(\Gamma_{\alpha+\Delta\alpha})$, unde:

$$(\Gamma_{\alpha+\Delta\alpha}) : F(x, y, \alpha+\Delta\alpha) = 0,$$

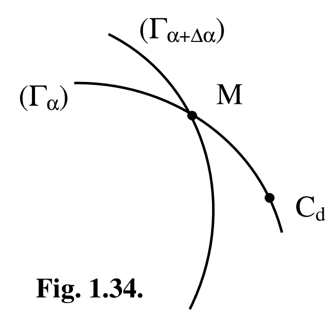


Fig. 1.34.

care se intersectează în punctul M (fig. 1.34).

Dacă $\Delta\alpha \to 0$, curba $(\Gamma_{\alpha+\Delta\alpha})$ tinde către curba (Γ_α), iar punctul M ia o poziție limită C_α pe curba (Γ_α).

Punctul C_α, care este punctul de intersecție a două curbe infinit vecine, se numeşte ***punct caracteristic*** al curbei (Γ_α).

Prin urmare, fiecare curbă din familia $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ are un punct caracteristic.

Definiția 1.29. Se numeşte ***înfăşurătoare*** a familiei de curbe plane $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, locul geometric al punctelor caracteristice C_α, ale curbelor din familie.

Teorema 1.9. Înfăşurătoarea unei familii de curbe plane $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, date în reprezentare implicită:

$$(\Gamma_\alpha) : F(x, y, \alpha) = 0, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

se obține, dacă există, prin eliminarea parametrului α între ecuația dată şi ecuația obținută prin anularea derivatei parțiale în raport cu membrul întâi al acesteia: $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$.

Demonstrație. Sistemul care dă coordonatele punctului M:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0, \end{cases}$$

este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ \dfrac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0, \end{cases}$$

deoarece şi acesta rezolvat în raport cu x şi y dă tot coordonatele punctului M.

Dacă $\Delta\alpha \to 0$, punctul M tinde către punctul caracteristic C_α pe curba (Γ_α). În acest caz sistemul devine:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \dfrac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0, \end{cases}$$

adică:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

❒

Observația 1.10. Dacă eliminarea lui α întâmpină dificultăți de calcul, se rezolvă în raport cu x şi y aceste două ecuații şi se obține:

$$(\mathrm{I}) : \begin{cases} x = x(\alpha), \\ y = y(\alpha), \end{cases}$$

relații care reprezintă ***ecuațiile parametrice*** ale înfăşurătoarei.

Teorema 1.10. Înfăşurătoarea unei familii de curbe plane şi o curbă din familie au aceeaşi tangentă în punctul de contact, care este punctul caracteristic.

Demonstrație. Fie curba (Γ_α) tangentă la curba (I) - înfăşurătoarea familiei $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, în punctul caracteristic C_α (fig. 1.35).

Deoarece ecuația curbei (Γ_α) este:

$$(\Gamma_\alpha) : F(x, y, \alpha) = 0, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

ecuația tangentei în C_α la (Γ_α) este:

$$(T_1) : (X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

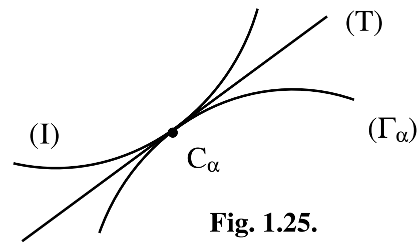


Fig. 1.25.

Pentru a obține reprezentarea implicită a curbei înfăşurătoare (I) se poate proceda în felul următor: se calculează din $F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ α în funcție de x şi y, adică:

$$\alpha = \alpha(x, y)$$

şi se înlocuieşte în ecuația $F(x, y, \alpha) = 0$. Se elimină astfel parametrul α. Se obține ecuația implicită a înfăşurătoarei:

$$(I) : F\big(x, y, \alpha(x, y)\big) = 0 .$$

Tangenta la curba (I) în C_α are ecuația:

$$(T_2) : (X - x)\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right] + (Y - y)\left[\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right] = 0 ,$$

(derivatele s-au calculat după regula derivării unei funcții compuse).

Cum în punctul caracteristic are loc:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 ,$$

ecuația tangentei la curba înfăşurătoare (I) devine:

$$(T_2) : (X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0 ,$$

ceea ce dovedeşte afirmația. ❐

Observația 1.11. Din teorema precedentă rezultă că înfăşurătoarea este tangentă la toate curbele din familie.

Teorema 1.11. Prin eliminarea parametrului α între ecuațiile:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \end{cases}$$

se obține ca soluție singulară şi locul punctelor multiple ale curbelor $(\Gamma_\alpha) : F(x, y, \alpha) = 0$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, dacă acestea există.

Demonstrație. Se presupune că curbele din familia $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, date în reprezentare implicită:

$$(\Gamma_\alpha) : F(x, y, \alpha) = 0, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

admit puncte multiple, fie acestea S_1, S_2, ... (fig. 1.36). În fiecare punct multiplu au loc relațiile:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

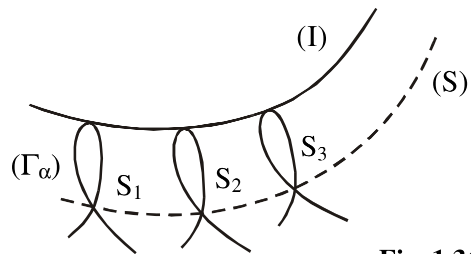


Fig. 1.36.

Curba obținută prin eliminarea lui α între ecuațiile:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \end{cases}$$

se poate scrie în reprezentare parametrică sub forma:

$$\begin{cases} x = x(\alpha), \\ y = y(\alpha). \end{cases}$$

Prin înlocuirea acestor valori în $F(x, y, \alpha) = 0$ se obține o funcție compusă de argument α, identic nulă. Dacă se derivează în raport cu α, se obține:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0.$$

Deoarece în punctele singulare au loc relațiile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

rezultă:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

Aşadar, punctele singulare verifică atât ecuația:

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$

cât şi ecuația:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

adică ele se află pe curba obținută prin eliminarea lui α între ecuațiile:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

În concluzie, dacă se elimină α între relațiile de mai sus, se obține atât înfăşurătoarea (I), cât şi locul punctelor multiple, (S), dacă ele există.

❐

Teorema 1.12. Înfăşurătoarea unei familii de curbe plane, ce depinde de doi parametri legați între ei printr-o relație $\varphi(\alpha, \beta) = 0$:

$$(\Gamma_{\alpha,\beta}) : F(x, y, \alpha, \beta) = 0,\ \varphi(\alpha, \beta) = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

se obține prin eliminarea celor doi parametri α, β între ecuațiile:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ \varphi(\alpha, \beta) = 0, \\ \dfrac{D(F, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Ecuația:

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

determină pe β ca funcție implicită de α, adică:

$$\beta = \beta(\alpha).$$

Dacă se înlocuieşte în ecuația familiei $(\Gamma_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$, se obține:

$$F(x, y, \alpha, \beta(\alpha)) = 0.$$

Prin derivarea acestei funcții în raport cu α, se obține:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Pe de altă parte, se obține:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Dacă se elimină $\frac{d\beta}{d\alpha}$, rezultă:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} & \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0,$$

care se poate scrie:

$$\frac{D(F, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0.$$

Deoarece α şi β verifică şi ecuațiile:

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

rezultă că înfăşurătoarea familiei $(\Gamma_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$, se obține prin eliminarea parametrilor α şi β între aceste trei ecuații.

❒

Exemplul 1.7. Să se determine înfăşurătoarea familiei de cercuri cu centrele pe o hiperbolă echilateră şi care trec prin origine.

Soluție: Ecuația implicită a unei hiperbole echilatere este de forma:

$$(H):\ xy - a = 0.$$

Punctul curent al hiperbolei are coordonatele $M\left(t, \frac{a}{t}\right)$, $t \neq 0$.

Ecuațiile cercurilor cu centrul în M şi care trec prin origine sunt de forma:

$$F(x, y, t) \equiv (x - t)^2 + \left(y - \frac{a}{t}\right)^2 - t^2 - \frac{a^2}{t^2} = 0,\ t \neq 0,$$

sau:

$$F(x, y, t) \equiv x^2 + y^2 - 2\,tx - 2\frac{a}{t}y = 0,\ t \neq 0.$$

Ecuația înfăşurătoarei se obține prin eliminarea parametrului t între ecuațiile sistemului:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0, \\ F'_t(x, y, t) = 0, \end{cases} \quad \text{adică:} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2\,t\,x - 2\frac{a}{t}y = 0, \\ -2\,x + 2\frac{a\,y}{t^2} = 0 \quad \Big|\cdot t\,. \end{cases}$$

Dacă se adună ecuaţiile sistemului de mai sus, după ce în prealabil a doua ecuaţie a fost amplificată cu t, se obţine:

$$t = \frac{x^2 + y^2}{4x}.$$

După înlocuirea lui t într-una din ecuaţiile sistemului, rezultă ecuaţia implicită a înfăşurătoarei:

$$(I): \ (x^2 + y^2)^2 - 16\, a\, xy = 0.$$

❒

§1.11. Evoluta (desfăşurata) unei curbe plane

Dacă se consideră o curbă plană, tangentele la ea constituie o familie de drepte, care depind de un parametru (parametrul curbei), a cărei înfăşurătoare este curba dată (fig. 1.37).

Evident, că şi normalele unei curbe plane constituie o familie de drepte, care depind de un parametru şi anume parametrul ales pe curbă.

Definiţia 1.30. Se numeşte ***evolută*** sau ***desfăşurată*** a unei curbe plane, înfăşurătoarea normalelor ei (fig. 1.38).

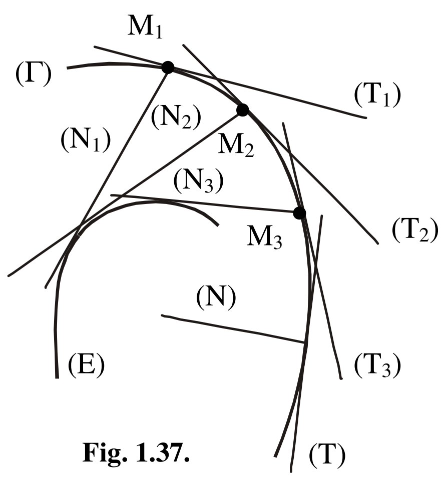


Fig. 1.37.

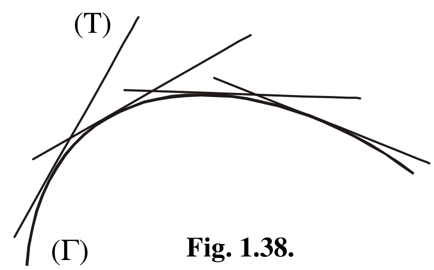


Fig. 1.38.

Observaţia 1.12. Tangentele la evoluta (E) sunt normale la curba dată (Γ).

Teorema 1.13. Fie o curbă plană (Γ) de clasă k, $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$, dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}. \end{cases}$$

Atunci evoluta ei este o curbă plană (E), definită analitic prin relaţiile:

$$(E):\begin{cases} X = x(t) - \dfrac{\dot{y}(t)\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)}{\dot{x}(t)\,\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\,\dot{y}(t)}, \\ Y = y(t) + \dfrac{\dot{x}(t)\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)}{\dot{x}(t)\,\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\,\dot{y}(t)}. \end{cases}$$

Demonstrație. Într-un punct curent, ordinar, $M(x(t), y(t))$ al curbei plane (Γ), normala (N) este dată analitic prin ecuația:

$$(N):[X-x(t)]\,\dot{x}(t)+[Y-y(t)]\,\dot{y}(t)=0,$$

adică o ecuație de forma:

$$F(X, Y, t) = 0, \quad t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R},$$

deci ecuația unei familii de drepte care depinde de parametrul t.

Pentru a determina evoluta (E) trebuie eliminat parametrul t (pentru determinarea ecuației implicite a evolutei), sau trebuie explicitate X și Y funcție de t (pentru determinarea reprezentării parametrice a evolutei), între ecuațiile:

$$\begin{cases} F(X, Y, t) = 0, \\ F'_t\,(X, Y, t) = 0, \end{cases}$$

unde:

$$F'_t = [X-x(t)]\,\ddot{x}(t)+[Y-y(t)]\,\ddot{y}(t)-\dot{x}^2(t)-\dot{y}^2(t).$$

În ipoteza:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

se poate rezolva cu ajutorul formulelor lui Cramer sistemul:

$$\begin{cases} [X-x(t)]\,\dot{x}(t)+[Y-y(t)]\,\dot{y}(t)=0, \\ [X-x(t)]\,\ddot{x}(t)+[Y-y(t)]\,\ddot{y}(t)=\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t), \end{cases}$$

în necunoscutele X – x(t), Y – y(t) și se obține soluția unică:

$$(E):\begin{cases} X = x(t) - \dfrac{\dot{y}(t)\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)}{\dot{x}(t)\,\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\,\dot{y}(t)}, \\ Y = y(t) + \dfrac{\dot{x}(t)\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)}{\dot{x}(t)\,\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\,\dot{y}(t)}, \end{cases}$$

ecuații ce constituie reprezentarea parametrică a evolutei curbei (Γ) date.

❐

Observația 1.13. Coordonatele X și Y ale punctului curent de pe evolută, corespunzător punctului $M(x(t), y(t))$ de pe curba (Γ), au aceleași expresii ca cele ale centrului cercului osculator. Se obține astfel:

Teorema 1.14. Evoluta unei curbe plane este locul geometric al centrelor cercurilor osculatoare ale curbei date.

Exemplul 1.8. Să se determine evoluta elipsei.

Soluție: Dacă se consideră elipsa în reprezentare analitică implicită:

$$(\Gamma):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

înfășurătoarea normalelor (evoluta) are ecuațiile parametrice:

$$(E):\ \begin{cases} x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3\alpha, \\ y=-\dfrac{c^2}{b}\sin^3\alpha, \end{cases} \quad (c^2=a^2-b^2),$$

sau după eliminarea parametrului α se obține ecuația implicită a evolutei:

$$(E):\ (ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(c^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Așadar, evoluta elipsei este o astroidă. ❐

§1.12. Evolventa (desfășurătoarea) unei curbe plane

Definiția 1.31. Se numește ***evolventă*** sau ***desfășurătoare*** a unei curbe plane, curba plană perpendiculară pe tangentele curbei date.

Observația 1.14. Din definiția 1.31 rezultă că evolventa unei curbe plane (Γ) este curba plană, a cărei evolută este curba (Γ).

Observația 1.15. Există o infinitate de evolvente (desfășurătoare) (D), (D'), (D''), ... ale curbei plane (Γ), toate perpendiculare pe tangentele curbei (Γ), deci (D), (D'), (D''), ... sunt ***paralele*** între ele, adică în puncte corespunzătoare tangentele la ele sunt paralele (fig. 1.39).

Observația 1.16. Nu există metode generale simple pentru determinarea ecuației evolventei unei curbe oarecare, însă ea se poate construi prin metode mecanice.

Teorema 1.15. Diferența razelor de curbură în două puncte ale evolventei este egală cu lungimea arcului corespunzător pe curba dată.

Demonstrație. Fie curba plană (Γ) dată în reprezentare naturală:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \quad \text{s parametru natural.} \end{cases}$$

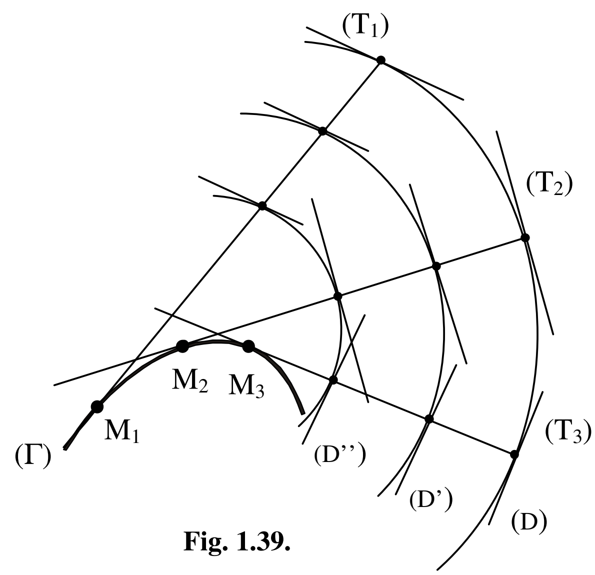


Fig. 1.39.

Fie $M \in (\Gamma)$ şi P punctul în care evolventa (D) întâlneşte tangenta în M la (Γ) (fig. 1.40). Dacă se notează cu R raza de curbură MP, cu α unghiul format de tangenta (T) cu axa (Ox) se obțin coordonatele X şi Y ale punctului P exprimate prin:

$$\begin{cases} X = x + R\cos\alpha, \\ Y = y + R\sin\alpha. \end{cases}$$

Din demonstrația teoremei 1.2 se obține:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{s}^2} = 1,$$

rezultă că $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ sunt cosinuşii directori ai tangentei (T):

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \\ \frac{dy}{ds} = \sin\alpha. \end{cases}$$

Atunci se obțin pentru X şi Y expresiile:

$$\begin{cases} X = x + R\frac{dx}{ds}, \\ Y = y + R\frac{dy}{ds}. \end{cases}$$

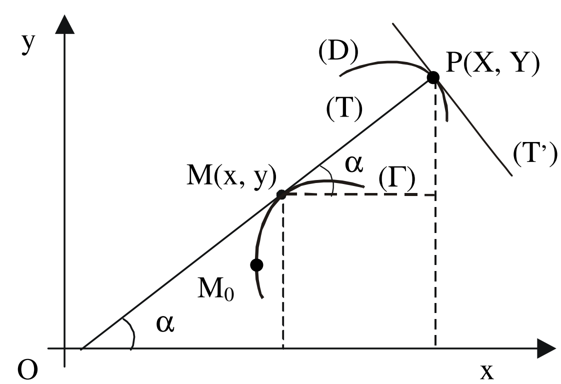


Fig. 1.40.

Tangenta (T') în P la evolventa (D) are parametrii directori $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$ şi cum ea este perpendiculară pe tangenta (T), rezultă că există relația:

$$\frac{dX}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{dY}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} = 0,$$

relație care devine, dacă se ține cont de expresiile X şi Y:

$$\left(\frac{dx}{ds} + \frac{dR}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} + R\frac{d^2x}{ds^2}\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{dR}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + R\frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{dy}{ds} = 0,$$

sau prin gruparea termenilor:

$$\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]+\frac{dR}{ds}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]+R\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)=0,$$

sau încă:

$$\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]\cdot\left(1+\frac{dR}{ds}\right)+R\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)=0.$$

Prin derivarea relației:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1,$$

se obține:

$$2\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}\right)=0.$$

De unde, prin înlocuirea acestei relații în condiția de ortogonalitate rezultă:

$$1+\frac{dR}{ds}=0,$$

care integrată conduce la relația:

$$R(s) = -s + k,$$

formulă valabilă pentru orice poziție a punctului $M \in (\Gamma)$, deci a lui $P \in (D)$ corespunzător.

Fie pe curba (Γ) două puncte M_1 și M_2, cărora le corespund punctele P_1 și P_2 pe evolventa (D) (fig. 1.41), se obține pe de o parte:

$$\overset{\frown}{M_0M_1} = s_1, \qquad \overset{\frown}{M_0M_2} = s_2,$$

iar pe de altă parte:

$$R_1 + s_1 = k,$$
$$R_2 + s_2 = k,$$

relații care prin scădere conduc la:

$$R_1 - R_2 = s_2 - s_1 = \overset{\frown}{M_0M_2} - \overset{\frown}{M_0M_1},$$

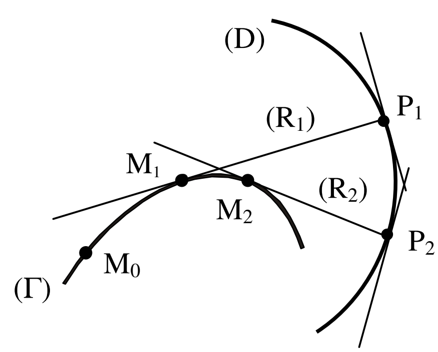


Fig. 1.41.

adică:

$$R_1 - R_2 = \overset{\frown}{M_1M_2}.$$

❒

Observația 1.17. Teorema 1.15 conduce la următoarea construcție mecanică a evolventei unei curbe plane (Γ): se întinde un fir inextensibil, de lungime k, de-a lungul curbei (Γ), cu începere din M_0, originea arcelor. Dacă se desfăşoară firul, ținându-l întins aşa încât să rămână mereu tangent la curba (Γ), extremitatea acestui fir va descrie evolventa (desfăşurătoarea) (D) a curbei (Γ).

Exemplul 1.9. Se consideră lănțişorul:

$$(\Gamma): \; y = a \,\mathrm{ch}\, \frac{x}{a}.$$

Se cere:

a) Să se determine lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$ cuprins între punctul minim A şi punctul curent al lănțişorului M(x, y) şi să se verifice relația:

$$y_A^2 + \left(L_{\overset{\frown}{AM}}\right)^2 = y_M^2, \qquad \text{(fig. 1.42).}$$

b) Să se arate că raza de curbură R a lănțişorului într-un punct M al curbei este egală cu lungimea segmentului de normală, s_n, cuprins între punctul M şi axa (Ox).

c) Să se deducă ecuațiile parametrice ale evolventei sale (fig. 1.42).

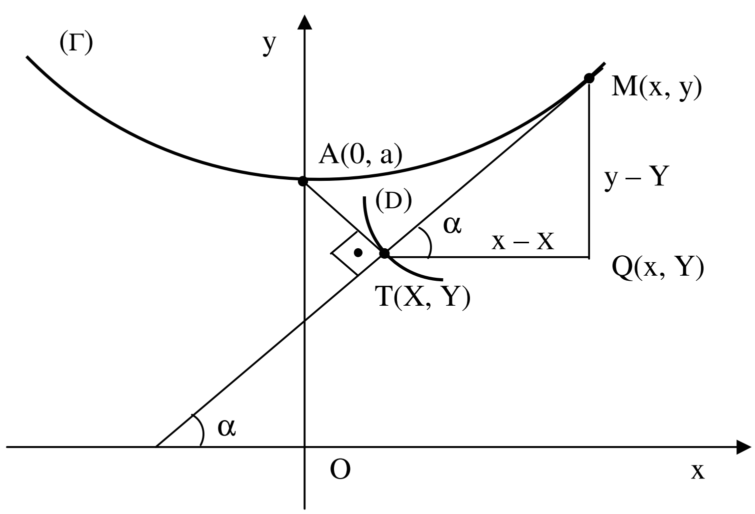


Fig. 1.42.

Soluție: a) Coordonatele punctului de minim A sunt: (0, a). Atunci lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$ este:

$$L_{\overset{\frown}{AM}} = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = a \,\mathrm{sh}\, \frac{x}{a}$$

şi relația anunțată se verifică imediat:

$$y_A^2 + \left(L_{\overset{\frown}{AM}}\right)^2 = a^2 + a^2 \,\mathrm{sh}^2 \frac{x}{a} = a^2 \,\mathrm{ch}^2 \frac{x}{a} = y_M^2.$$

b) Pentru curba dată au loc relațiile:

$$R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|y''\right|} = a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}, \quad s_n = |y|\sqrt{1+y'^2} = a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}\ ,$$

de unde se obține egalitatea:

$$R = s_n.$$

c) Dacă T(X, Y) descrie evolventa (D), atunci:

$$MT = L_{\overset{\frown}{AM}} = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}.$$

Din triunghiul dreptunghic MTQ rezultă:

$$TQ = MT\cos\alpha,$$

în care:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}.$$

Prin urmare, se obține:

$$TQ = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = a\ \mathrm{th}\,\frac{x}{a}$$

şi respectiv:

$$MQ = TM\sin\alpha = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\ \mathrm{th}\,\frac{x}{a}.$$

Are loc relația:

$$MT^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2,$$

dar din triunghiul dreptunghic MTQ rezultă:

$$MT^2 = TQ^2 + MQ^2.$$

Deci, ecuațiile parametrice ale evolventei sunt, următoarele:

$$(D):\begin{cases} X = x - \mathrm{th}\dfrac{x}{a}, \\ Y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a} - a\,\dfrac{\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}}{\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}. \end{cases}$$

❐

§1.13. Teorema fundamentală a teoriei curbelor plane

Fie curba plană (Γ) de clasă k, $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$ a cărei reprezentare naturală este:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \quad \text{s parametru natural.} \end{cases}$$

Dacă se notează cu θ unghiul format de tangenta la (Γ) în punctul M(s), cu axa (Ox) şi se ține seama de relația:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

rezultă:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\theta. \tag{1.7}$$

Atunci curbura curbei (Γ) ia o formă simplă:

$$K = \frac{d\theta}{ds}.$$

Observația 1.18. Din rezultatul obținut mai sus pentru curbură, rezultă că se poate interpreta curbura unei curbe plane ca fiind viteza de variație în raport cu lungimea arcului, a unghiului format de tangenta la curbă cu axa (Ox).

Teorema 1.16 (de existență pentru curbe plane). Fie funcția continuă $K = K(s)$, $s \in [a, b] \subset [0, \infty)$, astfel încât $K(s) \geq 0$ pentru orice $s \in [a, b]$. Atunci există o curbă plană care admite o parametrizare naturală în funcție de s şi admite pe K(s) drept curbură. Două curbe care satisfac condițiile de mai sus coincid printr-o translație şi o rotație.

***Demonstrație*.** Dacă există două curbe plane cu proprietățile din enunț, prin translația eventual a uneia dintre ele se poate presupune că acestea se intersectează în s = a. De asemenea, dacă se roteşte eventual una dintre curbe, se poate presupune în plus, că în s = a, ele au aceeaşi tangentă.

Din formula curburii:

$$\frac{d\theta}{ds} = K(s),$$

se obține:

$$\theta(s) = \int_a^s K(s)\,ds$$

şi prin introducerea în formulele (1.7) rezultă ecuațiile:

$$\begin{cases} x(s) = \int_a^s \cos\left(\int_a^s K(s)\, ds\right) ds, \\ y(s) = \int_a^s \sin\left(\int_a^s K(s)\, ds\right) ds, \end{cases}$$

care determină în mod unic curba cu proprietățile cerute. ❐

§1.14. Clase remarcabile de curbe plane. Curbe speciale

Definiția 1.32. Se numeşte ***curbă unicursală*** o curbă ale cărei ecuații parametrice exprimă coordonatele (x, y) ale unui punct oarecare al curbei, ca funcții raționale de un parametru t.

Teorema 1.17. O curbă plană (Γ) a cărei ecuație implicită este:

$$(\Gamma) : \ P_n(x, y) + P_{n-1}(x, y) = 0,$$

unde $P_p(x, y)$ este polinom omogen de grad p, este o curbă unicursală.

Demonstrație. Dacă se intersectează curba (Γ) cu dreapta (d) de ecuație:

$$(d) : \ y = tx,$$

se obține:

$$P_n(x, tx) + P_{n-1}(x, tx) = 0,$$

$$x^n P_n(1, t) + x^{n-1} P_{n-1}(1, t) = 0.$$

Rezultă rădăcina simplă:

$$x = -\frac{P_{n-1}(1, t)}{P_n(1, t)} \tag{1.8}$$

şi rădăcina multiplă de ordinul (n-1), x = 0.

Deci dreapta intersectează curba (Γ) în (n-1) puncte confundate în O(0, 0) şi în punctul M de coordonate:

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = -\dfrac{P_{n-1}(1, t)}{P_n(1, t)}, \\ y = -\dfrac{t\, P_{n-1}(1, t)}{P_n(1, t)}. \end{cases}, \tag{1.9}$$

Când (d) se roteşte în jurul lui O, t - care este coeficientul ei unghiular - variază de la $-\infty$ la $+\infty$, iar M descrie curba (Γ). Rezultă că (1.9) sunt ecuațiile parametrice ale curbei (Γ) şi cum x, y sunt funcții raționale t, curba este unicursală.

❐

Teorema 1.18. O curbă (Γ) a cărei ecuație în coordonate polare este de forma:

$$(\Gamma) : \rho = f(\sin\theta, \cos\theta),$$

unde f este o funcție rațională, este unicursală.

Demonstrație. Dacă se consideră $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$, atunci $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$, iar $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Prin substituirea acestora în ecuație se obține:

$$\rho = f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

Rezultă coordonatele carteziene ale unui punct curent al curbei (Γ):

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = \rho\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\, f\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right), \\ y = \rho\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}\, f\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right), \end{cases}$$

ceea ce demonstrează că (Γ) este o curbă unicursală. ❒

Exemplul 1.10. Să se arate că următoarea cubică:

(Γ) : $x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$ (folium-ul lui Descartes)

este o curbă unicursală.

Soluție: Curba (Γ) are drept polinoame omogene:

$$P_3(x, y) = x^3 + y^3, \qquad P_2(x, y) = -3\,axy.$$

Rezultă:

$$x = -\frac{P_2(1,t)}{P_3(1,t)}, \quad y = -\frac{t\,P_2(1,t)}{P_3(1,t)},$$

deci:

$$(\Gamma) : \quad x = \frac{3\,at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3\,at^2}{1+t^3},$$

adică folium-ul lui Descartes este o curbă unicursală. ❒

Exemplul 1.11. Se consideră în coordonate polare, cardioida:

$$(\Gamma) : \rho = a(1 + \cos\theta).$$

Să se arate că ea este o curbă unicursală.

Soluție: Coordonatele carteziene ale punctului $M(\theta, \rho)$ sunt:

$x = \rho \cos \theta$ şi $y = \rho \sin \theta$.

Rezultă că cele ale unui punct de pe cardioidă sunt:

$x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta$ şi $y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta$.

Dacă se notează $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$, atunci:

$$\sin \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{iar} \quad \cos \theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Prin urmare, coordonatele carteziene x, y ale unui punct curent de pe cardioidă au expresiile:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \\ y = \dfrac{4at}{(1+t^2)^2}, \end{cases}$$

deci cardioida este o curbă unicursală. ❒

Definiția 1.33. Locul geometric al proiecțiilor unui punct fix I pe tangentele la o curbă plană dată (Γ) se numeşte ***podara*** punctului I față de (Γ).

Teorema 1.19. Se consideră curba plană (Γ) dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(t), t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}$$

şi punctul I de vector de poziție $\bar{r}_0 = x_0 \bar{i} + y_0 \bar{j}$ (fig. 1.43).

Atunci: 1° Reprezentarea vectorială a podarei este:

$$(P): \overline{R} = \bar{r} - \frac{(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \dot{\bar{r}}}{\dot{\bar{r}}^2} \cdot \dot{\bar{r}},$$

unde $\overline{R}$ este vectorul de poziție al punctului curent al podarei.

2° Reprezentarea analitică parametrică a podarei este:

$$(P): \begin{cases} X = x - \dfrac{(x - x_0) \cdot \dot{x} + (y - y_0) \cdot \dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{x}, \\ Y = y - \dfrac{(x - x_0) \cdot \dot{x} + (y - y_0) \cdot \dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{y}. \end{cases}$$

Demonstrație. 1° Se determină vectorul de poziție $\overline{R}$ al proiecției P a punctului I pe vectorul tangent $\dot{\bar{r}}$ dus într-un punct oarecare $M(\bar{r})$ al curbei (Γ). Are loc relația:

$$\overline{R} = \bar{r} + \lambda\,\dot{\bar{r}}.$$

Pentru a determina pe λ se consideră vectorul:

$$\overline{R} - \bar{r}_0 = \bar{r} + \lambda\,\dot{\bar{r}} - \bar{r}_0,$$

perpendicular pe $\dot{\bar{r}}$, deci:

$$\left(\bar{r} - \bar{r}_0 + \lambda\,\dot{\bar{r}}\right)\cdot\dot{\bar{r}} = 0,$$

de unde rezultă:

$$\lambda = -\frac{\left(\bar{r} - \bar{r}_0\right)\cdot\dot{\bar{r}}}{\dot{\bar{r}}^2}.$$

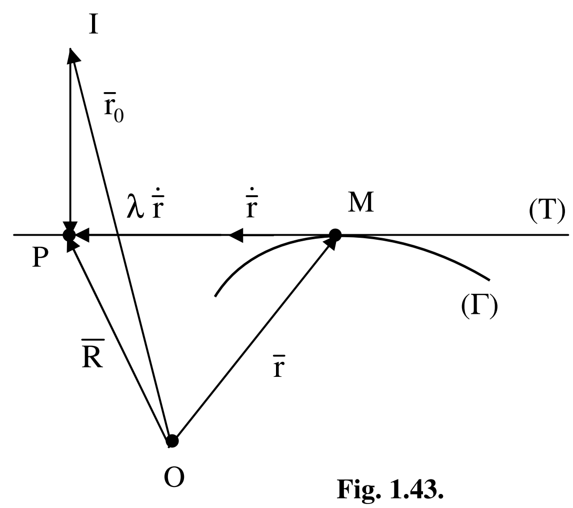


Fig. 1.43.

2° Dacă:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}, \end{cases}$$

sunt ecuațiile parametrice ale unei curbe plane (Γ), se consideră $I(x_0, y_0)$.

Se notează P(X, Y) coordonatele proiecției lui $I(x_0, y_0)$ pe o tangentă în M(x, y), atunci prin transcrierea analitică a ecuației vectoriale a podarei, obținută la 1°, rezultă relațiile:

$$(P):\begin{cases} X = x - \dfrac{\left(x - x_0\right)\cdot\dot{x} + \left(y - y_0\right)\cdot\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\cdot\dot{x}, \\ Y = y - \dfrac{\left(x - x_0\right)\cdot\dot{x} + \left(y - y_0\right)\cdot\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\cdot\dot{y}. \end{cases}$$

❒

Observația 1.19. În cazul când $I(x_0, y_0)$ este chiar originea, atunci formulele precedente devin:

$$(P):\begin{cases} X = \dfrac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\cdot\dot{y}, \\ Y = -\dfrac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\cdot\dot{x}. \end{cases}$$

❒

Exemplul 1.12. Să se determine podara elipsei în raport cu centrul său.

Soluție: Ecuațiile parametrice ale podarei sunt:

$$(P): \begin{cases} X = x - \dfrac{\dot{x}(x-x_0)+\dot{y}(y-y_0)}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\cdot\dot{x}, \\ Y = y - \dfrac{\dot{x}(x-x_0)+\dot{y}(y-y_0)}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\cdot\dot{y}. \end{cases}$$

Podara elipsei:

$$(E): \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

are ecuațiile:

$$(P): \begin{cases} X = \dfrac{ab^2\cos t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}, \\ Y = \dfrac{a^2 b\sin t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}. \end{cases}$$

Prin eliminarea parametrului t se obține ecuația implicită a podarei:

$$(P):\ a^2X^2 + b^2Y^2 - (X^2+Y^2)^2 = 0,$$

adică podara elipsei în raport cu centrul său este lemniscata lui Booth. ❒

§1.15. Câteva considerații asupra curbelor în reprezentare polară

Este binecunoscut din geometria analitică plană că în unele probleme de geometrie plană, mecanică şi fizică matematică în plan este util a considera sistemul de ***coordonate polare*** alcătuit dintr-un punct O numit ***pol*** şi dintr-o semidreaptă (Ox) care trece prin pol, numită ***axă polară***.

Poziția unui punct M din plan este determinată când se cunosc: distanța ρ de la punctul M la polul O şi unghiul θ ($\theta \in [0, 2\pi]$), măsurat în sens trigonometric de la axa polară la raza vectoare OM a punctului M.

Legătura între coordonatele carteziene x, y ale punctului M într-un reper cartezian ortonormat $\{0, \bar{i}, \bar{j}\}$ şi coordonatele polare ρ, θ ale aceluiaşi punct în reperul polar cu axa polară drept partea pozitivă a axei (Ox) este dată de formulele:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ x = \rho\sin\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Din această cauză, un arc al unei curbe plane, care în orice punct al său îndeplineşte condițiile de regularitate, poate fi obținut şi ca locul geometric al punctelor din plan care satisfac ecuații de genul:

$$\rho = \rho(\theta),$$

sau:

$$H(\rho, \theta) = 0,$$

în care funcțiile ρ şi H satisfac condiții de regularitate uşor de formulat.

Se vor face în continuare unele considerații simple asupra curbelor date în reprezentarea polară:

$$\rho = \rho(\theta).$$

Din relațiile:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ x = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

se obține prin diferențiere:

$$dx = \cos\theta \, d\rho - \rho \sin\theta \, d\theta, \quad dy = \sin\theta \, d\rho + \rho \cos\theta \, d\theta,$$

care determină pentru elementul de arc al unei curbe expresia:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2 = \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2\right](d\theta)^2.$$

Cu alte cuvinte, dacă $\overset{\frown}{AB}$ este un arc al unei curbe plane (Γ), dată în reprezentarea polară:

$$(\Gamma) : \rho = \rho(\theta),$$

atunci pentru lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ se obține formula:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\theta, \ \left(\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}\right).$$

Teorema 1.20. Se consideră o curbă plană (Γ), reprezentată în coordonate polare prin ecuația:

$$(\Gamma) : \rho = \rho(\theta).$$

Atunci tangenta unghiului β format de raza vectoare cu tangenta la curbă este dată de formula:

$$\text{tg}\, \beta = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Demonstrație. Fie M un punct oarecare al curbei plane (Γ) date în reprezentarea polară:

$$(\Gamma) : \rho = \rho(\theta).$$

În punctul M se duce raza vectoare OM şi tangenta (T), care formează între ele unghiul β (fig. 1.44). Dacă se notează cu φ unghiul tangentei cu axa (Ox) se obține:

$$\varphi = \theta + \beta,$$

sau:

$$\beta = \varphi - \theta,$$

de unde:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\varphi - \theta) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \theta} = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta \, dy - \sin \theta \, dx}{\cos \theta \, dx + \sin \theta \, dy}.$$

Dacă se înlocuiesc dx, dy în ultima egalitate, după reducerea termenilor asemenea se obține:

$$\operatorname{tg} \beta = \rho \frac{d\theta}{d\rho},$$

relație care conduce la:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}}.$$

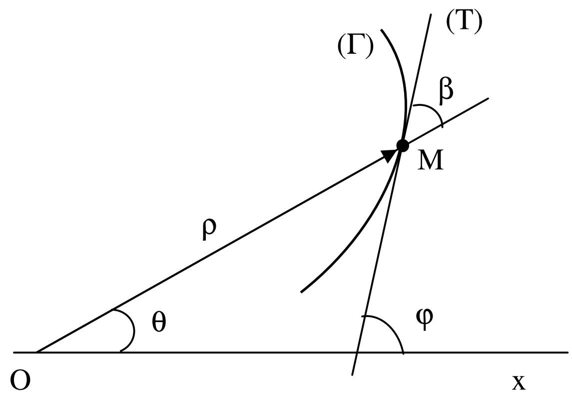


Fig. 1.44.

❐

Fie M un punct al curbei plane (Γ) date în reprezentare polară:

$$(\Gamma) : \rho = \rho(\theta)$$

şi o dreaptă (PP') perpendiculară în O pe raza vectoare OM (fig. 1.45).

Dacă se notează cu T, respectiv N, intersecția dintre dreapta tangentă, respectiv dreapta normală, în punctul M la (Γ) şi dreapta (PP'), se pun în evidență următoarele segmente: ***segmentul tangentă polară*** $\left(s_{tg_p} = MT\right)$, ***segmentul normală polară*** $\left(s_{n_p} = MN\right)$, ***segmentul subtangentă polară*** $\left(s_{stg_p} = TO\right)$ şi ***segmentul subnormală polară*** $\left(s_{sn_p} = NO\right)$.

Dacă se ține cont de formula:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{\rho'},$$

se obțin cu uşurință formulele:

$$s_{stg_p} = \left|\frac{\rho^2}{\rho'}\right|, \qquad S_{sn_p} = |\rho'|, \qquad s_{tg_p} = \left|\frac{\rho}{\rho'}\right| \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}, \qquad S_{n_p} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Teorema 1.21. Se consideră curba plană (Γ) dată în reprezentare polară:

$$(\Gamma) : \rho = \rho(\theta).$$

Atunci curbura acesteia este dată de expresia:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{3/2}}.$$

Demonstrație. Se consideră pe curba plană (Γ) dată în reprezentare polară:

$$(\Gamma) : \rho = \rho(\theta),$$

două puncte infinit apropiate M şi $\overline{M}$, ale căror tangente (T) şi $(\overline{T})$ în aceste puncte, formează unghiul de contingență $\Delta\alpha$. Se notează cu β şi $\beta + \Delta\beta$ unghiurile formate de razele vectoare şi tangentele în punctele M, respectiv $\overline{M}$ (fig. 1.46).

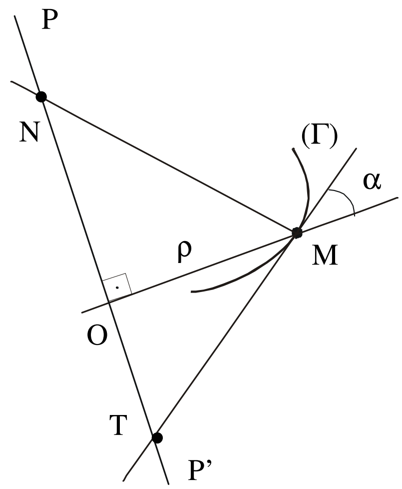


Fig. 1.45.

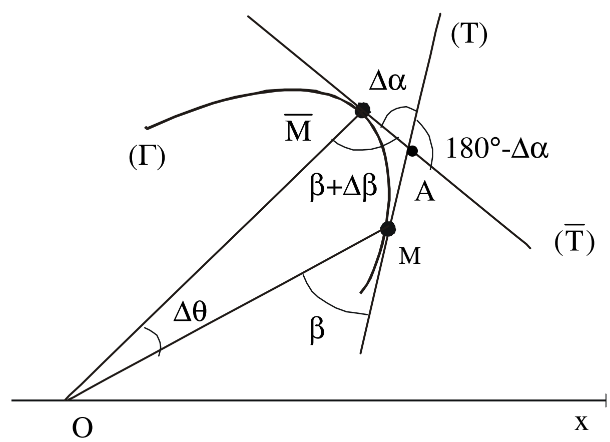


Fig. 1.46.

În patrulaterul $OMA\overline{M}$ are loc:

$$\Delta\theta + 180^0 - \beta + 180^0 - \Delta\alpha + \beta + \Delta\beta = 360^0,$$

de unde:

$$\Delta\alpha = \Delta\theta + \Delta\beta.$$

Prin aplicarea definiției 1.21, date curburii medii se obține:

$$K_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta + \Delta\beta}{\Delta s} = \frac{1 + \frac{\Delta\beta}{\Delta\theta}}{\frac{\Delta s}{\Delta\theta}},$$

iar prin aplicarea definiției 1.22 date curburii, se obține:

$$K = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{1 + \frac{\Delta\beta}{\Delta\theta}}{\frac{\Delta s}{\Delta\theta}} = \frac{1 + \frac{d\beta}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}}, \ (\Delta s \to 0 \text{ şi } \Delta\theta \to 0).$$

În ultima egalitate numitorul este cunoscut:

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2}\,,$$

iar pentru numărător se foloseşte relația:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}}\,,$$

sau:

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{\rho}{\rho'}\,.$$

Se obține:

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{1}{1+\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2}\cdot\frac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho'^2} = \frac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2+\rho'^2}$$

şi deci:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{1+\frac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2+\rho'^2}}{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{1/2}} = \frac{\rho^2+2\,\rho'^2-\rho\rho''}{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{3/2}}\,.$$ ❐

În scopul stabilirii relațiilor care dau coordonatele centrului cercului osculator la curba dată în reprezentare polară:

$$(\Gamma) : \rho = \rho(\theta),$$

se derivează de două ori formulele:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

se ține cont că ρ este funcție de θ şi se obține:

$$\frac{dx}{d\theta} = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta\,, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta\,,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \rho''\cos\theta - 2\rho'\sin\theta - \rho\cos\theta\,, \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = \rho''\sin\theta + 2\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta\,,$$

de unde:

$$x'^2+y'^2=\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\rho^2+\rho'^2,$$

$$x'y''-x''y'=\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{d^2x}{d\theta^2}\cdot\frac{dy}{d\theta}=\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''.$$

Se obțin pentru coordonatele α, β ale centrului cercului osculator formulele:

$$\begin{cases}\alpha=\rho\cos\theta-\dfrac{(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)(\rho^2+\rho'^2)}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''},\\ \beta=\rho\sin\theta+\dfrac{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)(\rho^2+\rho'^2)}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}.\end{cases}$$

❒

§1.16. Probleme propuse

1. Să se arate că următoarea cubică:

$(\Gamma) : (x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ (cisoida lui Diocles),

este o curbă unicursală şi să se scrie ecuațiile ei parametrice.

2. Să se scrie ecuațiile tangentelor şi normalelor la curba plană:

$(\Gamma) : y = \cos x$,

în punctele A, B, C de abscise 0, $\frac{\pi}{2}$, π.

3. Să se scrie ecuațiile tangentelor şi normalelor la curba plană dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma) : \begin{cases}x=\dfrac{1}{t+1},\\ y=\dfrac{t}{t+1},\end{cases}$$

în punctele A(t = 1), B(t = 0).

4. Să se scrie ecuațiile tangentelor şi normalelor la curba dată în reprezentare implicită:

$(\Gamma) : x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$,

în punctul $A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$.

5. Se consideră curba plană de ecuație vectorială:

$$(\Gamma):\ \bar{r} = \left(t^2 - 1\right)\bar{i} + \left(t^3 + 1\right)\bar{j}.$$

Să se determine tangentele la curbă, paralele cu dreapta de ecuație:

$$(d) : 2\,x - y + 3 = 0.$$

6. Să se demonstreze următoarea proprietate geometrică a curbei lănțișor: tangenta într-un punct M al curbei este perpendiculară pe segmentul [AQ] dus din vârful A al lănțișorului, având lungimea ordonatei punctului M egală cu abscisa punctului Q aflat pe (Ox).

7. Să se demonstreze că tangenta într-un punct oarecare $M_0(x_0,\ y_0)$ al lănțișorului: $(\Gamma): y = a\,\text{ch}\,\dfrac{x}{a}$ este paralelă cu una din tangentele duse din punctul T de pe axa (Oy), care are aceeași ordonată cu M_0, la cercul cu centrul în originea axelor de coordonate şi a cărui rază este egală cu segmentul cuprins între vârful lănțişorului şi origine.

8. Să se găsească lungimile segmentelor: tangentă, subtangentă, normală, subnormală ale curbei:

$$(\Gamma) : y = \text{tg}\ x,$$

în punctul A de abscisă $\dfrac{\pi}{4}$.

9. Se consideră curba plană:

$$(\Gamma):\ \bar{r} = t\,\bar{i} + \left(t^2 + \frac{1}{t}\right)\bar{j}$$

şi un segment $[M_1M_2]$ cu extremitățile M_1, M_2 situate pe ea, al cărui mijloc se află pe axa (Oy). Să se demonstreze că tangentele duse în M_1, M_2 la curbă se intersectează pe curbă.

10. Să se găsească familia de curbe plane care au subnormalele constante: k.

11. Să se determine podara hiperbolei:

$$(\Gamma):\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

în raport cu originea.

12. Să se afle înfăşurătoarea familiei de cercuri:

$$(\Gamma_\lambda) : x^2 + y^2 - 2\,\lambda\,x + \lambda^2 - 4\,\lambda = 0.$$

13. Să se găsească înfăşurătoarea familiei de drepte, pentru care suma tăieturilor pe axele de coordonate este constantă.

14. Să se determine evoluta unei parabole.

15. Să se determine evoluta hiperbolei.

16. Să se găsească ordinul contactului în origine al curbelor plane:

$$(\Gamma_1): \ y = x^4, \qquad (\Gamma_2): \ y = x^2 \sin^2 x.$$

17. Să se găsească raza de curbură a cicloidei într-un punct oarecare M şi să se arate că aceasta este egală cu dublul segmentului normală, cuprins între punctul M şi axa (Ox).

18. Să se scrie ecuația cercului osculator al curbei:

$$(\Gamma): y = \sin x,$$

în punctul $A\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

19. Să se determine curbura curbei plane:

$$(\Gamma): x^3 - y^3 + 2\,xy = 0,$$

în punctul M(1, –1).

20. Să se studieze punctul singular al folium-ului lui Descartes:

$$(\Gamma): \ x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$$

şi să se scrie ecuațiile tangentelor în acest punct.

21. Să se studieze punctul singular al cisoidei lui Diocles:

$$(\Gamma): \ (x^2 + y^2)\,x - ay^2 = 0$$

şi să se scrie ecuațiile tangentelor în acest punct.

22. Să se studieze punctele singulare ale concoidei:

$$(\Gamma): \ (x^2 + y^2)\,(x - a)^2 - b^2x^2 = 0$$

şi să se scrie ecuațiile tangentelor în aceste puncte.

23. Să se construiască curba plană a cărei ecuație vectorială este:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = t\,(3 - t^2)\,\bar{i} + 3\,t^2\,\bar{j}.$$

Capitolul 2

ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ A CURBELOR ÎN SPAȚIU

§2.1. Reprezentarea analitică a curbelor în spațiu

Definiția 2.1. Se numeşte ***arc simplu*** de curbă în spațiu o mulțime (Γ) de puncte M din spațiul euclidian real cu trei dimensiuni $\mathbb{R}^3$, ale căror coordonate x, y, z în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ al lui $\mathbb{R}^3$ şi vectori de poziție $\bar{r}$ satisfac una din următoarele relații:

$$(\Gamma): \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$(\Gamma): \begin{cases} z = f(x, y), \\ z = g(x, y),\ x \in (x_1, x_2),\ y \in (y_1, y_2), \end{cases} \tag{2.2}$$

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t),\ t \in (t_1, t_2), \end{cases} \tag{2.3}$$

$$(\Gamma):\ \bar{r} = \bar{r}(t), t \in (t_1, t_2), \tag{2.4}$$

unde funcțiile F, G, f, g, x, y, z, $\bar{r}$ satisfac condițiile:

i) sunt reale, uniforme şi continue,

ii) funcțiile x, y, z stabilesc o corespondență biunivocă şi bicontinuă între punctele $M \in (\Gamma)$ şi mulțimea valorilor parametrului real t $(t \in (t_1, t_2))$,

iii) admit derivate de ordinul întâi continue.

Relațiile (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) se numesc respectiv ***reprezentarea analitică implicită*** sau ***ecuațiile implicite*** ale arcului simplu de curbă în spațiu (Γ), ***reprezentarea analitică explicită*** sau ***ecuațiile explicite*** ale arcului simplu de curbă în spațiu (Γ), ***reprezentarea analitică parametrică*** sau ***ecuațiile parametrice*** ale arcului simplu de curbă în spațiu (Γ) şi ***reprezentarea analitică vectorială*** sau ***ecuația vectorială*** a arcului simplu de curbă în spațiu (Γ).

Observația 2.1. Un arc de curbă simplu admite o infinitate de reprezentări parametrice. Într-adevăr, dacă $t = t(t^*)$, unde $t^* \in (t_1^*, t_2^*)$ este un parametru real, atunci reprezentarea parametrică (2.3) devine:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x\big(t(t^*)\big), \\ y = y\big(t(t^*)\big), \\ z = z\big(t(t^*)\big), \; t^* \in (t_1^*, t_2^*), \end{cases}$$

adică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x^*\big(t^*\big), \\ y = y^*\big(t^*\big), \\ z = z^*\big(t^*\big), \; t^* \in (t_1^*, t_2^*). \end{cases}$$

Definiția 2.2. Se numeşte ***arc regulat*** de curbă în spațiu o mulțime (Γ) de puncte M din spațiul $\mathbb{R}^3$, ale căror coordonate x, y, z în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ al lui $\mathbb{R}^3$ şi vectori de poziție $\bar{r}$ verifică una din relațiile (2.1), (2.2), (2.3) sau (2.4) unde funcțiile F, G, f, g, x, y, z, $\bar{r}$ satisfac următoarele condiții numite ***de regularitate***:

i) sunt reale, uniforme şi continue,

ii) funcțiile x, y, z, $\bar{r}$ stabilesc o corespondență biunivocă şi bicontinuă între punctele $M \in (\Gamma)$ şi mulțimea valorilor parametrului real t $\big(t \in (t_1, t_2)\big)$,

iii) admit derivate de ordinul întâi continue, nu toate nule,

iv) cel puțin unul dintre determinanții funcționali (jacobienii):

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}, \; \frac{D(F,G)}{D(z,x)}, \; \frac{D(F,G)}{D(x,y)},$$

este diferit de zero.

Definiția 2.3. Fie (Γ) un arc regulat de curbă în spațiu. Se spune că (Γ) este un ***arc de curbă regulat de ordinul n*****,** sau ***de clasă n*** dacă funcțiile F, G, f, g, x, y, z, $\bar{r}$ din relațiile (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) admit derivate (parțiale, respectiv ordinare) continue până la şi inclusiv ordinul $n > 1$, astfel încât nu toate derivatele de acelaşi ordin să se anuleze.

Definiția 2.4. Fie $(\Gamma_i)_{i \in I}$ o mulțime de arce de curbă regulate de ordinul n, care au extremitățile, eventual, puncte singulare. Se numeşte ***curbă regulată de ordinul n***, sau ***de clasă n***, reuniunea arcelor (Γ_i), adică:

$$(\Gamma) = \bigcup_{i \in I} (\Gamma_i).$$

Observația 2.2. În această teorie vor interveni numai curbe regulate de ordinul n, care se vor numi, pe scurt, ***curbe***.

Definiția 2.5. Se numeşte ***punct ordinar*** al curbei în spațiu (Γ), un punct $M \in (\Gamma)$ în care sunt satisfăcute toate condițiile de regularitate. În caz contrar (cel puțin una din condițiile de regularitate nu este satisfăcută), punctul se numeşte ***singular***.

Observația 2.3. Punctele singulare sunt de două categorii: ***puncte singulare proprii***: sunt puncte singulare în orice reprezentare analitică a curbei în spațiu (Γ) şi ***puncte singulare improprii***: există cel puțin o reprezentare analitică a lui (Γ), în care punctul să nu fie singular.

Exemplul 2.1. Să se determine ecuația vectorială a curbei situate la intersecția suprafețelor:

$$(\Gamma) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax, \text{ (curba Viviani).} \end{cases}$$

Soluție: Se observă că această curbă este simetrică față de planele (xOy) şi (xOz). Se consideră $x = a \sin^2 t$ şi se înlocuieşte în cea de-a doua ecuație, de unde se obține:

$$y = \pm \frac{a}{2} \sin 2t.$$

Prin înlocuirea lui $x = a \sin^2 t$ şi $y = \pm \frac{a}{2} \sin 2t$ în prima ecuație se obține:

$$a^2 \sin^4 t + \frac{a^2}{4} \sin^2 2t + z^2 = a^2,$$

$$z^2 = a^2 \left(1 - \sin^4 t - \frac{\sin^2 2t}{4} \right).$$

Dacă se ține cont că $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$, iar $\sin^4 t = \frac{1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t}{4}$, atunci:

$$z^2 = a^2 \left(\frac{4 - 1 + 2\cos 2t - 1}{4} \right) = a^2 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) = a^2 \cos^2 t,$$

$$z = \pm a \cos t.$$

Astfel, ecuația vectorială a unei porțiuni a curbei date este:

$$(\Gamma) : \ \bar{r} = a \left(\sin^2 t\, \bar{i} + \frac{1}{2} \sin 2t\, \bar{j} + \cos t\, \bar{k} \right).$$

❐

§2.2. Lungimea unui arc regulat de curbă. Element de arc

Fie o curbă în spațiu (Γ) dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma):\ \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in (\alpha, \beta).$$

Se consideră arcul $\overset{\frown}{AB}$ pe această curbă astfel încât $A(t = t_0 = a)$ şi $B(t = t_n = b)$, unde $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$. Se împarte arcul $\overset{\frown}{AB}$ în subarce prin punctele $M_0 \equiv A, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, $M_n \equiv B$. Se formează astfel o linie poligonală înscrisă în arcul $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 2.1).

Se notează norma vectorului $\overline{M_i M_{i+1}}$ prin l_i:

$$l_i = \left\| \overline{M_i M_{i+1}} \right\|,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Definiția 2.6. Se numeşte ***lungime a arcului*** $\overset{\frown}{AB}$ expresia:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|l_i|\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} l_i\,,$$

dacă această limită există şi este unică.

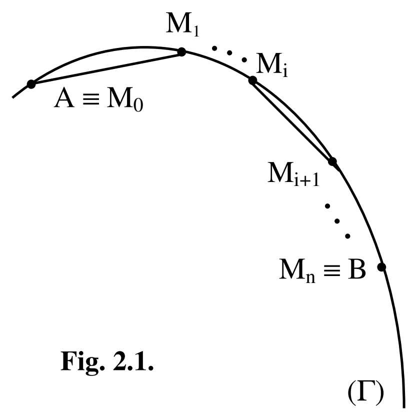


Fig. 2.1.

Observația 2.4. Lungimea arcului AB se notează prin s.

Deci:

$$s = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|l_i|\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} l_i\,.$$

Definiția 2.7. Un arc de curbă în spațiu (Γ) se spune că este ***rectificabil*** dacă:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|l_i|\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} l_i$$

există şi este unică, adică dacă arcul (Γ) are o lungime s.

Teorema 2.1. Fie curba în spațiu (Γ) dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma):\ \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in (\alpha, \beta)$$

şi fie $\overset{\frown}{AB}$ un arc pe curba (Γ) astfel încât $A(t = t_0 = a)$, $B(t = t_n = b)$, $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$.

Dacă $\overset{\frown}{AB}$ este un arc regulat de curbă, atunci lungimea sa este dată de formula:

$$s = \int_a^b \left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\| dt\,,$$

unde:

$$\dot{\bar{r}}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt}(t)\,.$$

Demonstrație. Din fig. 2.2 se obține:

$$\overline{M_iM_{i+1}} = \bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i),\ \ t_i, t_{i+1} \in (a, b) \subset (\alpha, \beta)\,,\ \ i = 0, 1, 2, ..., n\text{-}1.$$

Prin aplicarea formulei lui Taylor se obține:

$$\bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i) = \left[\dot{\bar{r}}(t_i) + \bar{\varepsilon}_i\right]\Delta t_i\,,$$

unde:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i,$$

iar $\bar{\varepsilon}_i$ este un vector infinit mic ce tinde la zero o dată cu Δt_i. Deci:

$$\overline{M_iM_{i+1}} = \left[\dot{\bar{r}}(t_i) + \bar{\varepsilon}_i\right]\Delta t_i\,,\ \ i = 0, 1, 2, ..., n\text{-}1.$$

Pe tangenta în M_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$) la curba strâmbă (Γ) se consideră vectorul:

$$\overline{M_iM'_i} = \dot{\bar{r}}(t_i)\,\Delta t_i\,.$$

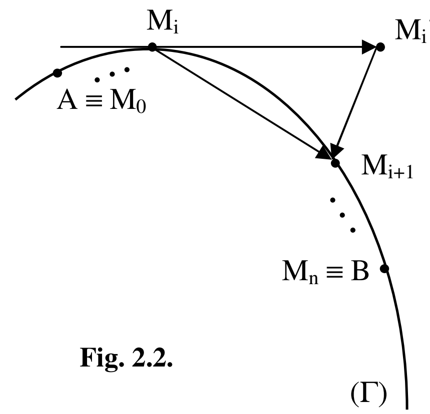


Fig. 2.2.

Are loc egalitatea:

$$\overline{M_iM_{i+1}} = \overline{M_iM'_i} + \overline{M'_i\,M_{i+1}}\,,$$

de unde:

$$\overline{M'_i\,M_{i+1}} = \overline{M_iM_{i+1}} - \overline{M_iM'_i}\,.$$

Deci:

$$\overline{M'_i\,M_{i+1}} = \bar{\varepsilon}_i\,\Delta t_i\,.$$

Se consideră:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\overline{M_iM_{i+1}}\right\| - \sum_{i=0}^{n-1}\left\|\overline{M_iM'_i}\right\| = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\left\|\overline{M_iM_{i+1}}\right\| - \left\|\overline{M_iM'_i}\right\|\right) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\left|\left\|\overline{M_iM_{i+1}}\right\| - \left\|\overline{M_iM'_i}\right\|\right|,$$

însă:

$$\left|\left\|\overline{M_iM_{i+1}}\right\| - \left\|\overline{M_iM'_i}\right\|\right| \le \left\|\overline{M'_i\,M_{i+1}}\right\|,$$

adică:

$$\left|\left\|\overline{M_iM_{i+1}}\right\| - \left\|\overline{M_iM'_i}\right\|\right| \le \left\|\bar{\varepsilon}_i\right\|\left|\Delta t_i\right|,\ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1.$$

Fie:

$$\varepsilon = \max \left\| \bar{\varepsilon}_i \right\|.$$

Se obține:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \overline{M_i M_{i+1}} \right\| - \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \overline{M_i M'_i} \right\| \right| \le \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \bar{\varepsilon}_i \right\| \left| \Delta t_i \right| \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \left| \Delta t_i \right| = \varepsilon (b-a).$$

Din această relație rezultă:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\left\|\overline{M_i M_{i+1}}\right\|\to 0}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left\| \overline{M_i M_{i+1}} \right\| \right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\left\|\overline{M_i M'_i}\right\|\to 0}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left\| \overline{M_i M'_i} \right\| \right),$$

adică:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\left\|\overline{M_i M_{i+1}}\right\|\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \overline{M_i M_{i+1}} \right\| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\left|\Delta t_i\right|\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \dot{\bar{r}}(t_i) \right\| \Delta t_i .$$

Conform definiției 2.6, precum și integralei definite se obține:

$$s = \int_a^b \left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\| dt . \qquad \square$$

Observația 2.5. În cazul în care curba în spațiu (Γ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \ t \in (\alpha, \beta), \end{cases}$$

atunci:

$$\left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)},$$

rezultă:

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt . \qquad \square$$

Teorema 2.2. Se consideră curba în spațiu (Γ), regulată, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}\,(t), \ t \in (t_1, t_2),$$

și fie $\overset{\frown}{M_0 M}$ un arc regulat pe curba (Γ), cu M_0 punct fix, $M_0(t_0)$, iar M un punct curent pe curba (Γ), M(t). Atunci lungimea s a arcului $\overset{\frown}{M_0 M}$ este o funcție continuă și derivabilă de parametru t:

$$s = s(t).$$

Demonstrație. Din teorema 2.1 rezultă:

$$s = \int_{t_0}^{t} \left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\| dt,$$

unde integrala din membrul al doilea este o integrală definită scalară, limita superioară fiind parametrul t. Se demonstrează în analiza scalară că o asemenea integrală este o funcție continuă şi derivabilă de parametru t:

$$s = s(t).$$ ❐

Observația 2.6. Dacă se consideră curba în spațiu (Γ) regulată, atunci din condițiile de regularitate, rezultă că:

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} > 0,$$

deci:

$$s : (t_1, t_2) \to s(t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R},$$

este o funcție surjectivă, strict crescătoare şi continuă, deci bijectivă. În plus, inversa ei:

$$t = t(s),$$

este continuă şi derivabilă, cu derivata:

$$\frac{dt}{ds}(s) = \left[\frac{ds}{dt} t(s) \right]^{-1} > 0.$$ ❐

Observația 2.7. Fie arcul $\overset{\frown}{M_0M}$ şi coarda $\overline{M_0M}$. Dacă arcul $\overset{\frown}{M_0M}$ este rectificabil, atunci se demonstrează uşor că:

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\Delta s}{\Delta l} = 1,$$

unde Δs este lungimea arcului $\overset{\frown}{M_0M}$, Δl este lungimea coardei $[MM_0]$, iar punctul M tinde către M_0 pe arcul $\overset{\frown}{M_0M}$. ❐

Fie (Γ) o curbă în spațiu dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}(t), \ \ t \in (t_1, t_2).$$

Se consideră $\overset{\frown}{M_0M}$ un arc regulat pe curba (Γ). Conform teoremei 2.2, lungimea arcului $\overset{\frown}{M_0M}$ este o funcție continuă şi derivabilă, de parametru t:

$$s = s(t).$$

Definiția 2.8. Se numeşte ***element de arc*** al curbei în spațiu (Γ), diferențiala ***ds*** a funcției s = s(t).

Teorema 2.3. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată şi ds elementul de arc pe (Γ).

1° Dacă (Γ) este dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma):\ \bar{r}=\bar{r}(t),\ t\in(t_1,t_2),$$

atunci:

$$ds=\|d\bar{r}\|.$$

2° Dacă (Γ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma):\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\ t\in(t_1,t_2),\end{cases}$$

atunci:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Demonstrație.

1° Fie punctele M, M' ∈ (Γ), M(t), M'(t + Δt) (fig. 2.3).

$$\overline{MM'}=\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)\ \Big|\cdot\frac{1}{\Delta t},$$

unde Δt este creşterea lui t, rezultă pe baza observației 2.7:

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\|\overline{MM'}\|}{|\Delta t|}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\|\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)\|}{|\Delta t|}=\|\dot{\bar{r}}(t)\|,$$

de unde:

$$ds=\|\dot{\bar{r}}(t)\|\,dt,$$

sau:

$$ds=\|d\bar{r}\|.$$

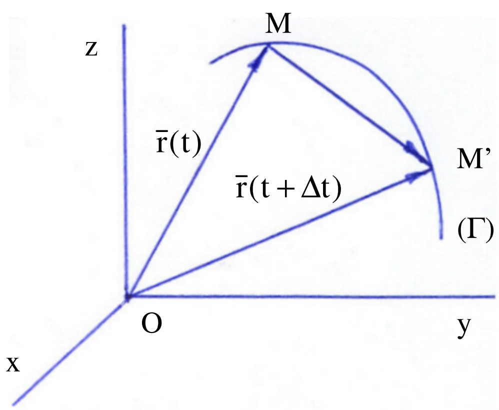


Fig. 2.3.

2° Dacă se ține cont de relațiile:

$$\dot{\bar{r}}(t)=\dot{x}(t)\,\bar{i}+\dot{y}(t)\,\bar{j}+\dot{z}(t)\,\bar{k},$$

$$\|\dot{\bar{r}}(t)\|=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)},$$

$$d\bar{r}=dx\,\bar{i}+dy\,\bar{j}+dz\,\bar{k},$$

$$\|d\bar{r}\|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

rezultă că:

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt,$$

sau:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$ ❒

Teorema 2.4. Lungimea de arc s(t) poate fi întrebuințată ca parametru în reprezentările parametrice ale curbelor din spațiu regulate. Trecerea de la t la s păstrează clasa reprezentării.

Demonstrație. Se face în mod analog cu cea dată teoremei similare de la curbe plane (teorema 1.2).

Din relația:

$$\dot{s} = \left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\|, \quad \left(\dot{s} = \frac{ds}{dt} \right),$$

deoarece curba în spațiu este regulată, se obține:

$$\dot{s}^2 = \left(\dot{\bar{r}}(t) \cdot \dot{\bar{r}}(t) \right) > 0 .$$

Din observația 2.6 rezultă că s este bijectivă şi inversa ei, t = t(s) are derivata:

$$\frac{dt}{ds}(s) = \left[\frac{ds}{dt}\big(t(s)\big) \right]^{-1} > 0 .$$

Prin substituția inversei funcției s = s(t) în reprezentarea vectorială $\bar{r} = \bar{r}(t)$ se obține astfel a altă reprezentare parametrică a curbei (Γ) şi anume:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x\big(t(s)\big), \\ y = y\big(t(s)\big), \\ z = z\big(t(s)\big), \end{cases}$$

adică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x^*(s), \\ y = y^*(s), \\ z = z^*(s), \end{cases}$$

sau:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}^*(s) ,$$

cu s drept parametru. ❐

Definiția 2.9. Parametrul s este numit ***parametru natural*** al curbei în spațiu (Γ), iar reprezentarea vectorială a curbei (Γ):

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}(s) , \quad \text{s - parametru natural},$$

se numeşte ***reprezentare naturală*** a curbei în spațiu (Γ).

Noțiunea de ***orientare*** pe o curbă în spațiu se introduce în acelaşi mod ca pentru o curbă plană.

Definiția 2.10. Se numeşte ***sens pozitiv*** de parcurs pe curba în spațiu:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}\,(t), \ \ t \in (t_1, t_2),$$

sensul care corespunde la valorile crescătoare ale parametrului t.

Evident, există două moduri de orientare a lui (Γ) şi trecerea de la o orientare la orientarea opusă poate fi efectuată printr-o transformare parametrică a cărei derivată este negativă (fig. 2.4).

t^*	$t_1^* \nearrow t_2^*$
$\dot{t}(t^*)$	$------$
$t(t^*)$	$t_1 = t(t_1^*) \searrow t_2 = t(t_2^*)$

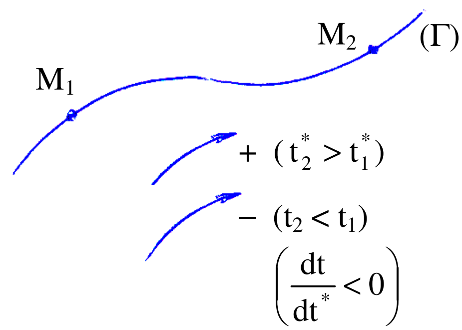


Fig. 2.4.

Observația 2.8. Utilizarea reprezentării naturale a unei curbe în spațiu va simplifica unele calcule ce se vor face în considerațiile ce urmează a fi făcute asupra unei curbe în spațiu.

Observația 2.9. Punctul $M_0(t = t_0) \in (\Gamma)$, corespunzător la s = 0, poate fi ales în relația:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\| dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\dot{\bar{r}}(t) \cdot \dot{\bar{r}}(t)\right)}\, dt\,,$$

în mod arbitrar.

Sensul pozitiv al reprezentării naturale este acelaşi cu al reprezentării inițiale:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}\,(t), \ \ t \in (t_1, t_2),$$

deoarece funcția s = s(t) este monoton crescătoare. Pentru a obține orientarea opusă se poate întrebuința s^* ca un nou parametru, cu:

$$s^* = -\,s.$$ ❒

Convenție. În continuare, derivatele funcției vectoriale $\bar{r}$ în raport cu parametrul natural s se notează cu accente, spre deosebire de derivatele aceleiaşi funcții în raport cu parametrul t arbitrar, care încă din capitolul anterior au fost notate cu puncte:

$$\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{ds}, \ \ \bar{r}'' = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \ \ \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \ \ \ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \text{ etc.}$$

§2.3. Tangenta la o curbă în spațiu

Definiția 1.11. Se numeşte ***tangentă*** la curba în spațiu (Γ) în punctul ordinar M, poziția limită a dreptei secante MM' când M' → M (fig. 2.5).

Fie curba în spațiu (Γ) dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}\,(t),\, t \in (t_1, t_2)\,.$$

Se consideră două puncte ordinare M(t), M'(t+Δt), infinit vecine pe curba (Γ), de vectori de poziție: $\bar{r}(t), \bar{r}\,(t+\Delta t)$. Se notează:

$$\overline{MM'} = \Delta\bar{r} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)\,,$$

$$\overline{MM''} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}\,.$$

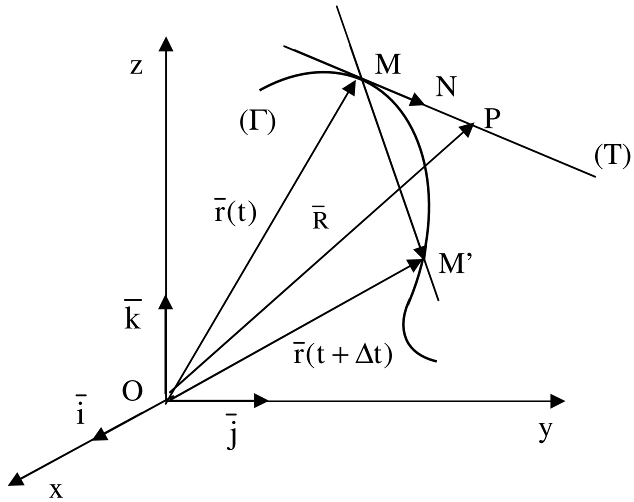


Fig. 2.5.

Rezultă că vectorii $\overline{MM'}$, $\overline{MM''}$ sunt coliniari. Are loc prin definiție:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\bar{r}}(t)\,.$$

Pe de altă parte, când $\Delta\bar{r} \to 0$, punctul M' → M, iar $\overline{MM''}$ va tinde către $\overline{MN}$, care este vectorul tangent în punctul M la curba în spațiu (Γ):

$$\overline{MN} = \dot{\bar{r}}(t)\,.$$

Pentru a găsi ecuația vectorială a tangentei se consideră pe tangenta (T) în M la curba în spațiu (Γ) un punct P, de vector de poziție $\overline{R}$.

Are loc relația vectorială:

$$\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP}\,.$$

Cum vectorul $\overline{MP}$, este situat pe tangenta (T), rezultă că el este coliniar cu $\dot{\bar{r}}(t)$, adică:

$$\overline{MP} = \lambda\,\dot{\bar{r}}(t)\,,$$

unde λ este un scalar real.

Se poate deci scrie:

$$(T): \ \overline{R} = \bar{r}(t) + \lambda\frac{d\bar{r}}{dt}, \ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Aceasta este ***ecuația vectorială*** a tangentei în punctul ordinar M la curba în spațiu (Γ).

Observații 2.10.

1° Dacă curba în spațiu (Γ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \ t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

atunci, pentru a scrie ecuațiile tangentei (T) în punctul ordinar $M \in (\Gamma)$ de coordonate x(t), y(z), z(t), se consideră coordonatele curente X, Y, Z pe (T) şi se obține:

$$\overline{R} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}, \quad \overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}, \quad \dot{\overline{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\overline{i} + \dot{y}(t)\,\overline{j} + \dot{z}(t)\,\overline{k}.$$

Prin proiectarea ecuației vectoriale a tangentei pe axele de coordonate, rezultă:

$$(T):\begin{cases} X = x(t) + \lambda\dot{x}(t), \\ Y = y(t) + \lambda\dot{y}(t), \\ Z = z(t) + \lambda\dot{z}(t) \end{cases}$$

şi se obțin astfel ***ecuațiile parametrice*** ale tangentei (T).

Prin eliminarea parametrului λ, se obțin ecuațiile canonice ale tangentei:

$$(T): \ \frac{X - x(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{Y - y(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{Z - z(t)}{\dot{z}(t)},$$

sau:

$$(T): \ \frac{X - x(t)}{dx} = \frac{Y - y(t)}{dy} = \frac{Z - z(t)}{dz},$$

în care dx, dy, dz sunt calculate în punctul M.

2° Dacă curba în spațiu (Γ) este dată prin ecuațiile implicite:

$$(\Gamma):\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \qquad (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

atunci, pentru a scrie ecuațiile tangentei (T) în punctul ordinar $M \in (\Gamma)$ de coordonate x, y, z, unde X, Y, Z sunt coordonatele punctului curent al tangentei, se diferențiază total ecuațiile curbei (Γ). Rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy + \dfrac{\partial F}{\partial z}dz = 0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}dx + \dfrac{\partial G}{\partial y}dy + \dfrac{\partial G}{\partial z}dz = 0. \end{cases}$$

Aceste ecuații formează un sistem de două ecuații cu trei necunoscute: dx, dy, dz, care prin rezolvare conduce la:

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}}.$$

Se deduce astfel că parametrii directori dx, dy, dz ai direcției dreptei tangente (T) sunt proporționali respectiv cu jacobienii:

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)},\ \frac{D(F,G)}{D(z,x)},\ \frac{D(F,G)}{D(x,y)}.$$

Ecuațiile tangentei (T) sunt așadar:

$$(T):\ \frac{X-x}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} = \frac{Y-y}{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}} = \frac{Z-z}{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}.$$

❒

Teorema 2.5. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată și fie (T) tangenta la curba (Γ) într-un punct $M \in$ (Γ), de vector de poziție $\bar{r}(t)$.

Dacă $\bar{\tau}$ este versorul tangentei (T), atunci:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds},$$

unde ds este elementul de arc al curbei (Γ).

Demonstrație. Are loc relația:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}.$$

Deoarece $\frac{dt}{ds}$ este un scalar, rezultă că vectorul $\frac{d\bar{r}}{ds}$ este coliniar cu vectorul $\dot{\bar{r}}(t)$, adică este coliniar cu vectorul care dă direcția tangentei (T).

Se obține:

$$\left\| \frac{d\bar{r}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\bar{r}}{dt} \right\| \cdot \frac{dt}{ds}.$$

Conform observației 2.6:

$$\| \dot{\bar{r}}(t) \| = \frac{ds}{dt},$$

se obține:

$$\left\| \frac{d\bar{r}}{ds} \right\| = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = 1.$$

Aşadar, vectorul $\frac{d\bar{r}}{ds}$ este versorul direcției tangentei (T), deci:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}.$$ ❒

Teorema 2.6. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată, dată în reprezentarea parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in (t_1, t_2). \end{cases}$$

Fie (T) tangenta la curba (Γ) în punctul M ∈ (Γ) de coordonate x(t), y(z), z(t). Dacă cos α, cos β, cos γ sunt cosinusurile directoare ale direcției tangentei (T), atunci are loc:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Demonstrație. Cosinusurile directoare ale direcției tangentei (T) sunt proiecțiile pe axele de coordonate ale versorului $\bar{\tau}$. Deoarece:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds},$$

rezultă că proiecțiile versorului $\bar{\tau}$ sunt $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Aşadar:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$ ❒

Definiția 2.12. Fie curba în spațiu (Γ) şi fie un punct M ∈ (Γ), de vector de poziție $\bar{r}(t)$. Punctul M se numeşte ***punct de inflexiune*** al curbei (Γ), dacă toate derivatele vectorului $\bar{r}(t)$ de la ordinul doi şi până la ordinul 2n sunt coliniare cu derivata de ordinul întâi în M a vectorului $\bar{r}(t)$, adică dacă în punctul M sunt satisfăcute condițiile:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{r}(t)}{dt} \times \dfrac{d^i\,\bar{r}(t)}{dt^i} = \bar{0},\ i = 1, 2, ..., 2n, \\ \dfrac{d\bar{r}(t)}{dt} \times \dfrac{d^{2n+1}\,\bar{r}(t)}{dt^{2n+1}} \neq \bar{0}. \end{cases}$$

Definiția 2.13. Fie o curbă în spațiu (Γ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma):\ \bar{r} = \bar{r}\,(t),\ t \in (t_1, t_2),$$

şi fie un punct M ∈ (Γ), de vector de poziție $\bar{r}\,(t)$. Dacă în punctul M este satisfăcută condiția:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{0}\,,$$

atunci tangenta la curba (Γ) în punctul M se numeşte ***tangentă staționară***.

Observația 2.11. Din ultimele două definiții rezultă că tangenta într-un punct de inflexiune este o tangentă staționară. Reciproca nu este mereu adevărată, adică punctul M ∈ (Γ) prin care trece o tangentă staționară nu este întotdeauna punct de inflexiune.

❒

Exemplul 2.2. Să se determine tangentele la curba în spațiu:

$$(\Gamma):\ \bar{r} = \frac{1}{2}\,t^4 \cdot \bar{i} - \frac{1}{3}\,t^3 \cdot \bar{j} + t^2 \cdot \bar{k}$$

care sunt paralele cu planul:

$$(\pi):\ 3\,x - 2\,y - 2\,z - 1 = 0.$$

Soluție: Parametrii directori ai direcției unei tangente oarecare la curba dată sunt ($2\,t^3$, $-t^2$, $2\,t$).

Pentru ca tangenta să fie paralelă cu planul dat trebuie ca produsul scalar dintre vectorul director, $\bar{v}\,(2\,t^3, -t^2, 2\,t)$, al tangentei şi normala la plan, $\overline{N}_\pi(3, -2, -2)$ să fie zero (cei doi vectori să fie perpendiculari). Adică:

$$3 \cdot 2\,t^3 + 2\,t^2 - 4\,t = 0,$$

cu soluțiile $t_1 = -1$ şi $t_2 = \dfrac{2}{3}$, (pentru t = 0 nu se obține un punct ordinar al curbei (Γ)).

Coordonatele punctului corespunzător valorii $t_1 = -1$ sunt $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{3}$, z = 1 iar parametrii directori ai direcției tangentei în acest punct sunt: (2, 1, 2).

Ecuațiile tangentei în acest punct sunt:

$$(T_1):\ \frac{2\,x - 1}{4} = \frac{3\,y - 1}{3} = \frac{z - 1}{2}.$$

În mod analog pentru $t = \dfrac{2}{3}$ se obține:

$$(T_2): \frac{81x - 8}{4} = \frac{81y + 8}{-3} = \frac{9z - 4}{1}. \qquad \square$$

§2.4. Planul normal la o curbă în spațiu

Definiția 2.14. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată și fie M ∈ (Γ). Se numește ***plan normal*** în punctul M la curba în spațiu (Γ), planul (π_N) ce trece prin punctul M și este perpendicular pe tangenta (T) în M la curba (Γ).

Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in (t_1, t_2),$$

M ∈ (Γ) un punct curent de vector de poziție $\bar{r}\,(t)$, (π_N) planul normal la curba (Γ) în punctul M.

Pentru a scrie ecuația vectorială a planului normal se consideră în acest plan un punct curent P de vector de poziție $\overline{R}$ (fig. 2.6).

Deoarece planul (π_N) este perpendicular pe tangenta (T) rezultă că vectorii $\overline{MP}$ și $\overline{MN}$ sunt ortogonali, adică are loc:

$$\overline{MP} \cdot \overline{MN} = 0.$$

Dacă se ține seama de relațiile:

$$\overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OM} = \overline{R} - \bar{r}\,(t),$$

$$\overline{MN} = \dot{\bar{r}}\,(t),$$

rezultă că se poate scrie:

$$(\pi_N):\ (\overline{R} - \bar{r}(t)) \cdot \dot{\bar{r}}(t) = 0\,.$$

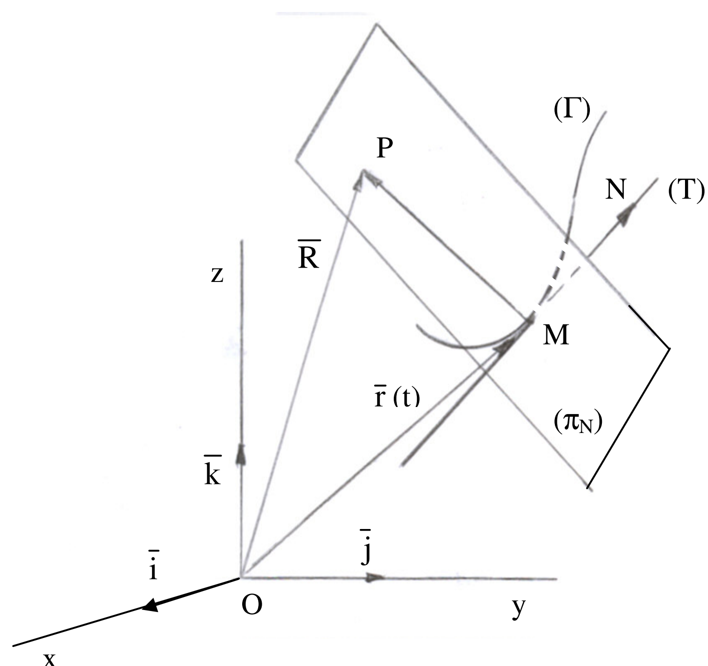


Fig. 2.6.

Aceasta este ***ecuația vectorială*** a planului normal în punctul ordinar M la curba în spațiu (Γ).

Observații 2.12.

1° Dacă curba în spațiu (Γ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t),\ t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

atunci, pentru a scrie ecuația planului normal se consideră punctul curent M ∈ (Γ) de coordonate x(t), y(t), z(t) şi punctul curent P ∈ (π_N) de coordonate X, Y, Z. Rezultă că:

$$\overline{R} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k},\ \ \overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k},\ \ \dot{\overline{r}}(t) = \dot{x}(t)\overline{i} + \dot{y}(t)\overline{j} + \dot{z}(t)\overline{k}$$

şi prin înlocuirea lor în ecuația vectorială a planului normal în punctul M, la curba în spațiu (Γ) se obține ecuația planului normal sub forma:

$$(\pi_N):\ (X - x(t))\dot{x}(t) + (Y - y(t))\dot{y}(t) + (Z - z(t))\dot{z}(t) = 0,$$

sau dacă se ține seama de coliniaritatea vectorilor $d\overline{r}\big|_M$ şi $\dot{\overline{r}}$ (t), rezultă:

$$(\pi_N):\ (X - x(t))dx + (Y - y(t))dy + (Z - z(t))dz = 0.$$

2° Dacă curba în spațiu (Γ) este dată în reprezentare implicită:

$$(\Gamma):\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

iar M ∈ (Γ) de coordonate x, y, z şi P ∈ (π_N) un punct curent de coordonate X, Y, Z. S-a văzut (observația 2.10.2°) că parametrii directori ai direcției tangentei (T) sunt proporționali cu jacobienii:

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)},\ \frac{D(F,G)}{D(z,x)},\ \frac{D(F,G)}{D(x,y)}.$$

Rezultă că ecuația planului normal în punctul M(x, y, z) la curba în spațiu (Γ) este:

$$(\pi_N): (X - x)\frac{D(F,G)}{D(y,z)} + (Y - y)\frac{D(F,G)}{D(z,x)} + (Z - z)\frac{D(F,G)}{D(x,y)} = 0,$$

care se scrie sub formă de determinant astfel:

$$(\pi_N): \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = 0.$$

❒

Exemplul 2.3. Fie curba în spațiu de ecuații:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x^2+z^2-4=0, \\ x^2+y^2-4=0. \end{cases}$$

Să se scrie ecuațiile tangentei şi ecuația planului normal în punctul $M(\sqrt{3},1,1)$ la curba dată.

Soluție: Parametrii directori ai direcției tangentei la (Γ) într-un punct curent sunt proporționali cu (dx, dy, dz). Prin diferențierea ecuațiilor curbei (Γ) se obține:

$$\begin{cases} 2x\,dx+2z\,dz=0, \\ 2x\,dx+2y\,dy=0. \end{cases}$$

În punctul M, sistemul devine:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,dx\big|_M+dz\big|_M=0, \\ \sqrt{3}\,dx\big|_M+dy\big|_M=0, \end{cases}$$

de unde:

$$\frac{dx\big|_M}{-1}=\frac{dy\big|_M}{\sqrt{3}}=\frac{dz\big|_M}{\sqrt{3}},$$

iar ecuațiile tangentei căutate sunt date de:

$$(T):\ \frac{x-\sqrt{3}}{-1}=\frac{y-1}{\sqrt{3}}=\frac{z-1}{\sqrt{3}}.$$

Ecuația planului normal în punctul M la curba (Γ) este:

$$(N):\ x-\sqrt{3}\,y-\sqrt{3}\,z+\sqrt{3}=0.$$ ❒

Exemplul 2.4. Să se demonstreze că orice plan normal al curbei în spațiu:

$$(\Gamma):\ \bar{r}=a(\cos t\,\bar{i}+\sin\alpha\sin t\,\bar{j}+\cos\alpha\sin t\,\bar{k})$$

trece printr-o dreaptă fixă, ale cărei ecuații să se găsească.

Soluție: Ecuația planului normal la curbă într-un punct curent al acesteia este:

$$(\pi_N):\ -a\sin t\,x+a\sin\alpha\cos t\,y+a\cos\alpha\cos t\,z=0,$$

sau, prin împărțire cu ($a\cos\alpha\cos t$) se poate scrie:

$$(\pi_N):\ z+y\,\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{a\,\mathrm{tg}\,t}{\cos\alpha}\cdot x=0,$$

care arată că planul normal conține dreapta fixă de ecuații:

$$(d):\ \begin{cases} x = 0, \\ z + y\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0. \end{cases}$$

❐

§2.5. Planul osculator la o curbă în spațiu

Definiția 2.15. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată şi fie două puncte P, P' ∈ (Γ). Se numeşte ***plan osculator*** la curba (Γ) în punctul P poziția limită a planului ce trece prin punctul P' şi prin tangenta la curba (Γ) în punctul P, când P' → P, dacă această poziție există şi este unică, tangenta în punctul M este presupusă nestaționară.

Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată de cel puțin ordinul doi, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in (t_1, t_2),$$

P ∈ (Γ) un punct curent, (π_0) planul osculator la curba (Γ) în punctul P.

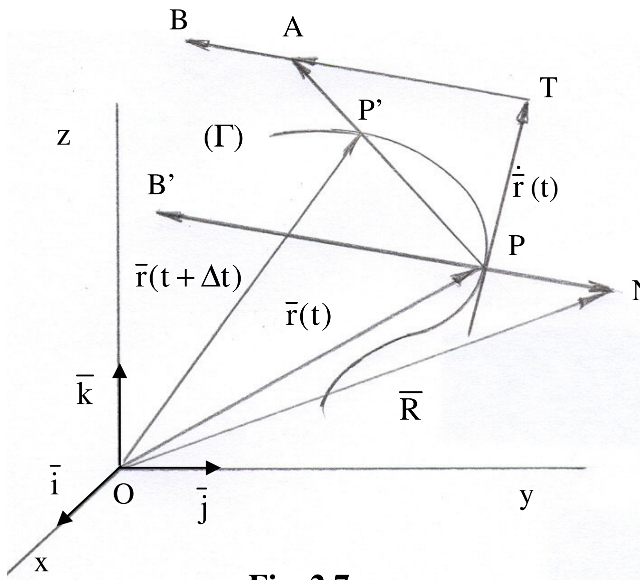


Fig. 2.7.

Pentru a scrie ecuația vectorială a planului osculator în punctul P la curba (Γ) se consideră în acest plan un punct curent N ∈ (π_0), de vector de poziție $\overline{R}$. Fie punctele P, P' ∈ (Γ), de vectori de poziție $\bar{r}(t)$, respectiv $\bar{r}(t+\Delta t)$ (fig. 2.7).

Se consideră planul (π) = $\left(P', \overline{PT}\right)$ ce trece prin punctul P' şi tangenta la curba (Γ) în punctul P, adică prin vectorul $\dot{\bar{r}}(t)$. Planul (π) este determinat de punctul P' şi de vectorii $\dot{\bar{r}}(t)$ şi $\overline{PP'}$:

$$\overline{PP'} = \overline{OP'} - \overline{OP} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t).$$

Prin aplicarea formulei lui Taylor se obține:

$$\bar{r}(t+\Delta t) = \bar{r}(t) + \frac{\Delta t}{1!}\dot{\bar{r}}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\left[\ddot{\bar{r}}(t) + \bar{\varepsilon}\right],\quad \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\varepsilon} = \bar{0}.$$

De unde rezultă:

$$\overline{PP'} = \frac{\Delta t}{1!}\dot{\bar{r}}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\left[\ddot{\bar{r}}(t) + \bar{\varepsilon}\right].$$

Dacă se notează:

$$\overline{PA} = \frac{1}{\Delta t}\overline{PP'} = \dot{\bar{r}}(t) + \frac{\Delta t}{2!}\left[\ddot{\bar{r}}(t) + \bar{\varepsilon}\right],$$

planul (π) va fi generat de $\overline{PA}$ şi $\dot{\bar{r}}(t)$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, de vectorii $\overline{TA}$ şi $\dot{\bar{r}}(t)$, deci $(\pi) = \left(\overline{TA}, \overline{PT}\right)$. Însă:

$$\overline{TA} = \overline{PA} - \overline{PT} = \frac{\Delta t}{2!}\left[\ddot{\bar{r}}(t) + \bar{\varepsilon}\right].$$

Dacă se înmulțeşte vectorul $\overline{TA}$ cu $\frac{2}{\Delta t}$ se obține vectorul $\overline{TB}$ coliniar cu $\overline{TA}$:

$$\overline{TB} = \ddot{\bar{r}}(t) + \bar{\varepsilon}.$$

Se poate da planul (π) ca fiind generat de vectorii $\dot{\bar{r}}(t)$ şi $\overline{TB}$. Dacă prin punctul P se duce vectorul $\overline{PB'}$ echipolent cu $\overline{TB}$, rezultă că vectorii $\dot{\bar{r}}(t)$ şi $\overline{PB'}$ generează acelaşi plan (π). Dacă P' tinde către P, atunci planul (π) va tinde, conform definiției 2.15, către planul osculator (π_O). Însă dacă P' → P, atunci $\Delta t \to 0$ şi deci $\bar{\varepsilon} \to \bar{0}$, de unde rezultă că $\overline{TB} \to \ddot{\bar{r}}(t)$.

Aşadar, planul osculator (π_0), dacă există, este determinat de vectorii $\dot{\bar{r}}(t)$ şi $\ddot{\bar{r}}(t)$.

Vectorii $\overline{PN} = \bar{R} - \bar{r}(t)$, $\dot{\bar{r}}(t)$, $\ddot{\bar{r}}(t)$ fiind conținuți în planul (π_O), sunt coplanari, deci produsul lor mixt este nul, adică:

$$(\pi_0):\ \left(\bar{R} - \bar{r}(t)\right)\cdot\left(\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)\right) = 0,$$

care constituie ***ecuația vectorială*** a planului osculator în punctul P la curba în spațiu (Γ).

Observații 2.13.

1° Dacă în punctul P tangenta la curba (Γ) este staționară, adică are loc relația:

$$\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) = \bar{0},$$

atunci planul osculator în punctul P la curba (Γ) se numeşte ***plan osculator staționar*** sau ***supraosculator***.

2° Dacă curba regulată (Γ) este plană, atunci planul osculator în orice punct P ∈ (Γ), coincide cu planul curbei.

Într-adevăr, fie (π) planul curbei (Γ), deci (Γ) ⊂ (π) şi fie punctele P, P', P'' ∈ (Γ). Se poate uşor arăta că planul osculator (π_O) în P la curba (Γ) este poziția limită a unui plan (π') ce trece prin punctele P, P', P'' ∈ (Γ), când P' → P şi P'' → P.

Deoarece P, P', P'' ∈ (π) rezultă că (π) ≡ (π'). Însă poziția limită a planului (π), adică (π_0) este identică cu (π'), deci:

$$(\pi_0) \equiv (\pi).$$ ❐

Observația 2.14. Dacă curba în spațiu (Γ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t),\ t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

iar P ∈ (Γ), de coordonate x(t), y(t), z(t) şi X, Y, Z sunt coordonatele punctului curent N ∈ (π_0), atunci, relativ la un sistem de axe de coordonate ortogonale (Oxyz) se poate scrie:

$$\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k},$$

$$\dot{\bar{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\bar{i} + \dot{y}(t)\,\bar{j} + \dot{z}(t)\,\bar{k},$$

$$\ddot{\bar{r}}(t) = \ddot{x}(t)\,\bar{i} + \ddot{y}(t)\,\bar{j} + \ddot{z}(t)\,\bar{k},$$

$$\overline{R} = X\,\bar{i} + Y\,\bar{j} + Z\,\bar{k}.$$

Prin transcrierea analitică a produsului mixt care apare în ecuația vectorială a planului osculator, se obține ecuația scalară:

$$(\pi_O): \begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$(\pi_O): \begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

în care dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z sunt calculate în punctul curent P. ❒

Exemplul 2.5. Să se determine punctele curbei în spațiu:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = (t^4 - 1)\,\bar{i} + (1 + t^3)\,\bar{j} - 2\,t\,\bar{k},$$

ale căror plane osculatoare sunt paralele cu dreapta de ecuație:

$$(d): \ \frac{x-1}{12} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z}{2}.$$

Soluție: Ecuația planului osculator într-un punct curent M ∈ (Γ), de vector de poziție $\bar{r}(t)$ este:

$$(\pi_0): \begin{vmatrix} x - (t^4 - 1) & y - (1 + t^3) & z + 2\,t \\ 4\,t^3 & 3\,t^2 & -2 \\ 12\,t^2 & 6\,t & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$(\pi_0): \ 12\,t[x - (t^4 - 1)] - 24\,t^2[y - (1 + t^3)] - 12\,t^4[z + 2\,t] = 0,$$

adică:

$$(\pi_0): \ -(x - t^4 + 1) + 2\,t(y - t^3 - 1) + t^3(z + 2\,t) = 0.$$

Pentru ca planul (π_0) să fie paralel cu dreapta (d) trebuie să fie îndeplinită condiția: $\overline{N}_{\pi_0} \perp \bar{d}$ (vectorul normal la planul osculator: $\overline{N}_{\pi_0}(-1, 2\,t, t^3)$ să fie ortogonal pe vectorul director al dreptei (d) : $\bar{d}\,(12, -7, 2)$), deci:

$$12\,(-1) - 7(2\,t) + 2\,t^3 = 0.$$

Soluțiile acestei ecuații sunt: $t_1 = -2$, $t_2 = -1$, $t_3 = 3$. Deci punctele căutate sunt $M_1(15, -7, 4)$, $M_2(0, 0, 2)$ şi $M_3(80, 28, -6)$.

❒

§2.6. Normala principală la o curbă în spațiu

Propoziția 2.1. Dacă $\bar{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este o funcție vectorială de argument scalar astfel încât $\left\| \bar{f}(t) \right\| = \text{constant},$ atunci derivata acesteia este perpendiculară pe vectorul dat.

Demonstrație. Deoarece $\left\| \bar{f}(t) \right\| = \text{constant},$ se deduce că:

$$\bar{f}(t) \cdot \bar{f}(t) = \text{constant}.$$

Prin derivare se obține:

$$\bar{f}(t) \cdot \frac{d\bar{f}}{dt} = 0,$$

adică derivata unei funcții vectoriale de modul constant este perpendiculară pe vectorul dat.

❒

Teorema 2.7. Fie curba în spațiu regulată (Γ) dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma) : \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in (t_1, t_2)$$

şi fie (π_0), (π_N), planul osculator, respectiv planul normal la curba (Γ) în punctul $M \in (\Gamma)$, de vector de poziție $\bar{r}(t)$.

Dacă curba (Γ) este regulată de cel puțin ordinul doi şi dacă ds este elementul de arc pe curba (Γ), atunci vectorul $\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ este conținut atât în planul osculator (π_0) cât şi în planul normal (π_N).

Demonstrație. 1° Deoarece curba în spațiu (Γ) este regulată de cel puțin ordinul doi, rezultă că există funcțiile:

$$\bar{r} = \bar{r}(s), \quad s = s(t), \quad t = t(s),$$

continue şi cu derivate până la şi inclusiv ordinul doi, continue.

Au loc relațiile:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds},$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{ds} + \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right),$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \ddot{\bar{r}}(t) + \frac{d^2t}{ds^2}\dot{\bar{r}}(t),$$

adică vectorul $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ este coplanar cu vectorii $\dot{\bar{r}}(t)$ şi $\ddot{\bar{r}}(t)$, care determină planul osculator (π_0), deci vectorul $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ este conținut în planul osculator (π_0).

2° Deoarece:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds},$$

rezultă că:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds},$$

unde $\bar{\tau}$ este versorul tangentei la curba (Γ) în punctul M, deci are lungimea constantă:

$$\|\bar{\tau}\| = 1$$

rezultă din propoziția 2.1 că derivata vectorului $\bar{\tau}$ este perpendiculară pe $\bar{\tau}$, adică:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \perp \bar{\tau}$$

şi cum vectorul $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ trece prin punctul M $\in$ (Γ), rezultă că $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ este conținut în planul normal (π_N).

Din 1° şi 2° rezultă:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \subset (\pi_O) \cap (\pi_N).$$ ❒

Teorema 2.8. Vectorul $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ calculat în orice punct ordinar al unei curbe în spațiu, nu depinde de orientarea pe curbă.

Demonstrație. Fie s lungimea arcului pe curba (Γ) când sensul de parcurgere pe curba (Γ) este pozitiv şi fie s^* lungimea arcului când sensul de parcurgere pe curba (Γ) este negativ.

Se obține schimbarea de parametru, care modifică orientarea pe curbă:

$$s = -s^*.$$

Are loc relația:

$$\frac{d\overline{r}}{ds^*} = \frac{d\overline{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*} = -\frac{d\overline{r}}{ds},$$

de unde rezultă că $\overline{\tau}$ depinde de orientarea pe curba (Γ), însă:

$$\frac{d^2\overline{r}}{ds^{*2}} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{d\overline{r}}{ds}\right) \cdot \frac{ds}{ds^*} = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2},$$

de unde rezultă proprietatea anunțată. ❐

Observația 2.15. Din teorema 2.8 rezultă că vectorul $\frac{d\overline{\tau}}{ds}$ calculat într-un punct ordinar al unei curbe în spațiu este determinat în mod unic.

Definiția 2.16. Se numește ***normală principală*** la curba în spațiu (Γ), în punctul ordinar M ∈ (Γ), dreapta de intersecție dintre planul normal (π_N) şi planul osculator (π_0) duse în punctul M la curba în spațiu (Γ), adică:

$$(N_p) = (\pi_N) \cap (\pi_O).$$

Versorul direcției dreptei normale principale (N_p) se notează cu $\overline{\upsilon}$. Acesta are aceeaşi direcție cu $\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$, iar sensul lui se ia astfel încât să coincidă cu sensul vectorului $\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$, adică:

$$\overline{\upsilon} = \lambda \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}, \qquad \lambda > 0.$$

În scopul determinării ecuației vectoriale a dreptei normale principale (N_p) se consideră o curbă în spațiu regulată (Γ) dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \overline{r} = \overline{r}(t),\ t \in (t_1, t_2).$$

Fie M ∈ (Γ) un punct curent de vector de poziție $\overline{r}(t)$ şi (N_p) normala principală la curba (Γ) în punctul ordinar M. Se consideră Q ∈ (N_p) un punct curent de vector de poziție $\overline{R}$.

Deoarece $(N_p) \subset (\pi_0)$ rezultă că vectorul care dă direcția normalei principale este coplanar cu vectorii $\dot{\overline{r}}(t)$ şi $\ddot{\overline{r}}(t)$ care determină planul osculator (π_0) în punctul M la curba în spațiu (Γ), iar din faptul că $(N_p) \subset (\pi_N)$ rezultă că direcția normalei principale este ortogonală pe vectorul $\dot{\overline{r}}(t)$, deci direcția dreptei (N_p) este coliniară cu vectorul $\dot{\overline{r}}(t) \times \left(\dot{\overline{r}}(t) \times \ddot{\overline{r}}(t)\right)$.

Deoarece $M, Q \in (N_p)$ rezultă că $\overline{MQ} \parallel \dot{\overline{r}} \times \left(\dot{\overline{r}} \times \ddot{\overline{r}}\right)$, se obține deci:

$$\overline{MQ} = \lambda \left[\dot{\overline{r}} \times \left(\dot{\overline{r}} \times \ddot{\overline{r}}\right)\right], \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

dar:

$$\overline{MQ} = \overline{R} - \overline{r}(t),$$

rezultă:

$$(N_p):\ \overline{R} - \overline{r}(t) = \lambda\left[\dot{\overline{r}} \times \left(\dot{\overline{r}} \times \ddot{\overline{r}}\right)\right], \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

care este ***ecuația vectorială*** a normalei principale în punctul M la curba în spațiu (Γ).

Observații 2.16.

1°. Dacă curba (Γ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t),\ t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

iar $M \in (\Gamma)$, de coordonate x(t), y(t), z(t) și X, Y, Z sunt coordonatele punctului curent $Q \in (N_P)$, atunci se obține:

$$\dot{\overline{r}}(t) \times \ddot{\overline{r}}(t) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} \cdot \overline{i} + \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} \cdot \overline{k},$$

$$\dot{\overline{r}}(t) \times \left(\dot{\overline{r}}(t) \times \ddot{\overline{r}}(t)\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix} \cdot \overline{i} + \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix} \cdot \overline{j} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix} \cdot \overline{k}$$

Dacă se transcrie analitic ecuația vectorială a normalei principale (N_p) se obțin ecuațiile scalare ale normalei principale:

$$(N_p): \frac{X - x(t)}{\begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(t)}{\begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{Z - z(t)}{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix}}.$$

2°. În cazul în care curba (Γ) este dată în reprezentare naturală:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(s), \quad s \text{ parametru natural,}$$

iar M ∈ (Γ), de vector de poziție $\bar{r}(s)$, rezultă că ecuația vectorială a normalei principale se poate da şi sub forma:

$$(N_p): \ \bar{R} = \bar{r}(s) + \alpha\, \bar{r}''(s), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

sau sub forma:

$$(N_p): \ \bar{R} = \bar{r}(s) + \mu\, \bar{\upsilon}(s), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

❒

§2.7. Binormala la o curbă în spațiu

Definiția 2.17. Se numeşte ***binormală*** la curba în spațiu (Γ) în punctul ordinar M ∈ (Γ), dreapta (N_b) ce trece prin M, perpendiculară pe planul osculator (π_O) al punctului considerat.

În scopul determinării ecuației vectoriale a dreptei binormale (N_b) se consideră curba în spațiu (Γ) dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(t), \ t \in (t_1, t_2).$$

Fie M ∈ (Γ) un punct curent de vector de poziție $\bar{r}(t)$ şi (N_b) binormala la curba (Γ) în punctul ordinar M. Se consideră Q ∈ (N_b) un punct curent de vector de poziție $\bar{R}$.

Deoarece binormala (N_b) la curba în spațiu (Γ) în punctul ordinar M este prin definiție perpendiculară pe planul osculator (π_0), determinat de vectorii $\dot{\bar{r}}(t)$, $\ddot{\bar{r}}(t)$, rezultă că direcția dreptei binormale este coliniară cu produsul vectorial $\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)$. Deci vectorul $\overline{MQ}$ este coliniar cu vectorul $\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)$, adică are loc:

$$\overline{MQ} = \lambda \left(\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dacă se ține seama de relația:

$$\overline{MQ} = \bar{R} - \bar{r}(t),$$

se obține ***ecuația vectorială*** a binormalei în punctul ordinar M la curba în spațiu (Γ):

$$(N_b): \ \bar{R} - \bar{r}(t) = \lambda \left(\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observația 2.17. Dacă punctul ordinar $M \in (\Gamma)$ nu este un punct de inflexiune, sau nu aparține unui segment, iar curba în spațiu (Γ) este de clasă cel puțin 2, atunci planul osculator în M este unic determinat şi de aici (N_p) şi (N_b) sunt unic determinate.

Observații 2.18.

1°. În cazul în care curba (Γ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \ t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

iar $M \in (\Gamma)$, de coordonate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ şi X, Y, Z sunt coordonatele punctului curent $Q \in (N_b)$, atunci prin transcrierea analitică a ecuației vectoriale a binormalei în punctul M la curba în spațiu (Γ), se obțin ecuațiile scalare ale binormalei:

$$(N_b): \frac{X - x(t)}{\begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(t)}{\begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(t)}{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}}.$$

2°. În cazul în care curba (Γ) este dată în reprezentare naturală:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(s), \quad \text{s parametru natural,}$$

iar $M \in (\Gamma)$, de coordonate $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ şi X, Y, Z sunt coordonatele punctului curent $Q \in (N_b)$, rezultă că ecuația vectorială a binormalei se poate da şi sub forma:

$$(N_b): \ \bar{R} - \bar{r}(s) = \alpha\left(\bar{\tau}(s) \times \bar{\upsilon}(s)\right), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

sau sub forma:

$$(N_b): \ \bar{R} - \bar{r}(s) = \mu\left(\bar{r}'(s) \times \bar{r}''(s)\right), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

sau cu componente scalare:

$$(N_b): \frac{X - x(s)}{\begin{vmatrix} y'(s) & z'(s) \\ y''(s) & z''(s) \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(s)}{\begin{vmatrix} z'(s) & x'(s) \\ z''(s) & x''(s) \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(s)}{\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix}}.$$

❒

Definiția 2.18. Se numeşte ***versor binormal*** la curba în spațiu (Γ), în punctul ordinar $M \in (\Gamma)$, vectorul unitar al dreptei binormale, notat cu $\bar{\beta}$, orientat astfel încât ansamblul $\{M, \bar{\tau}, \bar{\upsilon}, \bar{\beta}\}$ să formeze un reper orientat ca şi reperul $\{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, (fig. 2.8).

Din această definiție rezultă că:

$$\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\upsilon}.$$

În figura 2.9 sunt indicate posibilitățile de direcție a lui $\overline{\tau}$ după sensul pozitiv al lui (Γ) (două posibilități), combinate cu posibilitățile de direcție a lui $\overline{\upsilon}$ (două pentru fiecare poziție a lui $\overline{\tau}$), precum şi toate noțiunile geometrice introduse în paragrafele 2.3, 2.4, 2.5, 2.6. În fiecare din cele patru cazuri s-a indicat una din posibilitățile de reprezentare grafică a curbei (Γ).

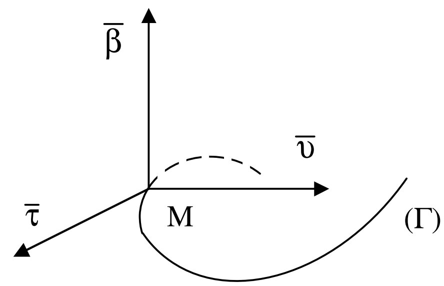


Fig. 2.8.

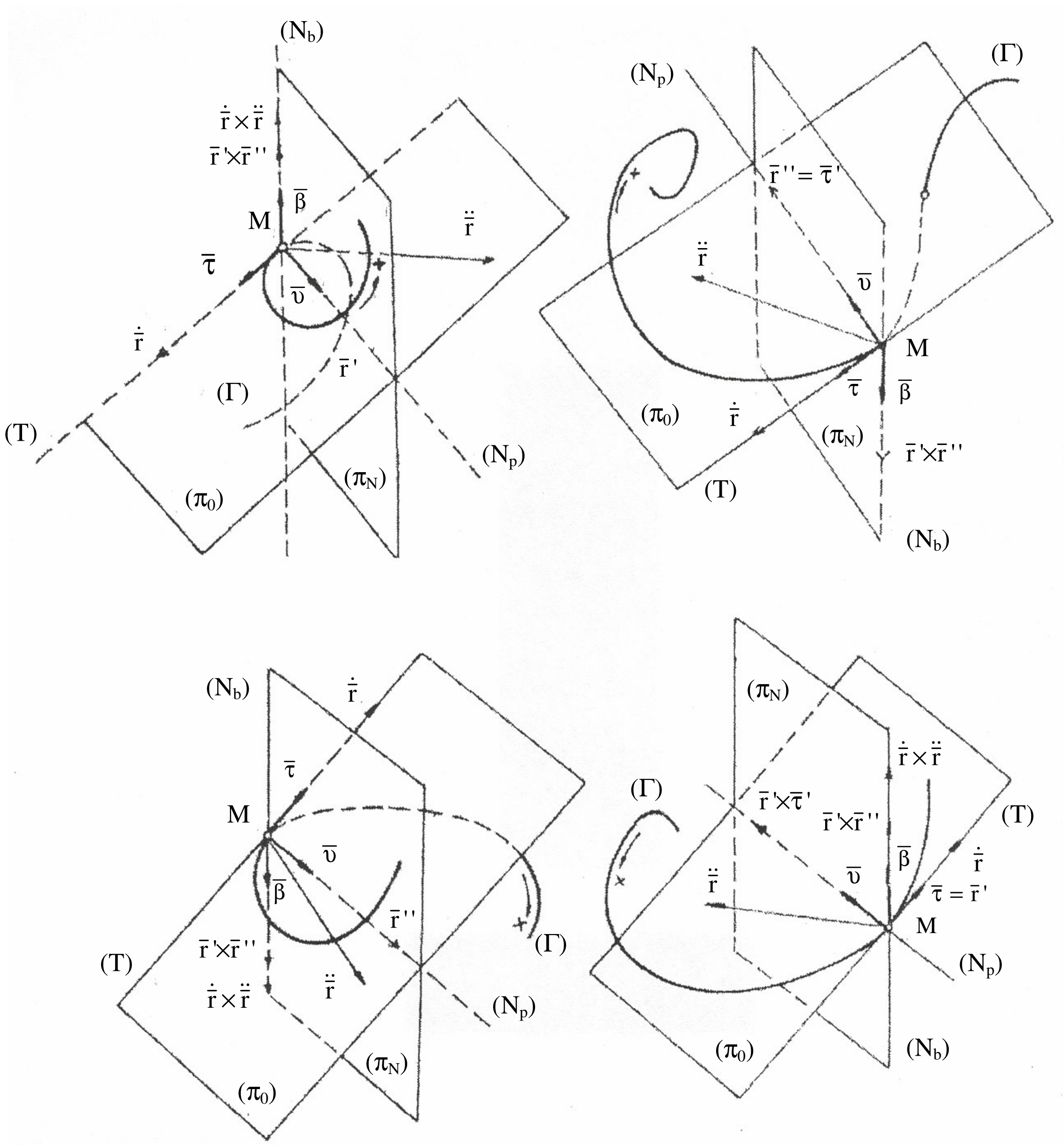


Fig 2.9.

Exemplul 2.6. Să se determine punctele de pe curba în spațiu:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \frac{2}{t}\,\bar{i} + \ln t\,\bar{j} - t^2\,\bar{k}$$

ale căror binoame să fie paralele cu planul de ecuație:

$$(\pi): \ x - y + 8z + 2 = 0.$$

Soluție: Vectorul director al binormalei în punctul M ∈ (Γ), de vector de poziție $\bar{r}(t)$ este $\dot{\bar{r}}(t)\times\ddot{\bar{r}}(t)$.

$$\dot{\bar{r}}(t) = -\frac{2}{t^2}\,\bar{i} + \frac{1}{t}\,\bar{j} - 2t\,\bar{k},$$

$$\ddot{\bar{r}}(t) = \frac{4}{t^3}\,\bar{i} - \frac{1}{t^2}\,\bar{j} - 2\,\bar{k},$$

$$\dot{\bar{r}}(t)\times\ddot{\bar{r}}(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\dfrac{2}{t^2} & \dfrac{1}{t} & -2t \\ \dfrac{4}{t^3} & -\dfrac{1}{t^2} & -2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{t}\,\bar{i} - \frac{12}{t^2}\,\bar{j} - \frac{2}{t^4}\,\bar{k} = -\frac{2}{t^4}\left(2t^3\,\bar{i} + 6t^2\,\bar{j} + \bar{k}\right).$$

Parametrii directori ai direcției binormalei sunt $2t^3$, $6t^2$, 1.

Condiția de paralelism cu planul (π) este:

$$\left(2t^3\,\bar{i} + 6t^2\,\bar{j} + \bar{k}\right)\cdot\left(\bar{i} - \bar{j} + 8\,\bar{k}\right) = 0,$$

deci:

$$2t^3 - 6t^2 + 8 = 0,$$

care are rădăcinile $t_1 = -1$ şi $t_{2,3} = 2$.

Există un singur punct pe curbă obținut pentru $t = 2$: M(1, ln 2, – 4), deoarece pentru $t = -1$, ln t nu există.

❐

§2.8. Planul rectificant la o curbă în spațiu

Definiția 2.19. Se numeşte ***plan rectificant*** la curba în spațiu regulată (Γ) în punctul M ∈ (Γ), planul (π_R) determinat de tangenta şi binormala la curba (Γ) ce trec prin punctul M.

În scopul determinării ecuației vectoriale a planului rectificant (π_R) se consideră curba regulată (Γ), de cel puțin ordinul doi, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(t), \ t \in \left(t_1, t_2\right).$$

Fie M ∈ (Γ), un punct curent, care nu este punct de inflexiune al curbei (Γ), de vector de poziție $\bar{r}(t)$, (π_R) planul rectificant la curba (Γ) în punctul M, iar Q ∈ (π_R) un punct curent de vector de poziție $\overline{R}$.

Prin definiție, planul rectificant (π_R), la curba (Γ) în punctul M ∈ (Γ) este determinat de tangentă şi binormală, deci el este generat de vectorii $\dot{\bar{r}}(t)$ şi $\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)$. Rezultă că vectorii $\overline{MQ}$, $\dot{\bar{r}}(t)$, $\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)$ sunt coplanari, adică are loc:

$$\overline{MQ} \cdot \left[\dot{\bar{r}}(t) \times \left(\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)\right)\right] = 0.$$

Dar:

$$\overline{MQ} = \overline{R} - \bar{r}(t),$$

deci:

$$(\pi_R): \left(\overline{R} - \bar{r}(t)\right) \cdot \left[\dot{\bar{r}}(t) \times \left(\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)\right)\right] = 0,$$

care reprezintă ***ecuația vectorială*** a planului rectificant la curba în spațiu (Γ) în punctul M.

Observații 2.19.

1°. Dacă curba în spațiu (Γ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \ t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

iar M ∈ (Γ), de coordonate x(t), y(t), z(t) şi Q ∈ (π_R), punct curent de coordonate X, Y, Z, atunci, dacă se transcriere analitic ecuația vectorială a planului rectificant, se obține ecuația scalară:

$$(\pi_R): \begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Dacă curba în spațiu (Γ) este dată în reprezentare naturală:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(s), \quad \text{s parametru natural},$$

iar M ∈ (Γ), de vector de poziție $\bar{r}(s)$, atunci ecuația vectorială a planului rectificant se scrie sub forma:

$$(\pi_R): \overline{R} = \bar{r}(s) + \gamma\, \bar{\tau}(s) + \delta\, \overline{\beta}(s), \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R},$$

sau sub forma:

$$(\pi_R): \overline{R} = \bar{r}(s) + \alpha\, \bar{r}'(s) + \mu \left[\bar{r}'(s) \times \bar{r}''(s)\right], \quad \alpha, \mu \in \mathbb{R}.$$

❐

Observația 2.20. Din definiția planului rectificant rezultă că acesta admite dreapta normală principală drept normală. Dacă se ține seama de acest lucru, rezultă că reprezentările vectorială şi scalară ale planului rectificant pot fi deduse imediat din reprezentările analoage ale dreptei normale principale.

§2.9. Triedrul lui Frenet

Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată de cel puțin ordinul doi şi M un punct al curbei (Γ) care nu aparține unui arc segment de dreaptă a lui (Γ) şi nu este punct inflexionar al acesteia. În aceste ipoteze s-au ataşat, în mod unic, la curba (Γ) în punctul M, trei versori: versorul tangent $\overline{\tau}$, versorul normal principal $\overline{\upsilon}$, respectiv versorul binormal $\overline{\beta}$.

Definiția 2.20. Ansamblul $\{M, \overline{\tau}, \overline{\upsilon}, \overline{\beta}\}$ ataşat curbei în spațiu (Γ) în punctul M ∈ (Γ) se numeşte ***reperul mobil al lui Frenet***.

Definiția 2.21. Se numeşte ***triedrul lui Frenet*** ataşat curbei în spațiu (Γ) în punctul M ∈ (Γ), triedrul drept determinat de versorii $\overline{\tau}$, $\overline{\upsilon}$, $\overline{\beta}$ (fig. 2.10).

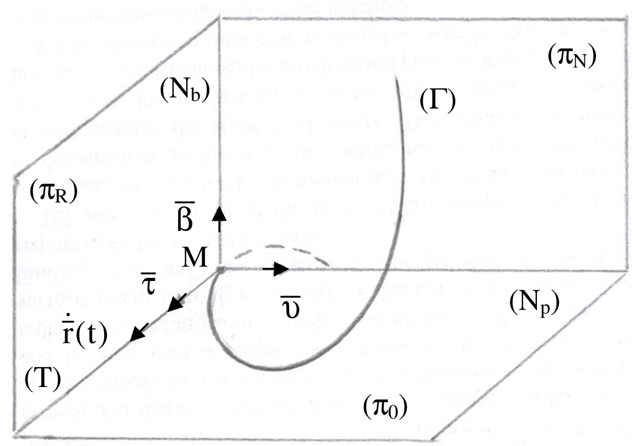


Fig. 2.10.

Planele acestui triedru sunt (π_O), (π_N), (π_R), ale căror ecuații se pot rescrie şi sub forma:

$$(\pi_O): \quad \left[\overline{R} - \overline{r}(s)\right] \cdot \overline{\beta}(s) = 0,$$

$$(\pi_N): \quad \left[\overline{R} - \overline{r}(s)\right] \cdot \overline{\tau}(s) = 0,$$

$$(\pi_R): \quad \left[\overline{R} - \overline{r}(s)\right] \cdot \overline{\upsilon}(s) = 0,$$

iar muchiile triedrului lui Frenet sunt (T), (N_p), (N_b).

Deoarece reperul lui Frenet este ortonormat şi orientat drept, rezultă că între versorii acestuia au loc relațiile următoare:

$$\overline{\tau} \cdot \overline{\tau} = \overline{\upsilon} \cdot \overline{\upsilon} = \overline{\beta} \cdot \overline{\beta} = 1,$$

$$\overline{\tau} \cdot \overline{\upsilon} = \overline{\upsilon} \cdot \overline{\beta} = \overline{\beta} \cdot \overline{\tau} = 0,$$

$$\overline{\tau} \times \overline{\tau} = \overline{\upsilon} \times \overline{\upsilon} = \overline{\beta} \times \overline{\beta} = \overline{0},$$

$$\overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\upsilon}, \quad \overline{\tau} = \overline{\upsilon} \times \overline{\beta}, \quad \overline{\upsilon} = \overline{\beta} \times \overline{\tau},$$

unde $\overline{\tau}$, $\overline{\upsilon}$, $\overline{\beta}$ sunt dați prin formulele:

$$\overline{\tau}(s)=\overline{r}'(s), \qquad \overline{\upsilon}(s)=\frac{\overline{r}''(s)}{\left\|\overline{r}'(s)\right\|}, \qquad \overline{\beta}(s)=\frac{\overline{r}'(s)\times\overline{r}''(s)}{\left\|\overline{r}'(s)\times\overline{r}''(s)\right\|},$$

în cazul în care curba (Γ) este dată în reprezentare naturală:

$$(\Gamma):\overline{r}=\overline{r}(s), \quad \text{s parametru natural},$$

sau respectiv prin formulele:

$$\overline{\tau}(t)=\frac{\dot{\overline{r}}(t)}{\left\|\dot{\overline{r}}(t)\right\|}, \quad \overline{\upsilon}(t)=\frac{\left(\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)\right)\times\dot{\overline{r}}(t)}{\left\|\left(\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)\right)\times\dot{\overline{r}}(t)\right\|}, \quad \overline{\beta}(t)=\frac{\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)}{\left\|\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)\right\|},$$

dacă curba (Γ) este dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma):\overline{r}=\overline{r}(t), \ t\in\left(t_1,t_2\right),$$

cu t parametru oarecare. ❐

Observația 2.21. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată, M ∈ (Γ) un punct curent ordinar şi neinflexionar, (Γ) fiind dată în reprezentare parametrică:

$$(\Gamma):\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \ t\in(t_1,t_2). \end{cases}$$

Funcția s = s(t) este continuă şi derivabilă, deci:

$$\frac{d\overline{r}}{ds}=\frac{d\overline{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{d\overline{r}}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}},$$

$$\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}=\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{d\overline{r}}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}=\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}+\frac{d\overline{r}}{dt}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\right)=\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}+$$

$$+\frac{d\overline{r}}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\right)\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{d\overline{r}}{dt}\cdot\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\frac{d^2\overline{r}\cdot ds-d\overline{r}\cdot d^2s}{ds^3}.$$

Prin înlocuirea derivatelor $\frac{d\overline{r}}{ds}$ şi $\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$ în $\overline{\tau}(s)$, $\overline{\upsilon}(s)$ şi $\overline{\beta}(s)$ se obțin versorii $\overline{\tau}$, $\overline{\upsilon}$, $\overline{\beta}$ în funcție de parametrul t.

❒

Exemplul 2.7. Fie curba în spațiu:

$$(\Gamma):\ \bar{r}(t) = 2\,t\,\bar{i} + t^2\,\bar{j} + \ln t\,\bar{k},\quad t > 0.$$

Să se determine ecuațiile muchiilor şi fețelor triedrului Frenet în punctul P(2, 1, 0).

Soluție: Pe curba (Γ) punctul P(2, 1, 0) corespunde la valoarea t = 1 a parametrului. Vectorul director al tangentei în P este:

$$\dot{\bar{r}}\Big|_P = \left[2\,\bar{i} + 2\,t\,\bar{j} + \frac{1}{t}\,\bar{k}\right]_{t=1} = 2\,\bar{i} + 2\,\bar{j} + \bar{k},$$

iar ecuațiile tangentei în P la curba (Γ) sunt date de:

$$(T):\ \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}.$$

Planul normal are drept vector normal $\overline{N} = \dot{\bar{r}}$ şi ecuația:

$$(\pi_N):\ 2(x-2) + 2(y-1) + 1(z-0) = 0,$$

sau:

$$(\pi_N):\ 2\,x + 2\,y + z - 6 = 0.$$

Planul osculator conține punctul P şi este determinat de vectorii $\dot{\bar{r}}\big|_P$, $\ddot{\bar{r}}\big|_P$, ecuația sa este:

$$(\pi_0):\ \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$(\pi_0):\ 2\,x - y - 2\,z - 3 = 0.$$

Dreapta binormală este perpendiculară pe planul osculator în P, deci are vectorul director $\overline{N}_P(2,-1,-2)$, rezultă ecuațiile:

$$(N_b):\ \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-2}.$$

Normala principală se află la intersecția dintre planul normal şi planul osculator, şi are ecuațiile:

$$(N_p):\ \begin{cases} 2\,x + 2\,y + z - 6 = 0, \\ 2\,x - y - 2\,z - 3 = 0. \end{cases}$$

Planul rectificant conține dreapta tangentă şi dreapta binormală iar ecuația sa este:

$$(\pi_R):\ \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$(\pi_R):\ x - 2\,y + 2\,z = 0.$$ ❐

§2.10. Indicatoare sferice. Curbură. Torsiune

Definiția 2.22. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată, $M \in (\Gamma)$ un punct curent pe curba (Γ) şi (S) o sferă cu centrul în O şi de rază egală cu unitatea. Se consideră vectorul tangentei $\overline{\tau}$ în punctul M şi fie $\overline{OM'} = \overline{\tau}^* = \overline{\tau}$ un vector cu originea în O şi extremitatea în $M' \in (S)$, echipolent cu $\overline{\tau}$. Când punctul M va parcurge curba (Γ) în sens pozitiv, punctul M' va descrie pe sfera (S) o curbă (Γ) (fig. 2.11).

Se numeşte ***indicatoare sferică a tangentelor,*** curba în spațiu (Γ_1) astfel definită.

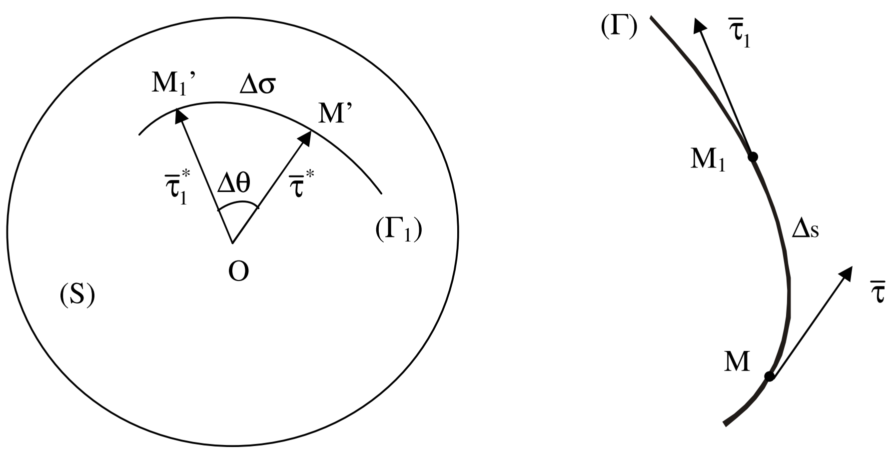


Fig. 2.11.

Fie M_1 un alt punct al curbei regulate (Γ), (Γ_1) indicatoarea sferică a tangentelor şi M', $M_1' \in (\Gamma_1)$, două puncte pe curba (Γ_1), corespunzătoare punctelor M şi M_1 (fig. 2.11). Se notează cu Δs lungimea arcului $\overset{\frown}{MM_1} \subset (\Gamma)$ şi cu $\Delta\sigma$ lungimea arcului $\overset{\frown}{M'M_1'} \subset (\Gamma_1)$.

Definiția 2.23. Se numeşte ***curbură medie*** a arcului $\overset{\frown}{MM_1}$, raportul:

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|.$$

Observația 2.22. Curbura medie se notează cu $K_m(\overset{\frown}{MM_1})$.
Deci:

$$K_m(\overset{\frown}{MM_1}) = \left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|.$$

Definiția 2.24.. Se numeşte ***curbura curbei*** în spațiu (Γ) în punctul M, limita curburii medii a arcului $\overset{\frown}{MM_1}$ când $M_1 \to M$, dacă această limită există şi este finită.

Observația 2.23. Curbura curbei în spațiu (Γ) în punctul M se notează prin K.
Deci:

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|.$$

Definiția 2.25. Se numeşte ***rază de curbură*** a curbei în spațiu (Γ) în punctul M, inversa curburii curbei (Γ) în punctul M.

Observația 2.24. Raza de curbură se notează cu R.
Deci:

$$R = \frac{1}{|K|} = \left|\frac{ds}{d\sigma}\right|.$$

Teorema 2.9. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată, M, $M_1 \in (\Gamma)$ şi fie M', $M_1' \in (\Gamma_1)$ punctele corespunzătoare punctelor M, M_1 (fig. 2.11). Dacă se notează cu Δs lungimea arcului $\overset{\frown}{MM_1} \subset (\Gamma)$, cu $\Delta\sigma$ lungimea arcului $\overset{\frown}{M_1M_1'} \subset (\Gamma_1)$ şi cu $\Delta\theta$ unghiul versorilor $\bar\tau$ şi $\bar\tau_1$ ai tangentelor la curba (Γ) duse în M, respectiv M_1, atunci:

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|.$$

Demonstrație. Deoarece:

$$\bar\tau^* = \bar\tau, \qquad \bar\tau_1^* = \bar\tau_1,$$

rezultă:

$$\widehat{(\bar\tau^*, \bar\tau_1^*)} = \widehat{(\bar\tau, \bar\tau_1)}.$$

Atunci au loc relațiile:

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| \cdot \left|\frac{\Delta\sigma}{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|}\right| \cdot \left|\frac{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|}{\Delta\theta}\right|,$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|}\right|\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|}{\Delta\theta}\right|,$$

însă:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|}{\Delta\theta}\right| = 1.$$

Rezultă că:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|,$$

prin urmare:

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|.$$ ❒

Definiția 2.26. Se numeşte ***unghi de contingență al tangentelor***, unghiul $\Delta\theta$ format de versorii tangentelor la curba (Γ) duse în punctele M, respectiv M_1 ale curbei (Γ).

Definiția 2.27. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată şi M un punct curent pe (Γ). Fie (S) sfera unitate cu centrul în O. Dacă $\overline{\beta}$ este versorul binormalei în M, se consideră vectorul $\overline{OM'} = \overline{\beta}^* = \overline{\beta}$ un vector echipolent cu $\overline{\beta}$, cu originea în O şi extremitatea în M' $\in$ (S). Când punctul M descrie curba (Γ) în sens pozitiv, punctul M' va descrie pe sfera (S) curba (Γ^*) (fig. 2.12).

Se numeşte ***indicatoare sferică a binormalelor*** curba în spațiu (Γ^*) astfel definită.

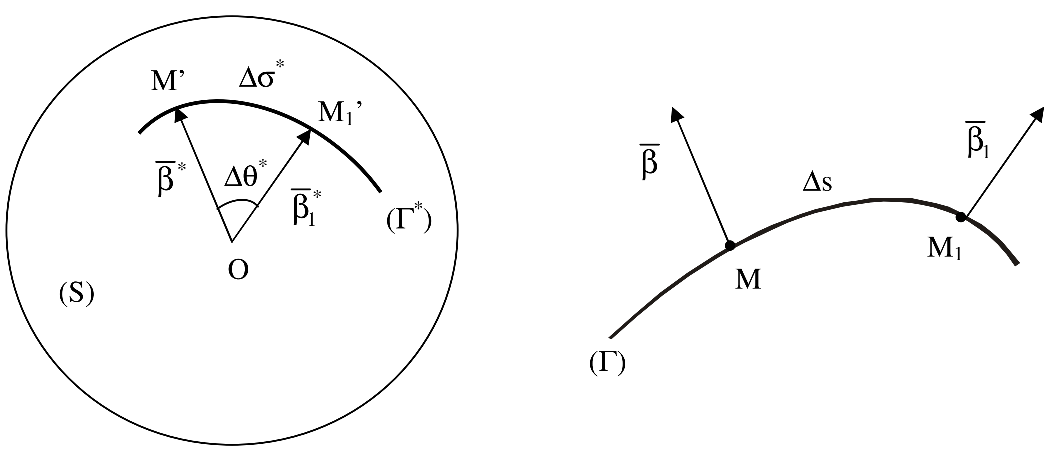


Fig. 2.12.

Fie M_1 un alt punct al curbei (Γ), $\overline{\beta}_1$ versorul binormalei în M_1 şi fie $\overline{OM'}_1 = \overline{\beta}_1^*$ vectorul cu originea în O şi cu extremitatea în punctul $M_1' \in$ (S) echipolent cu $\overline{\beta}_1$. Rezultă că $M'_1 \in (\Gamma^*)$. Se notează cu Δs lungimea arcului MM_1 al curbei (Γ) şi cu $\Delta\sigma^*$ lungimea arcului $\overset{\frown}{M'M_1'} \subset (\Gamma^*)$.

Definiția 2.28. Se numeşte ***torsiune medie*** a arcului $\overset{\frown}{MM_1}$, numărul real K^*_m care satisface:

$$\left|K^*_m\right| = \left|\frac{\Delta\sigma^*}{\Delta s}\right|.$$

Definiția 2.29.. Se numeşte ***torsiunea*** curbei în spațiu (Γ) în punctul M, numărul real K^* care satisface:

$$\left|K^*\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\sigma^*}{\Delta s}\right|,$$

dacă limita există şi este finită, adică:

$$\left|K^*\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\sigma^*}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\sigma^*}{ds}\right|.$$

Definiția 2.30. Se numeşte ***rază de torsiune*** a curbei în spațiu (Γ) în punctul M, inversa torsiunii curbei (Γ) în punctul M.

Observația 2.25. Raza de curbură se notează cu T.

Deci:

$$T = \frac{1}{K^*},$$

sau:

$$\left|T\right| = \left|\frac{ds}{d\sigma^*}\right|.$$

Teorema 2.10. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată, $M, M_1 \in (\Gamma)$ şi fie $M', M_1' \in (\Gamma^*)$ punctele corespunzătoare punctelor M, M_1 (fig. 2.12). Dacă se notează cu Δs lungimea arcului $\overset{\frown}{MM_1} \subset (\Gamma)$, cu $\Delta\sigma^*$ lungimea arcului $\overset{\frown}{M_1M_1'} \subset (\Gamma^*)$ şi cu $\Delta\theta^*$ unghiul versorilor $\overline{\beta}$ şi $\overline{\beta_1}$ ai binormalelor la curba (Γ) duse în M, respectiv M_1, atunci:

$$\left|K^*\right| = \left|\frac{d\theta^*}{ds}\right|.$$

Demonstrație. Deoarece:

$$\overline{\beta}^* = \overline{\beta}, \qquad \overline{\beta}_1^* = \overline{\beta}_1,$$

rezultă:

$$\left(\widehat{\overline{\beta}^*, \overline{\beta}_1^*}\right) = \left(\widehat{\overline{\beta}, \overline{\beta}_1}\right).$$

Atunci au loc relațiile:

$$\frac{\Delta\sigma^*}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta^*}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta\sigma^*}{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|} \cdot \frac{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|}{\Delta\theta^*},$$

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\sigma^*}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\theta^*}{\Delta s}\right| \cdot \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\left|\Delta\sigma^*\right|}{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|} \cdot \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|}{\left|\Delta\theta^*\right|},$$

însă:

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\left|\Delta\sigma^*\right|}{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\left\|\overline{M'M_1'}\right\|}{\left|\Delta\theta^*\right|} = 1.$$

Rezultă că:

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\sigma^*}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\theta^*}{\Delta s}\right|,$$

prin urmare:

$$\left|K^*\right| = \left|\frac{d\theta^*}{ds}\right|.$$ ❒

Definiția 2.31. Se numeşte ***unghi de contingență al binormalelor***, unghiul $\Delta\theta^*$ format de versorii bionormalelor la curba (Γ) duse în punctele M, respectiv M_1 ale curbei (Γ).

§2.11. Formulele lui Frenet

Teorema 2.11. Se consideră o curbă în spațiu (Γ) regulată de ordinul k, k ≥ 3, dată în reprezentare naturală:

$(\Gamma) : \overline{r} = \overline{r}(s)$, s parametru natural.

Fie M un punct curent pe curba (Γ), de vector de poziție $\overline{r}\,(s)$, care nu este punct de inflexiune, iar $\overline{\tau}$, $\overline{\upsilon}$, $\overline{\beta}$ versorii tangentei, normalei principale şi respectiv binormalei în M. Dacă razele de curbură şi de torsiune R şi respectiv T sunt nenule în punctul M şi dacă ds este elementul de arc pe curba (Γ), atunci au loc următoarele relații:

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\,\overline{\upsilon}, \tag{2.5}$$

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\frac{1}{T}\,\overline{\upsilon}, \tag{2.6}$$

$$\frac{d\overline{\upsilon}}{ds} = -\frac{1}{R}\,\overline{\tau} + \frac{1}{T}\,\overline{\beta}. \tag{2.7}$$

Demonstrație. Se știe că vectorii $\overline{\tau}$ și $\overline{\upsilon}$ sunt dați de formulele:

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds}, \qquad \overline{\upsilon} = \frac{1}{\left\|\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right\|}\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}.$$

De aici rezultă:

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \left\|\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right\|\overline{\upsilon}. \tag{2.8}$$

Pe de altă parte, conform definiției 2.24, are loc:

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = \frac{1}{R},$$

unde $d\sigma$ este elementul de arc pe indicatoarea sferică a tangentelor (Γ_1). Fie M' $\in$ (Γ_1), un punct curent pe indicatoarea sferică a tangentelor, de vector de poziție $\overline{\tau}^*$, corespunzător punctului curent M $\in$ (Γ).

Are loc relația:

$$\left\|d\overline{\tau}^*\right\| = \left|d\sigma\right|,$$

deci:

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = \left\|\frac{d\overline{\tau}^*}{ds}\right\|,$$

însă:

$$\overline{\tau}^* = \overline{\tau},$$

deci:

$$\frac{1}{R} = \left\|\frac{d\overline{\tau}}{ds}\right\| = \left\|\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right\|.$$

Prin înlocuire în (2.8) se obține:

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\,\overline{\upsilon},$$

adică formula (2.5) este demonstrată.

Pentru a verifica formula (2.6) se consideră relația:

$$\overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\upsilon},$$

care prin derivare în raport cu arcul s al curbei (Γ), conduce la:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = \frac{d\overline{\tau}}{ds} \times \overline{\upsilon} + \overline{\tau} \times \frac{d\overline{\upsilon}}{ds}.$$

Însă:

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\,\overline{\upsilon},$$

deci:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = \overline{\tau} \times \frac{d\overline{\upsilon}}{ds},\ \left(\overline{\upsilon} \times \overline{\upsilon} = \overline{0}\right). \tag{2.9}$$

Deoarece vectorul $\overline{\upsilon}$ are modulul constant $\left(\|\overline{\upsilon}\| = 1\right)$, rezultă conform propoziției 2.1 că:

$$\frac{d\overline{\upsilon}}{ds} \perp \overline{\upsilon},$$

deci, $\frac{d\overline{\upsilon}}{ds}$ este coplanar cu vectorii $\overline{\tau}$ şi $\overline{\beta}$. Prin urmare, $\frac{d\overline{\upsilon}}{ds}$ poate fi descompus după vectorii $\overline{\tau}$ şi $\overline{\beta}$:

$$\frac{d\overline{\upsilon}}{ds} = \lambda\overline{\tau} + \mu\overline{\beta}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Se deduce astfel prin înlocuire în relația (2.9):

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = \overline{\tau} \times \left(\lambda\overline{\tau} + \mu\overline{\beta}\right),$$

adică:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\mu\overline{\upsilon},\ \left(\overline{\tau} \times \overline{\tau} = \overline{0}, \quad \overline{\tau} \times \overline{\beta} = -\overline{\upsilon}\right), \tag{2.10}$$

de unde:

$$\left\|\frac{d\overline{\beta}}{ds}\right\| = \|-\mu\overline{\upsilon}\| = |\mu|, \tag{2.11}$$

Fie M' ∈ (Γ^*) un punct curent pe indicatoarea sferică a binormalelor de vector de poziție $\overline{\beta}^* = \overline{\beta}$, corespunzător punctului curent M ∈ (Γ).

Are loc relația:

$$\left\|d\overline{\beta}^*\right\| = \left|d\sigma^*\right|,$$

deci:

$$\left|\frac{d\sigma^*}{ds}\right| = \left\|\frac{d\overline{\beta}^*}{ds}\right\|.$$

Însă:

$$\left\|\frac{d\overline{\beta}^*}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\overline{\beta}}{ds}\right\|,$$

deci:

$$\left\|\frac{d\overline{\beta}}{ds}\right\| = \left|\frac{d\sigma^*}{ds}\right|.$$

Dar:

$$\left|\frac{d\sigma^*}{ds}\right| = \left|\frac{1}{T}\right|,$$

deci:

$$\left\|\frac{d\overline{\beta}}{ds}\right\| = \left|\frac{1}{T}\right|. \tag{2.12}$$

Dacă se ține seama de relațiile (2.11) şi (2.12) rezultă:

$$|\mu| = \left|\frac{1}{T}\right|, \qquad \mu = \pm\frac{1}{T}.$$

Se consideră:

$$\mu = \frac{1}{T},$$

atunci din relația (2.10) se obține:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\frac{1}{T}\,\overline{\upsilon},$$

adică formula (2.6) este obținută.

În scopul demonstrării şi a formulei (2.7) se observă că are loc relația:

$$\overline{\upsilon} = \overline{\beta}\times\overline{\tau},$$

de unde:

$$\frac{d\overline{\upsilon}}{ds} = \frac{d\overline{\beta}}{ds}\times\overline{\tau} + \overline{\beta}\times\frac{d\overline{\tau}}{ds},$$

însă pe baza formulelor (2.5) şi (2.6) se obține:

$$\frac{d\overline{\upsilon}}{ds} = \frac{1}{T}\,\overline{\beta} - \frac{1}{R}\,\overline{\tau}, \qquad \left(\overline{\upsilon}\times\overline{\tau} = -\overline{\beta}, \quad \overline{\beta}\times\overline{\upsilon} = -\overline{\tau}\right),$$

deci şi formula (2.7) este demonstrată. ❐

Definiția 2.32. Egalitățile (2.5), (2.6) şi (2.7) obținute în teorema 2.11, se numesc ***formulele lui Frenet*** relative la curba în spațiu (Γ).

Formulele lui Frenet sunt de mare importanță pentru demonstrarea următoarei teoreme fundamentale a teoriei curbelor în spațiu şi anume:

Teorema 2.12. Fie $K = K(s)$, $\chi = \chi(s)$ două funcții continue pe intervalul $I \subset [0, \infty)$ şi astfel încât $K(s) > 0$ pentru orice $s \in I$. În aceste condiții există o curbă care admite o reprezentare naturală cu s ca parametru şi pentru care $K(s)$ şi $\chi(s)$ sunt curbura şi respectiv torsiunea. Două curbe cu această proprietate diferă cel mult printr-o rotație şi o translație.

Observația 2.26. Rezultatul dat în teorema 2.12 arată că funcțiile continue:

$$K = K(s), \quad \chi = \chi(s), \quad K(s) > 0, \quad (\forall)\ s \in I, \tag{2.13}$$

determină o curbă până la rotații şi translații în spațiu. Din acest motiv, ecuațiile (2.13) se numesc ***ecuații intrinseci*** ale curbelor în spațiu.

§2.12. Aplicații ale formulelor lui Frenet

Următoarele patru rezultate dau unele informații asupra interpretării geometrice a curburii şi torsiunii unei curbe în spațiu.

Teorema 2.13. Fie (Γ) o curbă în spațiu, regulată de ordinul k, $k \geq 2$. Condiția necesară şi suficientă ca această curbă să fie o dreaptă este:

$$K = 0.$$

Demonstrație. Necesitatea. Fie (Γ) o dreaptă. În acest caz tangenta la curba (Γ) are o direcție constantă, adică:

$$\Delta\theta = 0,$$

unde $\Delta\theta$ este unghiul de contingență al tangentelor.

Se obține:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = 0$$

şi deci:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = 0.$$

Suficiența. Fie (Γ) o curbă în spațiu astfel încât:

$$K = 0.$$

Din formula (2.5) a lui Frenet, rezultă:

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = K\,\overline{\upsilon},$$

deci:

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \overline{0},$$

adică:

$$d\overline{\tau} = \overline{0}.$$

Prin integrare se obține:

$$\overline{\tau} = \overline{\tau}_0,$$

unde $\overline{\tau}_0$ este un vector constant.

Însă:

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds},$$

deci:

$$d\overline{r} = \overline{\tau}_0\, ds.$$

Prin integrare se obține:

$$\overline{r} = \overline{\tau}_0\, s + \overline{r}_0,$$

unde $\overline{r}_0$ este un vector constant. Prin transcrierea analitică a acestei ecuații se obține:

$$\begin{cases} x = ls + x_0, \\ y = ms + y_0, \\ z = ns + z_0, \end{cases}$$

unde:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},\ \overline{r}_0 = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k},\ \ \overline{\tau}_0 = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}.$$

S-au obținut tocmai ecuațiile parametrice ale unei drepte, adică (Γ) este o dreaptă.

❒

Teorema 2.14. Fie (Γ) o curbă în spațiu, regulată de ordinul k, k ≥ 2, fără puncte singulare şi astfel încât K > 0. (Γ) este curbă plană dacă şi numai dacă $\frac{1}{T} = 0$.

Demonstrație. Necesitatea. Se consideră curba în spațiu (Γ) în reprezentare parametrică naturală:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \\ z = z(s), \qquad \text{s parametru natural.} \end{cases}$$

Dacă se presupune că (Γ) este o curbă plană, atunci există un plan:

(π): $Ax + By + Cz + D = 0$,

astfel încât toate punctele lui (Γ) îi aparțin, deci are loc:

$$Ax(s) + By(s) + Cz(s) + D = 0.$$

Prin derivarea acestei egalități de două ori în raport cu s se obține:

$$Ax'(s) + By'(s) + Cz'(s) = 0, \qquad Ax''(s) + By''(s) + Cz''(s) = 0,$$

deci vectorii $\bar{r}'(s)$, $\bar{r}''(s)$ sunt ortogonali pe vectorul normal $\overline{N}(A, B, C)$ la planul (π). Rezultă astfel că vectorul $\bar{r}'(s)\times\bar{r}''(s)$ este coliniar cu $\overline{N}$, deci:

$$\overline{\beta} = \frac{1}{\left\|\overline{N}\right\|}\overline{N}$$

şi atunci:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = \overline{0}.$$

Prin folosirea formulei (2.6) a lui Frenet, rezultă atunci:

$$\frac{1}{T} = 0.$$

Suficiența. Dacă $\frac{1}{T} = 0$ în toate punctele curbei (Γ), atunci din aceeaşi formulă (2.6) rezultă:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = \overline{0}$$

şi deci prin integrare se obține:

$$\overline{\beta} = \overline{\beta}_0,$$

unde:

$$\overline{\beta}_0 = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k},$$

este un vector constant.

Prin înmulțire scalară a acestei relații cu $\bar{\tau}$, se obține:

$$\bar{\tau}\cdot\overline{\beta} = \bar{\tau}\cdot\overline{\beta}_0,$$

însă:

$$\bar{\tau}\cdot\overline{\beta} = 0,$$

deci:

$$\bar{\tau}\cdot\overline{\beta}_0 = 0.$$

Dar:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds},$$

deci:

$$\bar{\beta}_0 \cdot \frac{d\bar{r}}{ds} = 0.$$

Prin transcrierea analitică a ultimei ecuații se obține:

$$Ax'(s) + By'(s) + Cz'(s) = 0,$$

sau:

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

care este o ecuație diferențială totală, ce integrată conduce la:

$$Ax(s) + By(s) + Cz(s) + D = 0,$$

unde D este o constantă.

x(s), y(s), z(s) sunt coordonatele unui punct arbitrar $M \in (\Gamma)$, rezultă că (Γ) este situată în planul (π) de ecuație:

$$(\pi): \ Ax + By + Cz + D = 0.$$ ❐

Teorema 2.15. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată de ordinul k, $k \geq 3$, ale cărei puncte sunt ordinare şi astfel încât $K > 0$. (Γ) este o parte a unui cerc dacă şi numai dacă $\frac{1}{T} = 0$ şi $K = \text{constant}$.

Demonstrație. Necesitatea. Fie (Γ) o porțiune a unui cerc. Printr-o translație se poate presupune că centrul acestuia este chiar originea reperului. Fie curba (Γ) dată în reprezentare naturală:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(s), \quad \text{s parametru natural.}$$

Deoarece la un cerc raza şi tangenta într-un punct sunt perpendiculare, rezultă că are loc relația:

$$\bar{r}(s) \cdot \bar{r}'(s) = 0.$$

Prin derivarea acestei egalități se obține:

$$\bar{\tau}^2(s) + \bar{r}(s) \cdot \bar{r}''(s) = 0,$$

deci:

$$1 + \bar{r}(s) \cdot \frac{d\bar{\tau}}{ds} = 0,$$

sau prin utilizarea formulei (2.5) a lui Frenet, se deduce:

$$\bar{r}(s) \cdot \bar{\upsilon} = -\frac{1}{K}.$$

Prin derivarea acestei egalități în raport cu s şi prin utilizarea formulei (2.7) a lui Frenet, se obține:

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{K}\right) = \bar{\tau} \cdot \bar{\upsilon} + \bar{r}\left(-K\bar{\tau} + \frac{1}{T}\bar{\beta}\right).$$

Dar:

$\bar{\tau} \cdot \bar{\upsilon} = 0$, $\bar{r} \cdot \bar{\tau} = 0$, $\frac{1}{T} = 0$ (deoarece curba (Γ) este plană se aplică teorema 2.14).

Rezultă că:

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{K}\right) = 0,$$

deci $\frac{1}{K}$ este constantă.

Suficiența. Fie curba (Γ) astfel încât $\frac{1}{T} = 0$ şi K = constant. Conform teoremei 2.14 se obține că (Γ) este o curbă plană. Prin utilizarea formulei (2.7) a lui Frenet se obține:

$$\frac{d}{ds}\left(\bar{r} + \frac{1}{K}\bar{\upsilon}\right) = \bar{\tau} + \frac{1}{K} \cdot \frac{d\bar{\upsilon}}{ds} = \bar{\tau} + \frac{1}{K}(-K \cdot \bar{\tau}) = \bar{0},$$

deci:

$$\bar{r} + \frac{1}{K}\bar{\upsilon} = \bar{a},$$

unde $\bar{a}$ este un vector constant. Se obține astfel:

$$(\bar{r} - \bar{a})^2 = \frac{1}{K^2},$$

sau:

$$(x(s) - a_1)^2 + (y(s) - a_2)^2 + (z(s) - a_3)^2 = \frac{1}{K^2},$$

unde x(s), y(s), z(s) sunt coordonatele unui punct curent al curbei (Γ), iar $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$.

Această egalitate arată că (Γ) se află la intersecția sferei de centru $C(a_1, a_2, a_3)$ şi rază $\frac{1}{K}$, cu un plan, adică este o parte a unui cerc. ❒

Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată de ordinul k, k ≥ 3, în vecinătatea punctului $M_0 \in$ (Γ) corespunzător la $s = s_0$. Fie $\bar{\tau}_0, \bar{\upsilon}_0, \bar{\beta}_0$, versorii triedrului lui Frenet, ataşați curbei (Γ) în M_0 şi K_0, K_0^*, curbura şi respectiv torsiunea presupuse nenule, în acest punct.

Definiția 2.33. O curbă în spațiu (Γ) regulată de ordinul k, k ≥ 3, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(t),\ t \in (t_1, t_2),$$

se spune că este ***drept orientată*** în punctul $M_0 \in (\Gamma)$, corespunzător valorii s_0 a parametrului s, dacă pentru s crescător ($s > s_0$) punctele curbei (Γ) părăsesc planul osculator (π_0) în M_0 pe partea pozitivă a sa, parte dată de $\bar{\beta}_0$ şi este ***stâng orientată*** în punctul M_0 dacă pentru $s > s_0$ punctele curbei (Γ) părăsesc planul osculator (π_0) în M_0 pe partea sa negativă, parte dată de $-\bar{\beta}_0$.

Observația 2.27. Definiția de mai sus este independentă de orientarea pe curbă, deoarece dacă $s^* = -s$, se obține $\bar{\tau}^* = -\bar{\tau}$, $\bar{\upsilon}^* = \bar{\upsilon}$, dar şi $\bar{\beta}^* = -\bar{\beta}$.

Teorema 2.16. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată de ordinul k, k ≥ 3, în vecinătatea unui punct $M_0 \in (\Gamma)$, K_0, K_0^*, curbura şi respectiv torsiunea, presupuse nenule în acest punct. Dacă torsiunea în M_0 este pozitivă, atunci curba (Γ) este drept orientată în M_0, iar dacă torsiunea în M_0 este negativă, atunci curba (Γ) este stâng orientată în M_0.

Demonstrație. Deoarece curba (Γ) este regulată de ordinul cel puțin trei, rezultă că există şi sunt continue funcțiile vectoriale: $\bar{r}(s), \bar{r}'(s), \bar{r}''(s), \bar{r}'''(s)$. Prin aplicarea formulei lui Taylor, se obține:

$$\bar{r}(s) = \bar{r}(s_0) + \frac{s - s_0}{1!}\bar{r}'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}\bar{r}''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}\bar{r}'''(s_0) + \bar{\theta},$$

unde:

$$\bar{\theta} \xrightarrow[s \to s_0]{} \bar{0}.$$

Prin utilizarea formulelor lui Frenet, se obține:

$$\bar{r}'(s_0) = \bar{\tau}_0, \qquad \bar{r}''(s_0) = K_0\,\bar{\upsilon}_0, \qquad \bar{r}'''(s_0) = -K_0^2\,\bar{\tau}_0 + K'_0\,\bar{\upsilon}_0 + K_0 K_0^*\,\bar{\beta}_0.$$

Rezultă deci:

$$\bar{r}(s) = \bar{r}_0 + \left[(s - s_0) - \frac{(s - s_0)^3}{6}K_0^2\right]\bar{\tau}_0 + \left[\frac{(s - s_0)^2}{2}K_0 + \frac{(s - s_0)^3}{6}K'_0\right]\bar{\upsilon}_0 +$$

$$+ \frac{(s - s_0)^3}{6}K_0 K_0^*\,\bar{\beta}_0 + \bar{\theta}, \quad (\bar{r}_0 = \bar{r}(s_0)). \tag{2.14}$$

Dacă se ține seama că produsul mixt $(\bar{\tau}_0, \bar{\upsilon}_0, \bar{\beta}_0) = 1$, din relația (2.14) se obține:

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{\tau}_0, \bar{\upsilon}_0) = \frac{(s - s_0)^3}{6}K_0 K_0^* + \varepsilon, \tag{2.15}$$

unde:

$$\varepsilon = \left(\overline{\theta}, \overline{\tau}_0, \overline{\upsilon}_0\right) = \xrightarrow[s \to s_0]{} 0.$$

Dacă s > s_0 şi cum $K_0 > 0$, cantitatea $\frac{(s-s_0)^3}{6} K_0$, este pozitivă, iar membrul doi al relației (2.15) păstrează într-o vecinătate suficient de mică a lui s_0, semnul lui K_0^*. Aşadar, dacă torsiunea $K_0^* > 0$, din egalitatea (2.15) rezultă că:

$$\left(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{\tau}_0, \overline{\upsilon}_0\right) > 0,$$

deci curba este drept orientată în M_0, iar dacă torsiunea $K_0^* < 0$, rezultă că:

$$\left(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{\tau}_0, \overline{\upsilon}_0\right) < 0,$$

adică curba (Γ) este stâng orientată în M_0. ❒

Observația 2.28. Din teoremele 2.14 şi 2.16 reiese că torsiunea măsoară “abaterea” curbei de la planul osculator al acesteia.

§2.13. Calculul curburii şi al torsiunii

Teorema 2.17. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată de ordinul k, k ≥ 3, M ∈ (Γ) un punct curent, ds elementul de arc pe curba (Γ), iar R raza de curbură a curbei (Γ) în punctul M.

1° Dacă curba (Γ) este dată în reprezentare vectorială naturală:

$$(\Gamma): \overline{r} = \overline{r}(s), \quad s \text{ parametru natural,}$$

iar M ∈ (Γ) este vector de poziție $\overline{r}(s)$, atunci:

$$K = \frac{1}{R} = \left\| \overline{r}'(s) \times \overline{r}''(s) \right\|.$$

2° Dacă curba (Γ) este dată în reprezentare vectorială oarecare:

$$(\Gamma): \overline{r} = \overline{r}(t), \ t \in (t_1, t_2),$$

iar M ∈ (Γ) este vector de poziție $\overline{r}(t)$, atunci:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left\| \dot{\overline{r}}(t) \times \ddot{\overline{r}}(t) \right\|}{\left\| \dot{\overline{r}}(t) \right\|^3}.$$

3° Dacă curba (Γ) este dată în reprezentare parametrică oarecare:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t),\ \ t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

iar M $\in$ (Γ) este de coordonate x(t), y(t), z(t), atunci:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix}^2}}{\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demonstrație. 1° Din formula (2.5) a lui Frenet rezultă:

$$\overline{\upsilon} = \frac{1}{K}\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{1}{K}\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}$$

şi dacă se înlocuieşte în egalitatea:

$$\overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\upsilon},$$

se obține:

$$\overline{\beta} = \frac{1}{K}\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}.$$

Prin considerarea modulului acestei relații, se obține:

$$K = \frac{1}{R} = \left\| \overline{r}'(s) \times \overline{r}''(s) \right\|.$$

2° Fie:

$$(\Gamma): \overline{r} = \overline{r}(t),\ \ t \in (t_1, t_2),$$

atunci dacă se ține seama că s = s(t) este funcție continuă şi derivabilă, se obține:

$$\frac{d\overline{r}}{ds} = \frac{d\overline{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}, \qquad \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\overline{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{ds^2}.$$

De unde:

$$\frac{d\overline{r}}{ds} \times \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\right) + \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2 t}{ds^2}\left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d\overline{r}}{dt}\right),$$

adică:

$$\overline{r}'(s) \times \overline{r}''(s) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \left(\dot{\overline{r}}(t) \times \ddot{\overline{r}}(t)\right).$$

Prin înlocuire în relația curburii demonstrată la 1° se obține:

$$K = \frac{1}{R} = \left| \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \right| \left\| \dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) \right\|.$$

Însă:

$$\left| \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \right| = \frac{1}{\left| \dfrac{ds}{dt} \right|^3} = \frac{1}{\left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\|^3},$$

deci:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left\| \dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) \right\|}{\left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\|^3}.$$

3° Deoarece:

$$\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}, \quad \dot{\bar{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\bar{i} + \dot{y}(t)\,\bar{j} + \dot{z}(t)\,\bar{k},$$

rezultă că:

$$\left\| \dot{\bar{r}}(t) \right\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)},$$

$$\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix},$$

de unde:

$$\left\| \dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) \right\| = \sqrt{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix}^2}.$$

Prin înlocuire în formula curburii demonstrată la 2° se obține:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix}^2}}{\left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

❐

Observația 2.29. Dacă curba în spațiu (Γ) este dată în reprezentare vectorială naturală:

$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(s)$,   s parametru natural,

atunci curbura sa poate fi exprimată și prin relația:

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}\,.$$

Într-adevăr, deoarece:

$$\left\|\frac{d\bar{r}}{ds}\right\| = \|\bar{\tau}\| = 1,$$

rezultă că:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} \perp \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\,.$$

Atunci are loc:

$$\|\bar{r}'(s) \times \bar{r}''(s)\| = \|\bar{r}'(s)\| \cdot \|\bar{r}''(s)\| \sin\frac{\pi}{2},$$

adică:

$$K = \frac{1}{R} = \|\bar{r}''(s)\| = \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}\,.$$ ❐

Observația 2.30. Din teorema 2.17, ca şi din definiția 2.24 rezultă: curbura K într-un punct $M \in (\Gamma)$ este un număr real nenegativ.

Teorema 2.18. Fie (Γ) o curbă în spațiu regulată de ordinul k, $k \geq 3$, $M \in (\Gamma)$ un punct curent, ds elementul de arc pe curba (Γ), iar K^* torsiunea curbei (Γ) în punctul M.

1° Dacă curba (Γ) este dată în reprezentare vectorială naturală:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(s), \quad \text{s parametru natural,}$$

iar $M \in (\Gamma)$ este de vector de poziție $\bar{r}\,(s)$, atunci:

$$K^* = \frac{1}{T} = \frac{\left(\bar{r}'(s), \bar{r}(s)'', \bar{r}'''(s)\right)}{\|\bar{r}'(s) \times \bar{r}''(s)\|^2}\,.$$

2° Dacă curba (Γ) este dată în reprezentare vectorială oarecare:

$$(\Gamma): \bar{r} = \bar{r}(t),\ \ t \in (t_1, t_2),$$

iar $M \in (\Gamma)$ este de vector de poziție $\bar{r}\,(t)$, atunci:

$$K^* = \frac{1}{T} = \frac{\left(\dot{\bar{r}}(t), \ddot{\bar{r}}(t), \dddot{\bar{r}}(t)\right)}{\|\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)\|^2}\,.$$

3° Dacă curba (Γ) este dată în reprezentare parametrică oarecare:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t),\ t \in (t_1, t_2), \end{cases}$$

iar M ∈ (Γ) este de coordonate x(t), y(t), z(t), atunci:

$$K^* = \frac{1}{T} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \\ \dddot{x}(t) & \dddot{y}(t) & \dddot{z}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix}^2}.$$

Demonstrație. 1° Se consideră formula (2.6) a lui Frenet:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = -\frac{1}{T}\overline{\upsilon},$$

de unde, prin înmulțire scalară cu $\overline{\upsilon}$, se deduce:

$$\frac{1}{T} = -\overline{\upsilon}\frac{d\overline{\beta}}{ds}.$$

Dar:

$$\overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{\upsilon},$$

iar din formula (2.5) a lui Frenet se obține:

$$\overline{\upsilon} = \frac{1}{K}\frac{d\overline{\tau}}{ds},$$

deci:

$$\overline{\beta} = \frac{1}{K}\overline{\tau} \times \frac{d\overline{\tau}}{ds},$$

de unde, prin derivare în raport cu s, se obține:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\right)\overline{\tau} \times \frac{d\overline{\tau}}{ds} + \frac{1}{K}\frac{d\overline{\tau}}{ds} \times \frac{d\overline{\tau}}{ds} + \frac{1}{K}\overline{\tau} \times \frac{d^2\overline{\tau}}{ds^2},$$

adică:

$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = K\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\right)\overline{\tau} \times \overline{\upsilon} + \frac{1}{K}\overline{\tau} \times \frac{d^2\overline{\tau}}{ds^2}.$$

Însă:

$$(\overline{\upsilon}, \overline{\tau}, \overline{\upsilon}) = 0$$

şi atunci, dacă se ține seama de ultima egalitate, formula torsiunii devine:

$$K^* = \frac{1}{T} = -\frac{1}{K}\left(\overline{\upsilon}, \overline{\tau}, \frac{d^2\overline{\tau}}{ds^2}\right),$$

sau:

$$K^* = \frac{1}{T} = \frac{1}{K}\left(\overline{\tau}, \overline{\upsilon}, \frac{d^2\overline{\tau}}{ds^2}\right),$$

de unde, prin înlocuirea lui $\overline{\upsilon}$ din formula (2.5) a lui Frenet, se obține:

$$K^* = \frac{1}{T} = \frac{1}{K^2}\left(\overline{\tau}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}, \frac{d^2\overline{\tau}}{ds^2}\right),$$

adică:

$$K^* = \frac{1}{T} = \left(\overline{r}'(s), \overline{r}''(s), \overline{r}'''(s)\right) \cdot \left\| \overline{r}'(s) \times \overline{r}''(s) \right\|^{-2}.$$

2° Deoarece funcția s = s(t) este continuă şi derivabilă, au loc relațiile:

$$\frac{d\overline{r}}{ds} = \frac{d\overline{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}, \qquad \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\overline{r}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\frac{d^3\overline{r}}{ds^3} = \frac{d^3\overline{r}}{dt^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\overline{r}}{ds^2} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d\overline{r}}{dt} \cdot \frac{d^3t}{ds^3},$$

$$\overline{r}'(s) \times \overline{r}''(s) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \cdot \left(\dot{\overline{r}}(t) \times \ddot{\overline{r}}(t)\right),$$

$$\left(\overline{r}'(s), \overline{r}''(s), \overline{r}'''(s)\right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 \cdot \left(\dot{\overline{r}}(t), \ddot{\overline{r}}(t), \dddot{\overline{r}}(t)\right).$$

Deci, prin înlocuire în relația torsiunii demonstrată la 1°, se obține:

$$K^* = \frac{1}{T} = \frac{\left(\dot{\overline{r}}(t), \ddot{\overline{r}}(t), \dddot{\overline{r}}(t)\right)}{\left\| \dot{\overline{r}}(t) \times \ddot{\overline{r}}(t) \right\|^2}.$$

3° Deoarece:

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k},$$
$$\dot{\overline{r}}(t) = \dot{x}(t)\overline{i} + \dot{y}(t)\overline{j} + \dot{z}(t)\overline{k},$$
$$\ddot{\overline{r}}(t) = \ddot{x}(t)\overline{i} + \ddot{y}(t)\overline{j} + \ddot{z}(t)\overline{k},$$
$$\dddot{\overline{r}}(t) = \dddot{x}(t)\overline{i} + \dddot{y}(t)\overline{j} + \dddot{z}(t)\overline{k},$$

rezultă că:

$$\left(\dot{\bar{r}}(t), \ddot{\bar{r}}(t), \dddot{\bar{r}}(t)\right) = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \\ \dddot{x}(t) & \dddot{y}(t) & \dddot{z}(t) \end{vmatrix},$$

$$\left\| \dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t) \right\|^2 = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix}^2.$$

Prin înlocuire în formula torsiunii demonstrată la 2°, se obține:

$$K^* = \frac{1}{T} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \\ \dddot{x}(t) & \dddot{y}(t) & \dddot{z}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix}^2}.$$

❒

Observația 2.31. Din teoria 2.18, rezultă că torsiunea K^* într-un punct $M \in (\Gamma)$ de vector de poziție $\bar{r}(t)$ este un număr real care poate fi negativ, zero sau pozitiv. Semnul torsiunii este acelaşi cu semnul produsului mixt: $\left(\dot{\bar{r}}(t), \ddot{\bar{r}}(t), \dddot{\bar{r}}(t)\right)$.

❒

Exemplul 2.8. Se consideră curba în spațiu:

$$(\Gamma): \begin{cases} x^2 + y^2 - r^2 = 0, \\ y^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

şi pe ea punctul $P\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$. Să se determine tangenta, planul normal şi planul osculator al curbei în punctul P, curbura şi torsiunea curbei în acest punct.

Soluție: Tangenta are ecuațiile:

$$(T): \frac{x - \frac{r\sqrt{2}}{2}}{\left.\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_P} = \frac{y - \frac{r\sqrt{2}}{2}}{\left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_P} = \frac{z - \frac{r\sqrt{2}}{2}}{\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_P},$$

unde:

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_P = \begin{vmatrix} 2\cdot\frac{r\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 2\cdot\frac{r\sqrt{2}}{2} & 2\cdot\frac{r\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 2\,r^2,$$

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_P = \begin{vmatrix} 0 & 2\cdot\frac{r\sqrt{2}}{2} \\ 2\cdot\frac{r\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = -2\,r^2,$$

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_P = \begin{vmatrix} 2\cdot\frac{r\sqrt{2}}{2} & 2\cdot\frac{r\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 2\cdot\frac{r\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 2\,r^2.$$

Ecuațiile dreptei tangente în P devin:

$$(T):\ \frac{x-\frac{r\sqrt{2}}{2}}{2\,r^2} = \frac{y-\frac{r\sqrt{2}}{2}}{-2\,r^2} = \frac{z-\frac{r\sqrt{2}}{2}}{2\,r^2},$$

sau:

$$(T):\ x-\frac{r\sqrt{2}}{2} = -y+\frac{r\sqrt{2}}{2} = z-\frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Ecuația planului normal este:

$$(\pi_N):\ \left(x-\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left.\frac{D(F,G)}{D(y,z)}\right|_P + \left(y-\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left.\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\right|_P + \left(z-\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left.\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_P = 0,$$

sau:

$$(\pi_N):\ x-y+z-\frac{r\sqrt{2}}{2} = 0.$$

O reprezentare parametrică a curbei (Γ) este:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \\ z = r\cos t. \end{cases}$$

Punctul P corespunde valorii parametrului $t = \frac{\pi}{4}$. Se calculează în P:

$$\dot{x}(t)\big|_P = -r\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \ddot{x}(t)\big|_P = -r\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \dddot{x}(t)\big|_P = r\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\dot{y}(t)\big|_P = r\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \ddot{y}(t)\big|_P = -r\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \dddot{y}(t)\big|_P = -r\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\dot{z}(t)\big|_P = -r\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \ddot{z}(t)\big|_P = -r\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \dddot{z}(t)\big|_P = r\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Versorul binormalei, $\overline{\beta}$, devine:

$$\overline{\beta} = \frac{\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)}{\left\|\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)\right\|}\Bigg|_P = \frac{\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -r\frac{\sqrt{2}}{2} & r\frac{\sqrt{2}}{2} & -r\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -r\frac{\sqrt{2}}{2} & -r\frac{\sqrt{2}}{2} & -r\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}}{\left\|\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)\right\|\Big|_P} = \frac{\frac{r^2}{2}\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\left\|\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)\right\|\Big|_P} =$$

$$= \frac{\frac{r^2}{2}\,(-2\,\overline{i}+2\,\overline{k})}{\left\|\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)\right\|\Big|_P} = \frac{-r^2\,\overline{i}+r^2\,\overline{k}}{\sqrt{2\,r^4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\overline{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\overline{k}.$$

Planul osculator în punctul P are ecuația:

$$(\pi_0):\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)=0,$$

sau:

$$(\pi_0):\ x - z = 0.$$

Curbura este:

$$\frac{1}{R}\Big|_P = \frac{\left\|\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)\right\|}{\left\|\dot{\overline{r}}(t)\right\|^3}\Bigg|_P = \frac{r^2\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{3}\,\sqrt{2}\,r^2}{4}} = \frac{4}{3\sqrt{3}\,r}.$$

Torsiunea este:

$$\frac{1}{T}\Big|_P = \frac{\left(\dot{\overline{r}}(t),\ \ddot{\overline{r}}(t),\ \dddot{\overline{r}}(t)\right)}{\left\|\dot{\overline{r}}(t)\times\ddot{\overline{r}}(t)\right\|^2}\Bigg|_P = \frac{0}{2\,r^4} = 0.$$

Rezultă că în punctul P curba în spațiu (Γ) se comportă ca o curbă plană. ❐

Capitolul 3

ELEMENTE DE GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ A SUPRAFEȚELOR

§3.1. Reprezentarea analitică a unei suprafețe

Definiția 3.1. Se numeşte ***porțiune simplă de suprafață***, o mulțime (Σ) de puncte M din spațiu ale căror coordonate x, y, z în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ al lui $\mathbb{R}^3$ şi ai căror vectori de poziție $\bar{r}$ satisfac una din următoarele ecuații:

$$(\Sigma): \ F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

$$(\Sigma): \ z = f(x, y), (x, y) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{3.2}$$

$$(\Sigma): \ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \end{cases} \tag{3.3}$$

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \tag{3.4}$$

unde F, f, x, y, z, $\bar{r}$ satisfac condițiile:

(*i*) sunt funcții continue,

(*ii*) funcțiile x, y, z şi $\bar{r}$ stabilesc o corespondență biunivocă şi bicontinuă între punctele M ∈ (Γ) şi perechile ordonate de numere reale (u, v), $\left((u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)\right)$,

(*iii*) admit derivate parțiale de ordinul întâi, continue.

Relațiile (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) se numesc respectiv: ***reprezentarea analitică implicită*** sau ***ecuația implicită*** a porțiunii simple de suprafață; ***reprezentarea analitică explicită*** sau ***ecuația explicită*** a porțiunii simple de suprafață; ***reprezentarea analitică parametrică*** sau ***ecuațiile parametrice*** ale porțiunii simple de suprafață; ***reprezentarea vectorială*** sau ***ecuația vectorială*** a porțiunii simple de suprafață.

Exemplul 3.1.

1° $(E): \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \ (a, b, c > 0), \ (x, y, z) \in [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c] \subset \mathbb{R}^3,$

constituie ***ecuația implicită*** a elipsoidului.

2° $(P_E): \ z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}, \ (a, b > 0), \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

constituie ***ecuația explicită*** a paraboloidului eliptic.

3° $(P_H): \begin{cases} x = au \text{ ch } v, \\ y = bu \text{ sh } v, \\ z = u^2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$

constituie ***ecuațiile parametrice*** ale paraboloidului hiperbolic.

4° $(H_1): \ \bar{r} = a \text{ ch } u \cdot \cos v \, \bar{i} + b \text{ ch } u \cdot \sin v \, \bar{j} + c \text{ sh } u \, \bar{k}, u \in \mathbb{R}, \ v \in [0, 2\pi],$

constituie ***ecuația vectorială*** a hiperboloidului cu o pânză.

Observația 3.1. O porțiune simplă de suprafață admite o infinitate de reprezentări parametrice.

Într-adevăr, dacă $u = u(u^*, v^*)$ şi $v = v(u^*, v^*)$, u^*, v^* sunt parametri reali, atunci reprezentarea parametrică (3.3) devine:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = x\big(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*)\big), \\ y = y\big(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*)\big), \\ z = z\big(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*)\big), \end{cases}$$

adică:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = x^*(u^*, v^*), \\ y = y^*(u^*, v^*), \\ z = z^*(u^*, v^*). \end{cases}$$

❒

Definiția 3.2. Se numeşte ***porțiune regulată de suprafață***, o mulțime (Σ) de puncte M din spațiu ale căror coordonate x, y, z în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ al lui $\mathbb{R}^3$ şi ai căror vectori de poziție $\bar{r}$ satisfac una din relațiile (3.1), (3.2), (3.3) sau (3.4), unde funcțiile F, f, x, y, z, $\bar{r}$ satisfac următoarele condiții numite ***de regularitate***:

(*i*) sunt funcții reale, uniforme şi continue,

(*ii*) admit derivate (F, f - derivate parțiale, x, y, z - derivate ordinare) de ordinul întâi, continue, nu toate nule,

(*iii*) funcțiile x, y, z, $\bar{r}$ stabilesc o corespondență biunivocă şi bicontinuă între punctele $M \in (\Sigma)$ şi perechile ordonate de parametri reali (u, v), $\big((u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)\big)$,

(*iv*) cel puțin unul dintre determinanții funcționali (jacobienii):

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)},$$

este nenul.

Definiția 3.3. Se spune că o porțiune regulată de suprafață (Σ) este o ***porțiune de suprafață regulată de ordinul n***, dacă funcțiile F, f, x, y, z, $\bar{r}$ din relațiile (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) admit derivate parțiale continue până la şi inclusiv ordinul n > 1, astfel încât nu toate derivatele de acelaşi ordin să se anuleze.

Definiția 3.4. Fie (Σ) o porțiune simplă de suprafață. Un punct M ∈ (Σ) se numeşte ***punct ordinar***, dacă în punctul M sunt satisfăcute toate condițiile de regularitate. În caz contrar se numeşte ***punct singular***.

Observația 3.2. Punctele singulare sunt de două categorii: proprii şi improprii.

Un ***punct singular*** M ∈ (Σ) este ***propriu***, dacă M este singular în orice reprezentare analitică a lui (Σ).

Un ***punct singular*** M ∈ (Σ) este ***impropriu***, dacă există cel puțin o reprezentare analitică a lui (Σ), în care M să nu fie singular.

Definiția 3.5. Fie $(\Sigma_i)_{i\in I}$ o familie de porțiuni de suprafață regulate. Se numeşte ***suprafață regulată***, reuniunea tuturor porțiunilor de suprafață regulate din familia $(\Sigma_i)_{i\in I}$, adică:

$$(\Sigma) = \bigcup_{i\in I}(\Sigma_i),$$

unde frontierele porțiunilor (Σ_i) pot fi eventual curbe singulare.

§3.2. Curbe trasate pe o suprafață. Curbe coordonate

Definiția 3.6. Fie suprafața regulată (Σ), dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2)\times(v_1, v_2). \end{cases}$$

Mulțimea punctelor M ∈ (Σ) ale căror coordonate x, y, z verifică ecuațiile:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x = x\big(u(t), v(t)\big), \\ y = y\big(u(t), v(t)\big), \\ z = z\big(u(t), v(t)\big), \quad t \in (t_1, t_2), \end{cases} \tag{3.5}$$

formează o curbă (Γ) (fig. 3.1), numită ***curbă trasată pe suprafața (Σ).***

Ecuațiile (3.5) se numesc ***ecuațiile parametrice*** ale curbei (Γ) trasate pe suprafața (Σ).

Observația 3.3. Dacă (Σ) este o suprafață dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2)\times(v_1, v_2),$$

şi curba (Γ) trasată pe suprafaţa (Σ), ((Γ) ⊂ (Σ)), atunci reprezentarea vectorială a curbei (Γ) este:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t)), \quad t \in (t_1, t_2).$$

Definiția 3.7. Fie (Σ) o suprafață regulată, dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma): \ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2). \end{cases}$$

Se numeşte ***curbă coordonată de tipul (u),*** o curbă $(\Gamma_u) \subset (\Sigma)$, dată prin următoarea reprezentare parametrică:

$$(\Gamma_u): \ \begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0), \\ z = z(u, v_0), \end{cases}$$

unde $u \in (u_1, u_2)$, iar v_0 constant (fig. 3.2).

Se numeşte ***curbă coordonată de tipul (v),*** o curbă $(\Gamma_v) \subset (\Sigma)$, dată prin următoarea reprezentare parametrică:

$$(\Gamma_v): \ \begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v), \\ z = z(u_0, v), \end{cases}$$

unde $v \in (v_1, v_2)$ iar u_0 este constant (fig. 3.2).

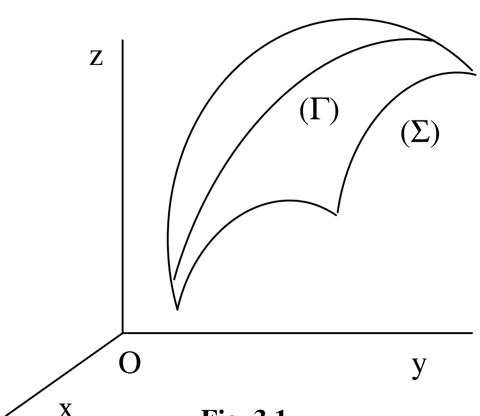


Fig. 3.1.

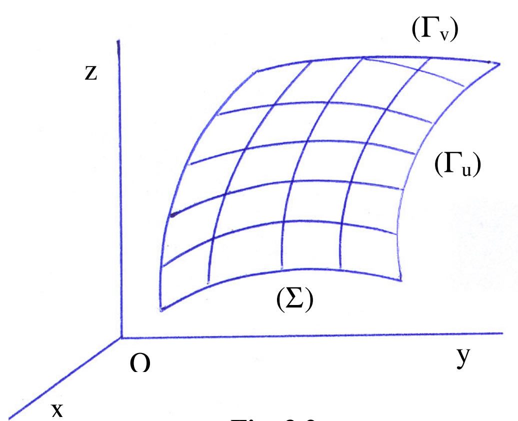


Fig. 3.2.

Observația 3.4. Dacă suprafața regulată (Σ) este dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

atunci curbele coordonate (Γ_u) şi (Γ_v) au respectiv reprezentările vectoriale:

$$(\Gamma_u): \ \bar{r} = \bar{r}(u, v_0), \quad u \in (u_1, u_2), \ v_0 \text{ constant},$$

$$(\Gamma_v): \ \bar{r} = \bar{r}(u_0, v), \quad v \in (v_1, v_2), \ u_0 \text{ constant}.$$

Teorema 3.1. Printr-un punct M_0 al unei suprafețe regulate (Σ) trece o singură curbă din familia (Γ_u) şi o singură curbă din familia (Γ_v).

Demonstrație. Fie suprafața (Σ) dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma): \ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \end{cases}$$

şi fie x_0, y_0, z_0 coordonatele carteziene ale punctului M_0.

Deoarece $M_0 \in (\Sigma)$, coordonatele lui M_0 verifică ecuațiile parametrice ale suprafeței, adică există $u = u_0$ şi $v = v_0$, astfel încât să aibă loc:

$$\begin{cases} x_0 = x(u_0, v_0), \\ y_0 = y(u_0, v_0), \\ z_0 = z(u_0, v_0). \end{cases}$$

Se consideră curbele de coordonate (Γ_u) şi (Γ_v) date prin reprezentările parametrice:

$$(\Gamma_u): \ \begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0), \\ z = z(u, v_0), \quad u \in (u_1, u_2), \end{cases} \qquad (\Gamma_v): \ \begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v), \\ z = z(u_0, v), \quad v \in (v_1, v_2). \end{cases}$$

Deoarece $M_0 \in (\Gamma_u)$ şi $M_0 \in (\Gamma_v)$ rezultă că $M_0 \in (\Gamma_u) \cap (\Gamma_v)$.

Dacă se presupune că prin punctul M_0 trec şi curbele coordonate (Γ'_u), (Γ'_v) date prin reprezentările parametrice:

$$(\Gamma'_u): \ \begin{cases} x = x(u, v'_0), \\ y = y(u, v'_0), \\ z = z(u, v'_0), \end{cases} \qquad (\Gamma'_v): \ \begin{cases} x = x(u'_0, v), \\ y = y(u'_0, v), \\ z = z(u'_0, v), \end{cases}$$

adică $M_0 \in (\Gamma'_u) \cap (\Gamma'_v)$, atunci au loc relațiile:

$$\begin{cases} x_0 = x(u'_0, v'_0), \\ y_0 = y(u'_0, v'_0), \\ z_0 = z(u'_0, v'_0). \end{cases}$$

Deoarece suprafața (Σ) este prin ipoteză regulată, rezultă conform condiției *iii)* de regularitate din definiția 3.2, că funcțiile $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ stabilesc o corespondență biunivocă între punctele $M \in (\Sigma)$ şi perechile ordonate (u, v), adică punctului M_0 îi corespunde o singură pereche ordonată (u_0, v_0) şi reciproc. Deci:

$$u'_0 = u_0, \quad v'_0 = v_0,$$

adică:

$$(\Gamma'_u) \equiv (\Gamma_u), \quad (\Gamma'_v) \equiv (\Gamma_v).$$

În concluzie, prin M_0 trece o singură curbă coordonată (Γ_u) şi o singură curbă coordonată (Γ_v).

❒

Fie (Σ) o suprafață regulată dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2). \end{cases}$$

Conform condiției *iii)* de regularitate din definiția 3.2, funcțiile x(u, v), y(u, v), z(u, v) stabilesc o corespondență biunivocă şi bicontinuă între punctele $M \in (\Sigma)$ şi perechile ordonate de numere reale (u, v). Deci perechile (u, v) constituie un sistem de coordonate pe suprafața (Σ), numite ***coordonate curbilinii pe suprafața (Σ)***.

Teorema 3.2. Dacă (Σ) este o suprafață regulată iar (u, v) este un sistem de coordonate curbilinii pe suprafața (Σ), atunci orice curbă (Γ) trasată pe suprafața (Σ), $((\Gamma) \subset (\Sigma))$ se poate reprezenta analitic prin una din următoarele ecuații:

$$1^\circ \ (\Gamma): \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases}$$

$$2^\circ \ (\Gamma): \ g(u, v) = 0,$$

$$3^\circ \ (\Gamma): \ v = h(u).$$

Demonstrație. 1° Fie $(\Gamma) \subset (\Sigma)$ şi $M \in (\Sigma)$, atunci conform definiției 3.6, coordonatele u, v sunt funcții de un parametru t:

$$u = u(t), \qquad v = v(t).$$

Aceste ecuații sunt ecuațiile parametrice în coordonate curbilinii ale curbei $(\Gamma) \subset (\Sigma)$:

$$(\Gamma): \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t). \end{cases}$$

2° Prin eliminarea parametrului t între aceste ecuații, se obține:

$$(\Gamma): \ g(u, v) = 0.$$

Aceasta este ecuația implicită, în coordonate curbilinii, a curbei (Γ).

3° Dacă ecuația:

$$g(u, v) = 0$$

satisface condițiile teoremei de existență a funcțiilor implicite, atunci ea se poate explicita în raport cu variabila v, de exemplu, şi se obține:

$$(\Gamma):\ v = h(u),$$

care este ecuația explicită, în coordonate curbilinii, a curbei (Γ). ❐

Observația 3.5. Conform teoremei 3.2, curbele coordonate (Γ_u), (Γ_v) trasate pe suprafața (Σ) pot fi exprimate analitic în modul următor:

$$(\Gamma_u):\ v = v_0,$$

$$(\Gamma_v):\ u = u_0,$$

unde u_0, v_0 sunt constante arbitrare.

Teorema 3.3. Fie suprafața regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$$

şi fie M ∈ (Σ), un punct de vector de poziție $\bar{r}(u_0, v_0)$. Dacă:

$$(\Gamma_u):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v_0),\quad u \in (u_1, u_2),$$

$$(\Gamma_v):\ \bar{r} = \bar{r}(u_0, v),\quad v \in (v_1, v_2),$$

sunt curbele coordonate ce trec prin M, atunci vectorii $\bar{r}'_u = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ şi $\bar{r}'_v = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ sunt tangenți respectiv la curbele (Γ_u) şi (Γ_v) în punctul M (fig. 3.3).

Demonstrație. Deoarece M ∈ (Γ_u) rezultă că el va avea vectorul de poziție $\bar{r} = \bar{r}(u, v_0)$. Conform §2.3, cap. II, derivata $\bar{r}'_u(u, v_0)$ este tangentă la curba (Γ_u) în punctul M.

În acelaşi mod se arată că vectorul $\bar{r}'_v(u_0, v)$ este tangent la curba (Γ_v) în punctul M.

Rezultă că derivatele parțiale:

$$\bar{r}'_u(u, v_0),\qquad \bar{r}'_v(u_0, v),$$

calculate respectiv pentru $u = u_0$ şi $v = v_0$, adică:

$$\bar{r}'_u(u_0, v_0) = \bar{r}'_{u_0},$$

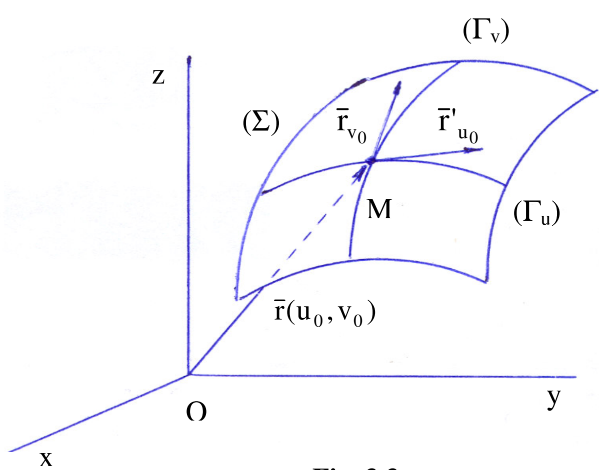


Fig. 3.3.

$$\bar{r}'_v(u_0, v_0) = \bar{r}'_{v0},$$

reprezintă vectori tangenți în punctul M respectiv la curbele coordonate (Γ_u) şi (Γ_v).

❒

Definiția 3.8. Se consideră o suprafață regulată (Σ) şi $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(\Gamma_\beta)_{\beta\in J}$ două familii de curbe trasate pe suprafața (Σ). Se spune că familiile de curbe $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(\Gamma_\beta)_{\beta\in J}$ formează o ***rețea de curbe pe suprafața (Σ),*** dacă aceste familii satisfac următoarele condiții:

(*i*) prin orice punct $M \in (\Sigma)$ trece câte o singură curbă din fiecare familie,

(*ii*) tangentele în M la cele două curbe, respectiv din familiile $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(\Gamma_\beta)_{\beta\in J}$, ce trec prin punctul M sunt distincte.

Teorema 3.4. Fie (Σ) o suprafață regulată, dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2). \end{cases}$$

Atunci cele două familii de curbe coordonate $(\Gamma_u)_{v_0\in(v_1,v_2)}$, $(\Gamma_v)_{u_0\in(u_1,u_2)}$ formează o rețea de curbe trasate pe suprafața (Σ).

Demonstrație. Se arată că familiile de curbe $(\Gamma_u)_{v_0\in(v_1,v_2)}$, $(\Gamma_v)_{u_0\in(u_1,u_2)}$ verifică condițiile (*i*) şi (*ii*) din definiția 3.8.

i) Din teorema 3.1 se obține că prin orice punct $M \in (\Sigma)$ trece câte o singură curbă coordonată din familiile $(\Gamma_u)_{v_0\in(v_1,v_2)}$, $(\Gamma_v)_{u_0\in(u_1,u_2)}$, deci condiția (*i*) este verificată.

ii) Fie $M \in (\Sigma)$ de vector de poziție:

$$\bar{r} = x(u_0, v_0)\,\bar{i} + y(u_0, v_0)\,\bar{j} + z(u_0, u_0)\,\bar{k}.$$

Cele două curbe coordonate (Γ_u) şi (Γ_v) ce trece prin M admit respectiv următoarele reprezentări vectoriale:

$$(\Gamma_u): \ \bar{r} = x(u, v_0)\,\bar{i} + y(u, v_0)\,\bar{j} + z(u, u_0)\,\bar{k},$$

$$(\Gamma_v): \ \bar{r} = x(u_0, v)\,\bar{i} + y(u_0, v)\,\bar{j} + z(u_0, u)\,\bar{k}.$$

Conform teoremei 3.3, vectorii:

$$\bar{r}'_{u_0} = x'_{u_0}\,\bar{i} + y'_{u_0}\,\bar{j} + z'_{u_0}\,\bar{k},$$

$$\bar{r}'_{v_0} = x'_{v_0}\,\bar{i} + y'_{v_0}\,\bar{j} + z'_{v_0}\,\bar{k},$$

unde:

$$x'_{u_0} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \ \ldots, \ z'_{v_0} = \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0),$$

sunt tangenți în punctul M respectiv la curbele (Γ_u), (Γ_v).

Se consideră produsul vectorial $\bar{r}'_{u_0} \times \bar{r}'_{v_0}$. Are loc:

$$\bar{r}'_{u_0} \times \bar{r}'_{v_0} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x'_{u_0} & y'_{u_0} & z'_{u_0} \\ x'_{v_0} & y'_{v_0} & z'_{v_0} \end{vmatrix}.$$

Deoarece suprafața (Σ) este regulată, rezultă din condiția *iv)* a definiției 3.2 că cel puțin unul din jacobienii calculați în M:

$$\left.\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|_M = \begin{vmatrix} y'_{u0} & z'_{u0} \\ y'_{v0} & z'_{v0} \end{vmatrix}, \quad \left.\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|_M = \begin{vmatrix} z'_{u0} & x'_{u0} \\ z'_{v0} & x'_{v0} \end{vmatrix}, \quad \left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_M = \begin{vmatrix} x'_{u0} & y'_{u0} \\ x'_{v0} & y'_{v0} \end{vmatrix},$$

este nenul. Deci produsul vectorial:

$$\bar{r}'_{u_0} \times \bar{r}'_{v_0} \neq \bar{0},$$

adică vectorii $\bar{r}'_{u_0}$ şi $\bar{r}'_{v_0}$ sunt necoliniari. Aşadar, tangentele în M la curbele coordonate (Γ_u), (Γ_v) sunt distincte. ❒

Exemplul 3.2. Se dă suprafața în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = u + \cos v, \\ y = u - \sin v, \\ z = -u, \end{cases}$$

şi punctul $M_0\left(u = 1, v = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Să se scrie tangentele la curbele u = 1 şi $v = \dfrac{\pi}{2}$ în punctul M_0 şi ecuațiile planelor normale în acest punct.

b) Să se arate că tangentele în punctul M_0 la curbele u = 1 şi u = sin v coincid.

c) Să se scrie ecuația implicită a suprafeței şi să se recunoască natura ei.

Soluție: a) Coordonatele punctului M_0 sunt:

$$\begin{cases} x_0 = 1 + \cos\dfrac{\pi}{2}, \\ y_0 = 1 - \sin\dfrac{\pi}{2}, \\ z_0 = -1, \end{cases}$$

deci $M_0(1, 0, -1)$ iar curba u = 1 are ecuațiile parametrice:

$$(\Gamma_1): \begin{cases} x = 1 + \cos v, \\ y = 1 - \sin v, \\ z = -1. \end{cases}$$

Tangenta în M_0 la această curbă are ecuațiile:

$$(T): \begin{cases} y = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases}$$

iar planul normal:

$$(\pi_N): \ x - 1 = 0.$$

Curba $v = \dfrac{\pi}{2}$ are ecuațiile parametrice:

$$(\Gamma_2): \begin{cases} x = u, \\ y = u - 1, \\ z = -u, \end{cases}$$

adică este o dreaptă.

b) Curba (Γ) : $u = \sin v$ are ecuațiile parametrice:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = \sin v + \cos v, \\ y = 0, \\ z = -\sin v. \end{cases}$$

Vectorul director al tangentei în M_0 la curba (Γ) este $\overline{v}(-1, 0, 0)$.

Tangenta în M_0 la curba (Γ_1) are vectorul tot director $\overline{v}(-1, 0, 0)$, deci cele două tangente coincid.

c) Pentru a obține ecuația implicită a suprafeței se elimină parametrii u şi v între ecuațiile suprafeței:

$$\begin{cases} u = -z, \\ \cos v = x + z, \\ -\sin v = y + z. \end{cases}$$

Se foloseşte identitatea fundamentală a trigonometriei şi se obține:

$$(\Sigma): \ (x + z)^2 + (y + z)^2 = 1,$$

deci suprafața este un cilindru. ❐

§3.3. Planul tangent la o suprafață

Teorema 3.5. Fie (Σ) o suprafață regulată dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Fie $M \in (\Sigma)$ un punct de vector de poziție $\bar{r}(u, v)$ şi (Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ), ce trece prin punctul M, dată prin ecuațiile:

$$(\Gamma): \begin{cases} u = u(s), \\ v = v(s), \end{cases}$$

unde parametrul s este lungimea arcului pe curba (Γ). Fie $\bar{\tau}$ versorul tangentei la curba (Γ) în punctul M.

Dacă derivatele $\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$ în punctul M sunt date, atunci versorul $\bar{\tau}$ este unic determinat şi reciproc.

Demonstrație. Necesitatea. Fie $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$. Ecuația vectorială a curbei $(\Gamma) \subset (\Sigma)$ este:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}(u(s), v(s)).$$

Rezultă că:

$$\bar{\tau} = \bar{r}'_u \frac{du}{ds} + \bar{r}'_v \frac{dv}{ds}.$$

Conform teoremei 3.3, vectorii $\bar{r}'_u$ şi $\bar{r}'_v$ sunt unic determinați de curbele (Γ_u) şi (Γ_v) ce trec prin punctul M. Prin urmare, pentru $\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$ dați, rezultă că $\bar{\tau}$ este unic determinat.

Suficiența. Fie versorul $\bar{\tau}$ dat. Dacă se ține seama de faptul că descompunerea lui $\bar{\tau}$ după vectorii $\bar{r}'_u$ şi $\bar{r}'_v$ este unică, rezultă că derivatele $\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$ sunt unic determinate.

❒

Observația 3.6. Fie (Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ). Atunci direcția tangentei la (Γ) într-un punct $M \in (\Gamma)$ este determinată de raportul $\frac{du}{dv}$.

Într-adevăr, în punctul $M \in (\Sigma)$ are loc:

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}'_u \frac{du}{ds} + \bar{r}'_v \frac{dv}{ds},$$

sau:

$$d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv,$$

adică:

$$d\bar{r} = \left(\bar{r}'_u \frac{du}{dv} + \bar{r}'_v\right) dv.$$

Se obține că vectorul $d\bar{r}$ este coliniar cu vectorul $\left(\bar{r}'_u \frac{du}{dv} + \bar{r}'_v\right)$. Cum $\bar{r}'_u$ și $\bar{r}'_v$ depind doar de punctul M(u, v) situat pe (Σ), rezultă că direcția vectorului $\bar{r}'_u \frac{du}{dv} + \bar{r}'_v$, deci și a vectorului $d\bar{r}$, este determinată de raportul $\frac{du}{dv}$. ❒

Teorema 3.6. Fie (Σ) o suprafață regulată dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

și fie M ∈ (Σ) un punct de vector de poziție $\bar{r}\,(u, v)$.

Dacă $\{(\Gamma)\}$ este mulțimea tuturor curbelor (Γ) trasate pe suprafața (Σ), ce trec prin punctul M, atunci mulțimea tuturor tangentelor în punctul M, la curbele (Γ) este inclusă într-un plan (π_T).

Demonstrație. Fie (Γ) o curbă arbitrară trasată pe suprafața (Σ), ce trece prin punctul M, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}\,(u(t), v(t)),\ t \in (t_1, t_2).$$

Vectorul tangent în M la curba (Γ) este:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{r}'_u \cdot \dot{u} + \bar{r}'_v \cdot \dot{v},$$

unde:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt},$$

relație ce arată că acest vector este o combinație liniară de vectorii: $\bar{r}'_u$ și $\bar{r}'_v$, adică vectorii: $\dot{\bar{r}}$, $\bar{r}'_u$ și $\bar{r}'_v$ sunt coplanari. Conform teoremei 3.3, vectorii $\bar{r}'_u$ și $\bar{r}'_v$ sunt tangenți respectiv la curbele coordonate (Γ_u), (Γ_v), ce trec prin punctul M, deci sunt necoliniari. Deoarece prin punctul M trece o singură pereche de curbe coordonate (Γ_u), (Γ_v), se obține că vectorii $\bar{r}'_u$, $\bar{r}'_v$ determină un plan unic: (π_T) și cum curba (Γ) a fost considerată în mod arbitrar, rezultă că toți vectorii $\dot{\bar{r}}$ vor fi direcții în planul (π_T), adică toate tangentele în punctul M la curbele (Γ) sunt situate în planul (π_T).

❒

Definiția 3.9. Se numeşte ***plan tangent*** în punctul M la suprafața regulată (Σ), locul geometric al tangentelor în M ale tuturor curbelor (Γ) trasate pe suprafața (Σ), ce trec prin M.

Observația 3.7. Conform celor anterioare, rezultă că planul tangent (π_T) este determinat de M şi de vectorii $\bar{r}'_u$ şi $\bar{r}'_v$ (fig. 3.4).

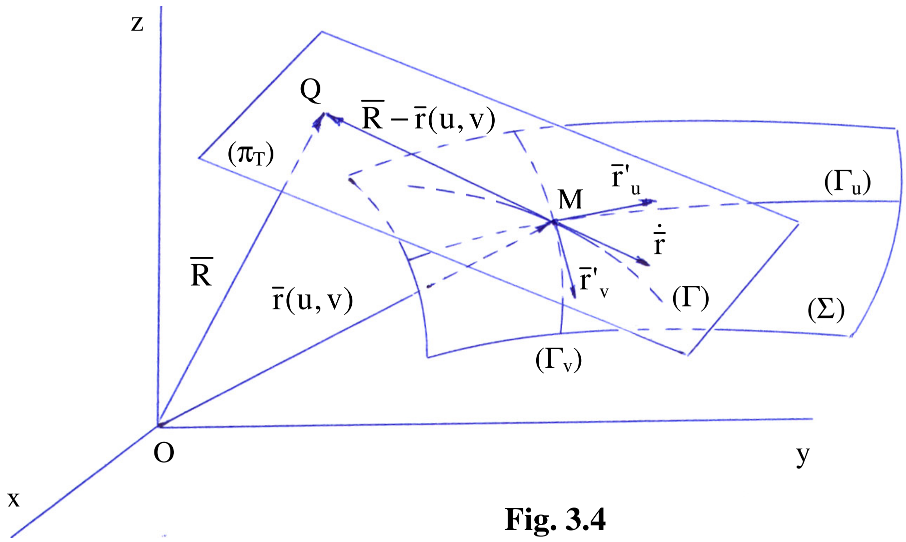


Fig. 3.4

Teorema 3.7. Fie (Σ) o suprafață regulată şi fie M ∈ (Σ), un punct curent, iar (π_T) planul tangent în punctul M la suprafața (Σ). Se consideră Q ∈ (π_T) un punct curent.

1° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r}=\bar{r}\,(u,v),\ (u,v)\in(u_1,u_2)\times(v_1,v_2),$$

fie M ∈ (Σ), M de vector de poziție $\bar{r}(u,v)$, iar Q ∈ (π_T), Q de vector de poziție $\overline{R}$, atunci ecuația vectorială a planului tangent (π_T) este:

$$(\pi_T):\ \left(\overline{R}-\bar{r}(u,v)\right)\cdot\left(\bar{r}'_u\times\bar{r}'_v\right)=0.$$

2° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\ (u,v)\in(u_1,u_2)\times(v_1,v_2),\end{cases}$$

fie M ∈ (Σ), de coordonate x(u, v), y(u, v), z(u, v), iar Q ∈ (π_T) de coordonate X, Y, Z, atunci ecuația planului tangent (π_T) determinat de punctul M şi de direcțiile necoliniare $\bar{r}'_u$, $\bar{r}'_v$, sub formă de determinant de ordinul al 3-lea este:

$$(\pi_T):\ \begin{vmatrix} X-x(u,v) & Y-y(u,v) & Z-z(u,v)\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}=0.$$

3° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică explicită:

$$(\Sigma):\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2,$$

fie $M \in (\Sigma)$, de coordonate x, y, iar $Q \in (\pi_T)$ de coordonate X, Y, Z, atunci ecuația planului tangent (π_T) este:

$$(\pi_T):\ p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z(x, y)) = 0,$$

unde:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

4° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică implicită:

$$(\Sigma):\ F(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

fie $M \in (\Sigma)$, de coordonate x, y, z, iar $Q \in (\pi_T)$ de coordonate X, Y, Z, atunci ecuația planului tangent (π_T) este:

$$(\pi_T):\ F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0,$$

unde:

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F'_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ F'_z = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Demonstrație. 1° Se consideră:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Din observația 3.7 rezultă că planul tangent (π_T) este determinat de M şi de vectorii $\bar{r}'_u$, $\bar{r}'_v$ şi cum vectorul $\overline{MQ}$ este situat în planul (π_T), se obține că vectorii: $\overline{MQ}$, $\bar{r}'_u$ şi $\bar{r}'_v$ sunt coplanari, adică:

$$\overline{MQ} \cdot (\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v) = 0.$$

Dar:

$$\overline{MQ} = \overline{R} - \bar{r}(u, v),$$

deci:

$$(\pi_T):\ \left(\overline{R} - \bar{r}(u, v)\right) \cdot \left(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\right) = 0.$$

2° Se consideră:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \end{cases}$$

Prin transcrierea analitică în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ a ecuației vectoriale a planului tangent (π_T), date la 1°, se obține:

$$(\pi_T): \begin{vmatrix} X - x(u,v) & Y - y(u,v) & Z - z(u,v) \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$(\pi_T): \ A(X - x(u, v)) + B(Y - y(u, v)) + C(Z - z(u, v)) = 0,$$

unde:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

3° Se consideră:

$$(\Sigma): \ z = f(x, y), (x, y) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2.$$

De la o reprezentare explicită a suprafeței (Σ) se poate trece la o reprezentare parametrică a lui (Σ), dacă se notează:

$$u = x, \qquad v = y.$$

Se obține:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \quad (u, v) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Rezultă că:

$$x'_u = 1, x'_v = 0, y'_u = 0, y'_v = 1, z'_u = p, z'_v = q,$$

unde:

$$p = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

deci, pe baza rezultatului demonstrat la punctul 2°, are loc:

$$(\pi_T): \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = 0,$$

adică:

$$(\pi_T): \ p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0.$$

4° Se consideră:

$$(\Sigma): \ F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Au loc relațiile:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

unde:

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F'_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ F'_z = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Prin înlocuirea valorilor lui p şi q în ecuația planului tangent (π_T) demonstrată la punctul 3°, se obține:

$$(\pi_T):\ \frac{F'_x}{F'_z}(X - x) + \frac{F'_y}{F'_z}(Y - y) + (Z - z) = 0,$$

adică:

$$(\pi_T):\ F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0.$$

❒

Observația 3.8. Notațiile: $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ şi $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ aparțin matematicianului G. Monge.

Definiția 3.10. Se spune că două ***suprafețe*** (Σ), (Σ_1) sunt ***tangente*** într-un punct comun al lor M, dacă ele admit acelaşi plan tangent în punctul M.

§3.4. Normala la o suprafață. Orientarea unei suprafețe

Fie o suprafață regulată (Σ) dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

iar $M \in (\Sigma)$ un punct de vector de poziție $\bar{r}(u, v)$. Se consideră $\bar{r}'_u, \bar{r}'_v$ vectorii tangenți la curbele coordonate (Γ_u), (Γ_v) ce trec prin punctul M.

Definiția 3.11. ***Vectorul normal***, $\overline{N}$, în punctul M ***la suprafața*** (Σ) este definit de relația:

$$\overline{N} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v,$$

astfel încât vectorii, $\overline{N}$, $\bar{r}'_u, \bar{r}'_v$ să formeze un triedru drept.

Observația 3.9. Rezultă din definiția 3.11 că vectorul $\overline{N}$ este perpendicular pe planul tangent (π_T) în punctul M la suprafața (Σ).

Teorema 3.8. Se consideră suprafața regulată (Σ) dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$$

şi fie M ∈ (Σ) un punct de vector de poziție $\bar{r} = x(u,v)\,\bar{i} + y(u,v)\,\bar{j} + z(u,v)\,\bar{k}$. Dacă $\bar{n}$ este versorul vectorului normal $\bar{N}$ la suprafața (Σ) în M, atunci:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}} \left(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\right).$$

Demonstrație. Are loc relația:

$$\bar{n} = \frac{1}{\left\|\bar{N}\right\|} \cdot \bar{N},$$

unde:

$$\bar{N} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix},$$

şi

$$\left\|\bar{N}\right\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}. \qquad \square$$

Definiția 3.12. Se numeşte ***normală*** în punctul ordinar M la suprafața (Σ), dreapta (Δ_N) ce trece prin M şi este perpendiculară pe planul tangent în M la (Σ).

Observația 3.10. În fiecare punct ordinar al unei suprafețe (Σ), se poate ataşa un triplet de vectori liniar independenți: $\bar{r}'_u$, $\bar{r}'_v$ şi $\bar{n}$, care, în contrast cu reperul lui Frenet al curbelor în spațiu nu este ortonormat, deoarece, în general, $\bar{r}'_u$ şi $\bar{r}'_v$ nu sunt unitari şi nici ortogonali.

Normala (Δ_N) se orientează astfel încât sensul pozitiv al ei să coincidă cu sensul versorului $\bar{n}$ (fig. 3.5).

Observația 3.11. O suprafață (Σ) se orientează convențional în felul următor: se consideră pozitivă fața suprafeței dinspre partea pozitivă a normalei, cealaltă față se consideră negativă.

Teorema 3.9. Se consideră o suprafață regulată (Σ), M ∈ (Σ), un punct curent, fie (Δ_N) normala în punctul M la suprafața (Σ), iar Q ∈ (Δ_N) un punct curent (fig. 3.5).

1° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare vectorială:

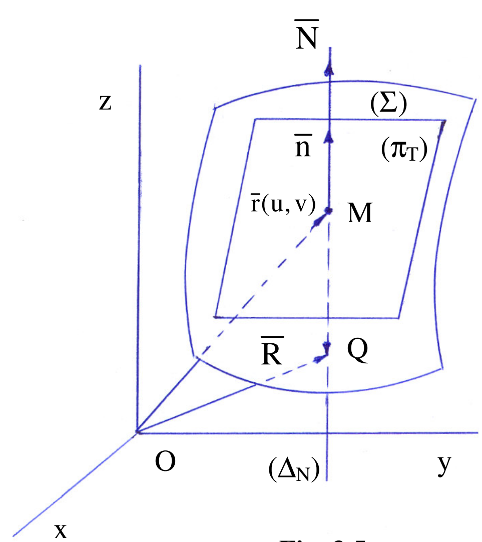


Fig. 3.5.

$$(\Sigma):\ \bar{r}=\bar{r}(u,v),\ (u,v)\in(u_1,u_2)\times(v_1,v_2),$$

fie M ∈ (Σ), de vector de poziție $\bar{r}(u,v)$, iar Q ∈ (Δ_N), de vector de poziție $\overline{R}$, atunci ecuația vectorială a dreptei normale (Δ_N) este:

$$(\Delta_N):\ \overline{R}-\bar{r}(u,v)=\lambda\,\overline{N},\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

2° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\ (u,v)\in(u_1,u_2)\times(v_1,v_2),\end{cases}$$

fie M ∈ (Σ), de coordonate x(u, v), y(u, v), z(u, v), iar Q ∈ (Δ_N) de coordonate X, Y, Z, atunci ecuațiile canonice ale dreptei normale (Δ_N) sunt:

$$(\Delta_N):\ \frac{X-x(u,v)}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix}}=\frac{Y-y(u,v)}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u\\ z'_v & x'_v\end{vmatrix}}=\frac{Z-z(u,v)}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}}\ .$$

3° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică explicită:

$$(\Sigma):\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D'\subseteq\mathbb{R}^2,$$

fie M ∈ (Σ), de coordonate x, y, iar Q ∈ (Δ_N) de coordonate X, Y, Z, atunci, ecuațiile canonice ale dreptei normale (Δ_N) sunt:

$$(\Delta_N):\ \frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z(u,v)}{-1},$$

unde p şi q sunt dați de notațiile lui Monge.

4° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică implicită:

$$(\Sigma):\ F(x,y,z)=0,\ (x,y,z)\in D\subseteq\mathbb{R}^3,$$

fie M ∈ (Σ), de coordonate x, y, z, iar Q ∈ (Δ_N) de coordonate X, Y, Z, atunci, ecuațiile canonice ale dreptei normale (Δ_N) sunt:

$$(\Delta_N):\ \frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ .$$

Demonstrație. 1° Fie:

$$(\Sigma):\ \bar{r}=\bar{r}(u,v),\ (u,v)\in(u_1,u_2)\times(v_1,v_2).$$

Prin definiție (Δ_N) are aceeaşi direcție cu a vectorului normal $\overline{N}$, adică vectorii $\overline{MQ}$ şi $\overline{N}$ sunt coliniari, adică:

$$\overline{MQ} = \lambda\, \overline{N}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

însă:

$$\overline{MQ} = \overline{R} - \overline{r}\,(u, v),$$

aşadar:

$$(\Delta_N):\ \overline{R} - \overline{r}(u,v) = \lambda\, \overline{N}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2° Fie:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \end{cases}$$

şi se consideră (π_T), planul tangent în M la suprafața (Σ).

Deoarece:

$$(\Delta_N) \perp (\pi_T),$$

iar ecuația planului tangent (π_T) este:

$$(\pi_T):\ \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} (X - x(u,v)) + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} (Y - y(u,v)) + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} (Z - z(u,v)) = 0,$$

rezultă că ecuațiile dreptei normale (Δ_N) sunt:

$$(\Delta_N):\ \frac{X - x(u,v)}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(u,v)}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(u,v)}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}.$$

3° Fie:

$$(\Sigma):\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Atunci ecuația planului tangent (π_T) este:

$$(\pi_T):\ p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z(u, v)) = 0,$$

unde p şi q sunt date de notațiile lui Monge.

Dar:

$$(\Delta_N) \perp (\pi_T),$$

prin urmare:

$$(\Delta_N):\ \frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z(x,y)}{-1},$$

unde:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

4° Fie:

$$(\Sigma): \ F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3.$$

În acest caz, ecuația planului tangent (π_T) este:

$$(\pi_T): \ F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0.$$

Deoarece:

$$(\Delta_N) \perp (\pi_T),$$

se obține:

$$(\Delta_N): \ \frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z}. \qquad ❐$$

Definiția 3.14. Se consideră (Σ_1), (Σ_2) două suprafețe regulate şi M, un punct comun acestora. Fie $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ vectorii normali în M la respectiv suprafețele (Σ_1), (Σ_2). Se spune că ***suprafețele*** (Σ_1), (Σ_2) sunt ***ortogonale*** în M dacă:

$$\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2.$$

Exemplul 3.3. Se consideră suprafața dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma): \ \begin{cases} x = ue^{v}, \\ y = ue^{-v}, \\ z = 4\,uv \end{cases}$$

şi se cere:

a) Ecuația planului tangent la suprafață în punctul M(u = 2, v = 0).
b) Ecuațiile normalei în M.
c) Versorul normalei în M.

Soluție: a) Ecuația planului tangent în M la (Σ) este:

$$(\pi_T): \begin{vmatrix} x - x_M & y - y_M & z - z_M \\ x'_u|_M & y'_u|_M & z'_u|_M \\ x'_v|_M & y'_v|_M & z'_v|_M \end{vmatrix} = 0,$$

unde:

$$x'_u|_M = e^v|_M = 1, \qquad x'_v|_M = u\,e^v|_M = 2,$$

$$y'_u|_M = e^{-v}\Big|_M = 1, \quad \text{şi} \quad y'_v|_M = -u\,e^{-v}\Big|_M = -2,$$

$$z'_u|_M = 4\,v\Big|_M = 0 \qquad z'_v|_M = 4\,u\Big|_M = 8.$$

Deci:

$$(\pi_T): \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$(\pi_T): \ 2\,x - 2\,y - z = 0.$$

2° Ecuațiile normalei sunt:

$$(N): \ \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

3° Versorul normalei este:

$$\bar{n} = \frac{2\,\bar{i} - 2\,\bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}\left(2\,\bar{i} - 2\,\bar{j} - \bar{k}\right).$$ ❐

§3.5. Prima formă fundamentală a unei suprafețe

Teorema 3.10. Se consideră o suprafață regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$$

şi fie (Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ), dată de:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}\,\big(u(t), v(t)\big), \ t \in (t_1, t_2).$$

Dacă ds este elementul de arc pe curba (Γ), atunci:

$$\|d\bar{r}\|^2 = ds^2.$$

Demonstrație. Dacă se ține cont că pe curba (Γ) are loc relația:

$$\dot{\bar{r}} = \dot{x}\,\big(u(t)\big)\,\bar{i} + \dot{y}\,\big(u(t)\big)\,\bar{j} + \dot{z}\,\big(u(t)\big)\,\bar{k},$$

atunci se obține:

$$\left\|\dot{\bar{r}}\right\| = \sqrt{\dot{x}^2\,\big(u(t)\big) + \dot{y}^2\,\big(u(t)\big) + \dot{z}^2\,\big(u(t)\big)},$$

de unde:

$$\| d\bar{r} \| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \, .$$

Dar:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \, ,$$

prin urmare:

$$\| d\bar{r} \| = ds \, ,$$

deci:

$$\| d\bar{r} \|^2 = ds^2 .$$ ❐

Definiția 3.14. Se consideră o suprafață regulată (Σ), (Γ) o curbă arbitrară trasată pe suprafața (Σ) şi fie ds elementul de arc pe curba (Γ).

Se numeşte ***prima formă fundamentală*** a suprafeței (Σ) expresia ds^2.

Observația 3.12. Prima formă fundamentală a unei suprafețe se notează cu Φ_1 şi se mai numeşte ***metrica suprafeței (Σ)***, sau ***pătratul elementului liniar al suprafeței***, sau ***forma lui Gauss***, deoarece este introdusă în geometrie de matematicianul K.F. Gauss.

Deci:

$$\Phi_1 = ds^2.$$

Teorema 3.11. Se consideră o suprafață regulată (Σ) şi (Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ).

1° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2) \, ,$$

atunci prima formă fundamentală are expresia:

$$\Phi_1 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

unde, pe baza notațiilor lui Gauss:

$$E = \| \bar{r}'_u \|^2, \qquad F = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v \, , \qquad G = \| \bar{r}'_v \|^2 ,$$

unde E, F, G sunt funcții luate în punctul $\big(u(t), v(t)\big)$.

2° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică parametrică:

$$(\Sigma): \ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \end{cases}$$

atunci prima formă fundamentală are expresia:

$$\Phi_1 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

unde E, F, G sunt funcții luate în punctul $\big(u(t),\, v(t)\big)$:

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u, \qquad F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v, \quad G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v.$$

Demonstrație. 1° Fie:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$$

şi se consideră (Γ) o curbă oarecare trasată pe suprafața (Σ), dată de:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}\,\big(u(t), v(t)\big),\ t \in (t_1, t_2).$$

Are loc relația:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{r}'_u \frac{du}{dt} + \bar{r}'_v \frac{dv}{dt},$$

sau:

$$d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv.$$

Din teorema 3.10 rezultă că elementul de arc pe (Γ) este:

$$ds^2 = \| d\bar{r} \|^2,$$

însă:

$$\| d\bar{r} \|^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r}.$$

Aşadar, au loc succesiv:

$$\Phi_1 = ds^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = \big(\bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv\big) \cdot \big(\bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv\big) = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u\, du^2 +$$
$$+ 2\,\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v\, du\, dv + \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v\, dv^2.$$

Prin urmare:

$$\Phi_1 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

unde s-au folosit notațiile:

$$E = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u = \| \bar{r}'_u \|^2, \quad F = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v, \quad G = \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v = \| \bar{r}'_v \|^2,$$

unde E, F, G sunt funcții luate în punctul $\big(u(t),\, v(t)\big)$.

2° Fie:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2). \end{cases}$$

În acest caz se poate scrie:

$$\bar{r}(u, v) = x\,(u, v)\,\bar{i} + y\,(u, v)\,\bar{j} + z\,(u, v)\,\bar{k},$$

de unde rezultă formulele:

$$\bar{r}'_u = x'_u\,\bar{i} + y'_u\,\bar{j} + z'_u\,\bar{k}, \quad \bar{r}'_v = x'_v\,\bar{i} + y'_v\,\bar{j} + z'_v\,\bar{k}, \quad \bar{r}'^2_u = \left\| \bar{r}'_u \right\|^2 = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u,$$

$$\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v, \quad \bar{r}'^2_v = \left\| \bar{r}'_v \right\|^2 = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v,$$

deci:

$$\Phi_1 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = \bar{r}'^2_u \cdot du^2 + \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v\ du\ dv + \bar{r}'^2_v \cdot dv^2 = \left(x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u\right) du^2 +$$
$$+ \left(x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v\right) du\ dv + \left(x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v\right) dv^2,$$

adică:

$$\Phi_1 = E\ du^2 + 2\ F\ du\ dv + G\ dv^2,$$

unde E, F, G sunt funcții luate în punctul $\left(u(t),\, v(t)\right)$:

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u, \quad F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v, \quad G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v.$$

❒

Observația 3.13. 1° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică explicită:

$$(\Sigma):\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2,$$

atunci prima formă fundamentală are expresia:

$$\Phi_1 = (1 + p^2)\,(dx)^2 + 2\,pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,(dy)^2,$$

unde p și q sunt dați de notațiile lui Monge.

Într-adevăr, dacă se utilizează parametrizarea:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f\,(u, v), \end{cases}$$

se obțin egalitățile:

$$x'_u = 1, \quad x'_v = 0, \quad y'_u = 0, \quad y'_v = 1, \quad z'_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad z'_v = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y} = q,$$

de unde:

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = 1 + p^2, \quad F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v = pq, \text{ iar}$$

$$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = 1 + q^2,$$

de unde rezultă pentru Φ_1 expresia anunțată.

2° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică implicită:

$$(\Sigma):\ F(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

atunci prima formă fundamentală are expresia:

$$\Phi_1 = \frac{\left(F'^2_x + F'^2_z\right)dx^2 + 2\,F'_x\,F'_y\,dx\,dy + \left(F'^2_y + F'^2_z\right)dy^2}{\left(F'_z\right)^2}.$$

Într-adevăr, dacă în 1° se folosesc egalitățile:

$$p = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad q = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

se obține pentru Φ_1 expresia anunțată. ❐

Teorema 3.12. Se consideră (Σ) o suprafață regulată, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$$

şi fie metrica sa:

$$\Phi_1 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Dacă $\overline{N}$ este vectorul normal în punctul $M \in (\Sigma)$ la suprafața (Σ), atunci:

$$\left\|\overline{N}\right\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Demonstrație. Prin definiție are loc:

$$\overline{N} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v,$$

deci:

$$\left\|\overline{N}\right\| = \left\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\right\| = \sqrt{\left\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\right\|^2} = \sqrt{\left[\left\|\bar{r}'_u\right\| \cdot \left\|\bar{r}'_v\right\| \sin\left(\widehat{\bar{r}'_u, \bar{r}'_v}\right)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left\|\bar{r}'_u\right\|^2 \cdot \left\|\bar{r}'_v\right\|^2 \left[1 - \cos^2\left(\widehat{\bar{r}'_u, \bar{r}'_v}\right)\right]} = \sqrt{\left\|\bar{r}'_u\right\|^2 \cdot \left\|\bar{r}'_v\right\|^2 - \left[\left\|\bar{r}'_u\right\| \cdot \left\|\bar{r}'_v\right\| \cdot \cos\left(\widehat{\bar{r}'_u, \bar{r}'_v}\right)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left\|\bar{r}'_u\right\|^2 \cdot \left\|\bar{r}'_v\right\|^2 - \left(\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v\right)^2},$$

prin urmare:

$$\left\|\overline{N}\right\| = \sqrt{EG - F^2}. \qquad ❐$$

Observația 3.14. Dacă suprafața regulată (Σ) este dată în reprezentare analitică parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \end{cases}$$

atunci, conform teoremei 3.8 are loc:

$$\left\| \overline{N} \right\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2},$$

aşadar:

$$EG - F^2 = \left\| \overline{N} \right\|^2 = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2 .$$

❒

§3.6. Aplicații ale primei forme fundamentale: elementul de arc; lungimea unui arc; măsurarea unghiurilor; aria unei porțiuni de suprafață

Teorema 3.13. Se consideră o suprafață regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Dacă (Γ) este o curbă trasată pe suprafața (Σ)dată de:

$$(\Gamma):\ \bar{r} = \bar{r}\left(u(t), v(t)\right),\ t \in (t_1, t_2),$$

atunci elementul de arc pe curba (Γ) este determinat de relația:

$$ds = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\ dt.$$

Demonstrație. Prin utilizarea formulelor de derivare a funcțiilor compuse, pentru pătratul elementului de arc pe curba (Γ) au loc succesiv egalitățile:

$$ds^2 = \Phi_1 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right] dt^2.$$

Deci:

$$ds = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\ dt.$$

❒

Observația 3.15. 1° În cazul în care $(\Gamma) \equiv (\Gamma_u)$, unde:

$$(\Gamma_u): \ \bar{r} = \bar{r}(u, v_0),$$

atunci elementul de arc pe curba (Γ_u) este dat de relația:

$$ds = \sqrt{E}\, du .$$

Într-adevăr, deoarece:

$$v = v_0 = \text{constant},$$

rezultă:

$$dv = 0,$$

prin urmare:

$$ds^2 = E\, du^2,$$

de unde:

$$ds = \sqrt{E}\, du .$$

2° În cazul în care $(\Gamma) \equiv (\Gamma_v)$, unde:

$$(\Gamma_v): \ \bar{r} = \bar{r}(u_0, v),$$

atunci elementul de arc pe curba (Γ_v) este dat de relația:

$$ds = \sqrt{G}\, dv .$$

Verificarea se face în mod analog cu cea de la cazul 1°. ❒

Teorema 3.14. Fie (Γ) o curbă trasată pe suprafața regulată (Σ), dată de:

$$(\Gamma): \ \bar{r} = \bar{r}\big(u(t), v(t)\big), \ t \in (t_1, t_2).$$

Dacă $M_1, M_2 \in (\Gamma)$, $M_1(t = t_1)$, $M_2(t = t_2)$, atunci lungimea arcului curbei (Γ) cuprins între punctele M_1 și M_2 este dată de relația:

$$L_{\widehat{M_1M_2}} = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \right|.$$

Demonstrație. Din formula:

$$L_{\widehat{M_1M_2}} = \left| \int_{\widehat{M_1M_2}} ds \right|,$$

se obține prin înlocuirea elementului de arc pe curba (Γ):

$$L_{\widehat{M_1M_2}} = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \right|.$$

❐

Definiția 3.15. Se consideră (Σ) o suprafață regulată şi (Γ_1), (Γ_2), două curbe trasate pe suprafața (Σ). Dacă M ∈ (Γ_1) ∩ (Γ_2) şi dacă $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ sunt respectiv versorii tangentelor în punctul M la cele două curbe, atunci prin ***unghiul curbelor* (Γ_1) *şi* (Γ_2)** se înțelege unghiul tangentelor la cele două curbe în M, adică unghiul α al versorilor $\bar{\tau}_1$ şi $\bar{\tau}_2$.

Teorema 3.15. Se consideră suprafața regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$$

şi fie (Γ_1), (Γ_2) două curbe trasate pe suprafața (Σ). Dacă se notează prin $(d\bar{r}, du, dv, ds)$, respectiv $(\delta\bar{r}, \delta u, \delta v, \delta s)$ diferențialele de-a lungul curbei (Γ_1) respectiv (Γ_2), atunci unghiul α dintre curbele (Γ_1), (Γ_2) în punctul M ∈ (Γ_1) ∩ (Γ_2) este dat de formula:

$$\cos\alpha = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}\ ,$$

unde E, F, G sunt coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței (Σ) calculați în punctul M.

Demonstrație. Conform definiției unghiului a două curbe trasate pe suprafață:

$$\alpha = \widehat{(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)}.$$

Dacă se ține seama de faptul că vectorii $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ sunt coliniari cu respectiv vectorii $d\bar{r}$, $\delta\bar{r}$, se obține:

$$\alpha = \widehat{(d\bar{r}, \delta\bar{r})},$$

unde $d\bar{r}$, $\delta\bar{r}$ sunt diferențialele vectorului de poziție $\bar{r}$ în punctul M, întâi considerat ca fiind un punct al curbei (Γ_1), apoi ca fiind al curbei (Γ_2).

Aşadar se obține succesiv:

$$\cos\alpha = \frac{d\bar{r}\cdot\delta\bar{r}}{\|d\bar{r}\|\cdot\|\delta\bar{r}\|} = \frac{(\bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv)\cdot(\bar{r}'_u\,\delta u + \bar{r}'_v\,\delta v)}{\sqrt{(\bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv)^2}\cdot\sqrt{(\bar{r}'_u\,\delta u + \bar{r}'_v\,\delta v)^2}},$$

sau:

$$\cos\alpha = \frac{\|\bar{r}'_u\|^2 \, du\,\delta u + \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \|\bar{r}'_v\|^2 \, dv\,\delta v}{\sqrt{\|\bar{r}'_u\|^2 \, du^2 + 2\,\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v\, du\,dv + \|\bar{r}'_v\|^2 \, dv^2}} \,\cdot$$

$$\cdot \; \frac{1}{\sqrt{\|\bar{r}'_u\|^2 \, \delta u^2 + 2\,\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v\, \delta u\,\delta v + \|\bar{r}'_v\|^2 \, \delta v^2}}$$

de unde:

$$\cos\alpha = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2 + 2\,F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}} \,.$$

❒

Observația 3.16. În cazul particular când $(\Gamma_1) \equiv (\Gamma_u)$ şi $(\Gamma_2) \equiv (\Gamma_v)$, adică (Γ_1), (Γ_2) sunt respectiv curbele coordonate ce trec prin punctul ordinar M, se obțin relațiile:

$$dv = 0, \;\; \delta u = 0.$$

Se obține atunci că unghiul α dintre două curbe coordonate ce trec prin punctul M este dat de:

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{E\,G}} \,.$$

❒

Definiția 3.16. Se consideră (Σ) o suprafață regulată, (Γ_1), (Γ_2), două curbe trasate pe suprafața (Σ) şi fie $M \in (\Gamma_1) \cap (\Gamma_2)$, iar $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ versorii tangentelor în punctul M respectiv la curbele (Γ_1), (Γ_2) şi fie $\alpha = \left(\widehat{\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2}\right)$.

Curbele (Γ_1), (Γ_2) se spune că sunt ***ortogonale*** în M, dacă $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Definiția 3.17. Fie (Σ) o suprafață regulată, pe care se consideră o rețea de curbe $[(\Gamma_\alpha)_\alpha, (\Gamma_\beta)_\beta]$.

Se spune că ***rețeaua*** $[(\Gamma_\alpha)_\alpha, (\Gamma_\beta)_\beta]$ este ***ortogonală*** pe (Σ) dacă oricare ar fi punctul $M \in (\Sigma)$ cele două curbe $(\Gamma_\alpha) \in (\Gamma_\alpha)_\alpha$, $(\Gamma_\beta) \in (\Gamma_\beta)_\beta$ ce trec prin punctul M sunt ortogonale.

Teorema 3.16. Se consideră (Σ) o suprafață regulată, (Γ_1), (Γ_2), două curbe trasate pe suprafața (Σ) şi fie $M \in (\Gamma_1) \cap (\Gamma_2)$.

Condiția necesară şi suficientă ca (Γ_1), (Γ_2) să fie ortogonale în M este ca:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v = 0.$$

Demonstrație. Necesitatea. Fie (Γ_1), (Γ_2) ortogonale, adică:

$$\alpha = \left(\widehat{(\Gamma_1), (\Gamma_2)}\right) = \frac{\pi}{2} \,.$$

Din teorema 3.15 se obține:

$$\cos\alpha = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2 + 2\,F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}} = 0,$$

de unde:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v = 0.$$

Suficiența. Se demonstrează pe cale inversă. ❒

Teorema 3.17. Se consideră o suprafață regulată (Σ) şi fie $[(\Gamma_u)_u, (\Gamma_v)_v]$ rețeaua curbelor coordonate trasate pe (Σ).

Condiția necesară şi suficientă ca rețeaua $[(\Gamma_u)_u, (\Gamma_v)_v]$ să fie ortogonală pe (Σ) este ca $F = 0$ în orice punct $M \in (\Sigma)$.

Demonstrație. Necesitatea. Fie $[(\Gamma_u)_u, (\Gamma_v)_v]$ o rețea ortogonală pe suprafața (Σ). În concordanță cu definiția 3.17, rezultă că pentru orice punct $M \in (\Sigma)$, curbele $(\Gamma_u) \in (\Gamma_u)_u$, $(\Gamma_v) \in (\Gamma_v)_v$ ce trec prin punctul M sunt ortogonale, adică:

$$\alpha = \left(\widehat{(\Gamma_1), (\Gamma_2)}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Din observația 3.16 se obține:

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{E\,G}} = 0,$$

aşadar:

$$F = 0.$$

Suficiența. Se demonstrează pe cale inversă. ❒

Definiția 3.18. Se consideră o porțiune de suprafață regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar r = \bar r\,(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Se împarte porțiunea de suprafață (Σ) în paralelograme curbilinii cu ajutorul familiilor de curbe coordonate $(\Gamma_u)_u$, $(\Gamma_v)_v$ (fig. 3.6). Fie $MM_1M_2M_3$ paralelogramul curbiliniu determinat de curbele coordonate (Γ_{u_i}), $(\Gamma_{u_i+\Delta u_i})$, (Γ_{v_j}), $(\Gamma_{v_j+\Delta v_j})$ date de:

$$(\Gamma_{u_i}):\ v = v_j, \qquad (\Gamma_{u_i+\Delta u_i}):\ v = v_j + \Delta v_j,$$

$$(\Gamma_{v_j}):\ u = u_i, \qquad (\Gamma_{v_j+\Delta v_j}):\ u = u_i + \Delta u_i.$$

Se asociază paralelogramului curbiliniu $MM_1M_2M_3$ paralelogramul $MM'_1M'_2M'_3$ constituit pe vectorii: $\bar{r}'_{u_i}\ \Delta u_i$ şi $\bar{r}'_{v_j}\ \Delta v_j$, unde vectorii $\bar{r}'_{u_i}$, $\bar{r}'_{v_j}$ sunt derivatele parțiale ale vectorului de poziție $\bar{r}$ al punctului $M(u_i, v_j)$:

$$\bar{r}'_{u_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_i, v_j), \qquad \bar{r}'_{v_j} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_i, v_j).$$

Se notează aria paralelogramului $MM'_1M'_2M'_3$ prin $\Delta\sigma_{ij}$.
Această arie este dată de relația:

$$\Delta\sigma_{ij} = \left\| \bar{r}'_{u_i} \times \bar{r}'_{v_j} \right\| \Delta u_i \cdot \Delta v_j.$$

Se numeşte ***arie a porțiunii regulate de suprafață* (Σ)** şi se notează cu ***σ***, limita de mai jos , dacă există şi este unică:

$$\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ \max|\Delta u_i|\to 0 \\ \max|\Delta v_j|\to 0}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \Delta\sigma_{ij}.$$

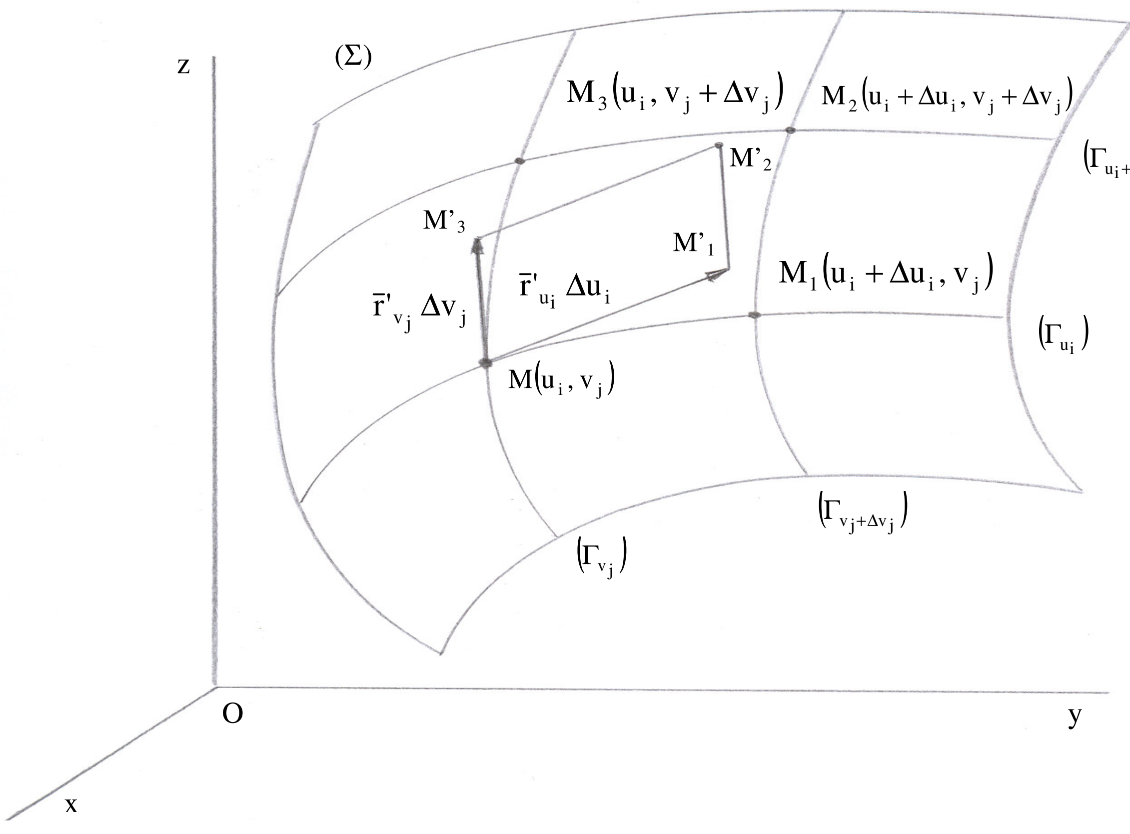


Fig. 3.6.

Teorema 3.18. Dacă se consideră o porțiune de suprafață regulată (Σ), atunci aria acestei porțiuni este dată de următoarea integrală de suprafață:

$$\sigma = \iint_{(\Sigma)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

unde E, F, G sunt coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței (Σ).

Demonstrație. Din definiția 3.18 rezultă:

$$\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ \max|\Delta u_i|\to 0 \\ \max|\Delta v_j|\to 0}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \left\| \bar{r}'_{u_i} \times \bar{r}'_{v_j} \right\| \Delta u_i \cdot \Delta v_j \,.$$

Limita din membrul al doilea este egală prin definiție cu integrala de suprafață extinsă asupra porțiunii de suprafață (Σ), deoarece prin ipoteză, porțiunea (Σ) este regulată, deci funcțiile $\bar{r}'_u$, $\bar{r}'_v$ sunt continue. Prin urmare:

$$\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ \max|\Delta u_i|\to 0 \\ \max|\Delta v_j|\to 0}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \left\| \bar{r}'_{u_i} \times \bar{r}'_{v_j} \right\| \Delta u_i \cdot \Delta v_j = \iint_{(\Sigma)} \left\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \right\| du\, dv\,.$$

Conform teoremei 3.12, are loc relația:

$$\left\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \right\| = \sqrt{EG - F^2}\,,$$

aşadar:

$$\sigma = \iint_{(\Sigma)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\,.$$

❐

Definiția 3.19. Se consideră (Σ) o porțiune de suprafață regulată şi fie aria sa:

$$\sigma = \iint_{(\Sigma)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\,.$$

Se numeşte ***element de arie*** expresia:

$$\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\,.$$

Observația 3.17. Elementul de arie se notează cu dσ. Deci:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\,.$$

Observații 3.18. 1° Dacă porțiunea de suprafață (Σ) este dată în reprezentare analitică parametrică:

$$(\Sigma) : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \end{cases}$$

atunci:

$$d\sigma = \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2} \ du\, dv\,.$$

Într-adevăr, conform teoremei 3.12, are loc:

$$\sqrt{EG - F^2} = \left\| \overline{N} \right\|,$$

însă:

$$\left\| \overline{N} \right\| = \left\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \right\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}\,,$$

deci:

$$d\sigma = \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2} \ du\, dv\,.$$

2° Dacă porțiunea de suprafață (Σ) este dată în reprezentare analitică explicită:

$$(\Sigma) : \ z = f(x, y), (x, y) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2,$$

atunci elementul de arie are expresia:

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \ dx\, dy\,,$$

unde p şi q sunt dați de notațiile lui Monge.

Într-adevăr, suprafața (Σ) poate fi exprimată parametric astfel:

$$(\Sigma) : \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \ (u, v) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

de unde se obține:

$$x'_u = 1, \quad x'_v = 0, \quad y'_u = 0, \quad y'_v = 1, \quad z'_u = \frac{\partial f}{\partial u} = p\,, \quad z'_v = \frac{\partial f}{\partial v} = q\,,$$

prin urmare dσ găsit la 1° devine:

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\ dx\,dy.$$

3° Dacă porțiunea de suprafață (Σ) este dată în reprezentare analitică implicită:

$$(\Sigma):\ F(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

atunci:

$$d\sigma = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ dx\,dy.$$

Într-adevăr:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\ q = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Prin introducerea acestor expresii ale lui p şi q în formula elementului de arie, dată la 2°, se obține:

$$d\sigma = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ dx\,dy.$$

❐

Propoziția 3.1. În orice punct ordinar al unei suprafețe, prima formă fundamentală este pozitiv definită, adică:

$$E > 0,\ G > 0,\ EG - F^2 > 0.$$

Demonstrație. Conform observației 3.14, are loc:

$$\left\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \right\|^2 = EG - F^2.$$

Dar:

$$\left\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \right\|^2 = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2$$

şi cum punctul este ordinar, are loc:

$$\left\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \right\| > 0.$$ ❐

Exemplul 3.4. Se dă suprafața de ecuații parametrice:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = u + v, \end{cases}$$

şi se cere:

a) Prima formă fundamentală a suprafeței.
b) Unghiul curbelor coordonate.
c) Lungimea arcului curbei u = 1 cuprins între curbele u = 1 şi v = 2.
d) Elementul de arie al suprafeței.

Soluție: a) Dacă se calculează coeficienții E, F, G ai primei forme fundamentale se obține $E = 2$, $F = 1$ şi $G = u^2 + 1$. Deci prima formă fundamentală a suprafeței (Σ) este:

$$ds^2 = 2\,du^2 + 2\,du\,dv + (u^2 + 1)dv^2.$$

b) Unghiul dintre curbele coordonate este dat de $\cos\theta = \dfrac{F}{\sqrt{EG}}$, astfel că pentru suprafața dată se obține:

$$\cos\theta = \left[2\,(u^2 + 1)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

c) Elementul de arc pe curba u = 1 cu du = 0 este $ds = \sqrt{2}\,dv$, iar lungimea arcului este:

$$L = \left| \int_1^2 \sqrt{2}\,dv \right| = \sqrt{2}.$$

d) Elementul de arie al suprafeței (Σ) este:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{2\,u^2 + 1}\,du\,dv.$$

❐

Exemplul 3.5. Să se calculeze pe paraboloidul:

$$(\Sigma): \; x^2 + y^2 = 2\,pz,$$

unghiul format de curbele:

$$(\Gamma_1): \; x = y,$$

$$(\Gamma_2): \; z = a.$$

Soluție: Dacă se consideră:

$$\begin{matrix} x = u \\ y = v \end{matrix} \quad \text{se obține} \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2\,p}$$

şi de aici rezultă:

$$\bar{r}'_u = \bar{i} + \frac{u}{p}\bar{k}, \qquad \bar{r}'_v = \bar{j} + \frac{v}{p}\bar{k}.$$

Coeficienții primei forme fundamentale sunt:

$$\begin{cases} E = 1 + \dfrac{u^2}{p^2}, \\ F = \dfrac{uv}{p^2}, \\ G = 1 + \dfrac{v^2}{p^2}, \end{cases}$$

deci:

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = \left(1 + \frac{u^2}{p^2}\right)du\,\delta u + \frac{uv}{p^2}(du\,\delta v + dv\,\delta u) +$$
$$+\left(1 + \frac{v^2}{p^2}\right)dv\,\delta v\,. \tag{3.6}$$

Pe curba (Γ_1) are loc: $u = v$ deci $du = dv$.

Pe curba (Γ_2) are loc: $2\,ap = u^2 + v^2$, de unde $2\,u\,\delta u + 2v\,\delta v = 0$, adică $\delta v = -\left(\dfrac{u}{v}\right)\delta u$.

Dacă se introduc în (3.6) se obține:

$$\left[1 + \frac{u^2}{p^2} + \frac{uv}{p^2}\left(-\frac{u}{v} + 1\right) + \left(1 + \frac{v^2}{p^2}\right)\left(-\frac{u}{v}\right)\right]du\,\delta u = \left(1 - \frac{u}{v}\right)du\,\delta u\,.$$

În punctul de intersecție al celor două curbe au loc:

$$\begin{cases} z = a, \\ x = y, \\ x^2 + y^2 = 2\,pz, \end{cases} \quad \text{adică:} \quad \begin{cases} 2\,ap = u^2 + v^2, \\ u = v, \end{cases} \quad \text{deci:} \quad \begin{cases} 2\,ap = 2\,u^2, \\ u = v, \end{cases}$$

rezultă:

$$\begin{cases} x = u = \pm\sqrt{pa}, \\ y = v = \pm\sqrt{pa}, \end{cases}$$

deci:

$$\cos\alpha = 0, \quad \text{aşadar:} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

❒

Exemplul 3.6. Să se scrie elementul de arie al paraboloidului:

$$(\Sigma):\ x^2 + y^2 - 2\,hz = 0, \quad z \geq 0, \quad h > 0.$$

Soluție: Deoarece suprafața este dată implicit prin F(x, y, z) = 0, atunci:

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\ dx\,dy,$$

unde:

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = \dfrac{2\,x}{2\,h} = \dfrac{x}{h}, \\[2mm] q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = \dfrac{2\,y}{2\,h} = \dfrac{y}{h}, \end{cases}$$

rezultă:

$$1 + \left(\frac{F'_x}{F'_z}\right)^2 + \left(\frac{F'_z}{F'_z}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1 + \frac{x^2 + y^2}{h^2},$$

deci:

$$d\sigma = \frac{1}{h}\sqrt{h^2 + x^2 + y^2}\ dx\,dy.$$

❐

§3.7. A doua formă fundamentală a unei suprafețe

Definiția 3.20. Se consideră suprafața regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$$

şi fie M ∈ (Σ) un punct curent al acesteia de vector de poziție $\bar{r}\,(u, v)$, iar $\bar{n}$ versorul normalei în M la (Σ).

Se numeşte ***a doua formă fundamentală*** a suprafeței (Σ) expresia:

$$\bar{n} \cdot d^2\,\bar{r}.$$

Observația 3.19. A doua formă fundamentală a unei suprafețe se notează cu Φ_2. Deci:

$$\Phi_2 = \bar{n} \cdot d^2\,\bar{r}.$$

Teorema 3.19. Se consideră suprafața regulată (Σ).

1° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

fie M ∈ (Σ), de vector de poziție $\bar{r}(u, v)$, atunci a doua formă fundamentală a suprafeței are expresia:

$$\Phi_2 = L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2,$$

unde:

$$L = \frac{(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{uu})}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}, \quad M = \frac{(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{uv})}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}, \quad N = \frac{(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{vv})}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|},$$

sunt funcții luate în punctul M.

2° Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică parametrică:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \end{cases}$$

fie $M \in (\Sigma)$, de coordonate $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, atunci a doua formă fundamentală a suprafeței are expresia:

$$\Phi_2 = L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2,$$

unde:

$$L = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \end{vmatrix},$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \end{vmatrix},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \end{vmatrix},$$

sunt funcții luate în punctul $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Demonstrație. 1° Au loc relațiile:

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}, \qquad d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv,$$

$$d^2\bar{r} = \bar{r}''_{uu}\, du^2 + 2\, \bar{r}''_{uv}\, du\, dv + \bar{r}''_{vv}\, dv^2 + \bar{r}'_u\, d^2u + \bar{r}'_v\, d^2v,$$

unde s-a notat:

$$\bar{r}''_{uu} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2}, \qquad \bar{r}''_{uv} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u\, \partial v}, \qquad \bar{r}''_{vv} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^2}.$$

Aşadar se poate scrie:

$$\Phi_2 = \bar{n} \cdot d^2\bar{r} = \bar{n} \cdot \bar{r}''_{uu}\, du^2 + 2\, \bar{n} \cdot \bar{r}''_{uv}\, du\, dv + \bar{n} \cdot \bar{r}''_{vv}\, dv^2 + \bar{n} \cdot \bar{r}'_u\, d^2u + \bar{n} \cdot \bar{r}'_v\, d^2v.$$

Dacă se ține seama de relațiile:

$$\bar{n} \perp \bar{r}'_u, \qquad \bar{n} \perp \bar{r}'_v,$$

rezultă:

$$\Phi_2 = \frac{(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{uu})}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}\, du^2 + 2\, \frac{(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{uv})}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}\, du\, dv + \frac{(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{vv})}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}\, dv^2,$$

sau:

$$\Phi_2 = L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2.$$

2° Au loc relațiile:

$$\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2},$$

$$(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{uu}) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \end{vmatrix}, \qquad (\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{uv}) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \end{vmatrix},$$

$$(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{vv}) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \end{vmatrix},$$

de unde se obține:

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \end{vmatrix}, \qquad M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \end{vmatrix},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \end{vmatrix}.$$

❒

Observația 3.20. Dacă suprafața (Σ) este dată în reprezentare analitică explicită:

$$(\Sigma):\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2,$$

fie $M \in (\Sigma)$, de coordonate (x, y), atunci a doua formă fundamentală a suprafeței (Σ) este:

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2\right),$$

unde p şi q sunt dați de notațiile lui Monge.

Într-adevăr, suprafața (Σ) poate fi exprimată parametric astfel:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v),\ (u, v) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

de unde:

$$x'_u = 1,\quad x'_v = 0,\quad y'_u = 0,\quad y'_v = 1,\quad z'_u = p,\quad z'_v = q,\quad z''_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

$$z''_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad z''_{vv} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$x''_{uu} = 0,\quad x''_{uv} = 0,\quad x''_{vv} = 0,\quad y'_{uu} = 0,\quad y''_{uv} = 0,\quad y''_{vv} = 0.$$

Atunci, rezultă:

$$L = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad M = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad N = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

de unde se obține rezultatul. ❒

Exemplul 3.7. Dacă se consideră drept suprafață regulată (Σ), sfera dată în reprezentarea analitică parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = R\cos u\sin v, \\ y = R\sin u\sin v, \\ z = R\cos v, \end{cases}$$

atunci cele două forme fundamentale sunt proporționale.

Soluție: Au loc relațiile:

$$x'_u = -R\sin u\sin v,\quad x'_v = R\cos u\cos v,\quad y'_u = R\cos u\sin v,$$
$$y'_v = R\sin u\cos v,\quad z'_u = 0,\quad z'_v = -R\sin v,\quad x''_{uu} = -R\cos u\sin v,$$
$$x''_{uv} = -R\sin u\cos v,\quad x''_{vv} = -R\cos u\sin v,\quad y''_{uu} = -R\sin u\sin v,$$
$$y''_{uv} = R\cos u\cos v,\quad y''_{vv} = -R\sin u\sin v,\quad z''_{uu} = 0,\quad z''_{uv} = 0,$$
$$z''_{vv} = -R\cos v,$$

atunci:

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = R\,(\sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 u\sin^2 v) = R^2\sin^2 v,$$

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = -R^2 \sin u \sin v \cos u \cos v +$$
$$+ R^2 \sin u \sin v \cos u \cos v = 0,$$

$$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = R^2(\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v) =$$
$$= R^2(\cos^2 v - \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v) = R^2$$

$$L = -R \sin^2 v, \quad M = 0, \qquad N = -R.$$

Rezultă că pe sferă au loc relațiile:

$$\Phi_1 = R^2(\sin^2 v\, du^2 + dv^2), \qquad \Phi_2 = -R(\sin^2 v\, du^2 + dv^2).$$

Dacă se face raportul între cele două forme fundamentale, se obține:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = -R .$$

Aşadar, pe sferă cele două forme fundamentale sunt proporționale. ❐

Observația 3.20. Este adevărată şi reciproca propoziției demonstrate în exemplul 3.6, şi anume: dacă pe o suprafață (Σ) cele două forme fundamentale sunt proporționale, atunci suprafața (Σ) este o sferă.

❐

§3.8. Curbura unei curbe trasate pe o suprafață

Teorema 3.20. Se consideră o suprafață regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

$M \in (\Sigma)$ un punct curent de vector de poziție $\bar{r}(u, v)$ şi fie (Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ) ce trece prin M.

Se consideră: $\bar{\tau}$ versorul tangentei la curba (Γ) în punctul M, $\bar{\upsilon}$ versorul normalei principale la curba (Γ) în punctul M, $\bar{n}$ versorul normalei în punctul M la suprafața (Σ) (fig. 3. 7).

Dacă θ este măsura unghiului format de versorii $\bar{\upsilon}$ şi $\bar{n}$, iar R raza de curbură a curbei (Γ) în punctul M, atunci are loc relația:

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

Demonstrație. Fie ds elementul de arc pe curba (Γ). Atunci, conform primei formule a lui Frenet în punctul M:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\bar{\upsilon},$$

de unde, prin înmulțire scalară cu $\overline{n}$, rezultă:

$$\overline{n}\cdot\frac{d\overline{\tau}}{ds}=\frac{1}{R}\overline{n}\cdot\overline{\upsilon},$$

adică:

$$\overline{n}\cdot\frac{d\overline{\tau}}{ds}=\frac{\cos\theta}{R}.$$

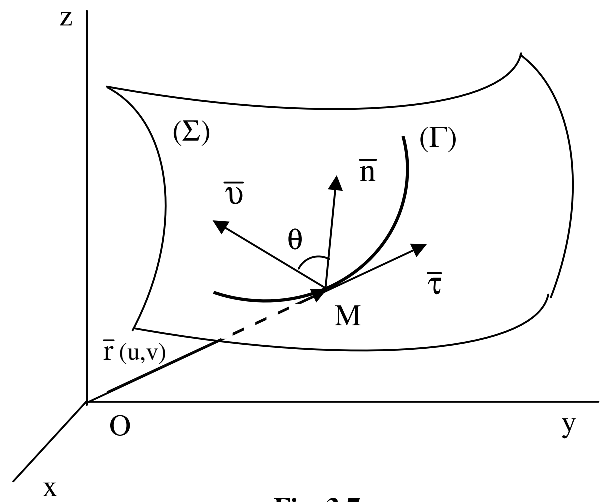


Fig. 3.7.

Dacă se ține seama de relațiile:

$$\overline{\tau}=\frac{d\overline{r}}{ds}, \qquad \frac{d\overline{\tau}}{ds}=\frac{d^2\overline{r}}{ds^2},$$

$$\Phi_1=ds^2, \qquad \Phi_2=\overline{n}\cdot d^2\overline{r},$$

se obține că:

$$\overline{n}\cdot\frac{d^2\overline{r}}{ds^2}=\frac{\cos\theta}{R},$$

deci:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1}=\frac{\cos\theta}{R}. \qquad \square$$

Teorema 3.21. Se consideră (Σ) o suprafață regulată, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \overline{r}=\overline{r}(u,v),\ (u,v)\in(u_1,u_2)\times(v_1,v_2),$$

$M\in(\Sigma)$ un punct curent de vector de poziție $\overline{r}(u,v)$ şi fie (Γ_1), (Γ_2) două curbe trasate pe suprafața (Σ), ce trec prin M. Fie $\overline{\upsilon}_1$, $\overline{\upsilon}_2$, versorii normalelor principale în M la curbele (Γ_1) şi respectiv (Γ_2) şi $\overline{n}$, versorul normalei în punctul M la suprafața (Σ), iar R_1, R_2 razele de curbură în punctul M ale curbelor (Γ_1), respectiv (Γ_2). Se consideră $\overline{\tau}_1$, $\overline{\tau}_2$ versorii tangentelor în punctul M la curbele (Γ_1) şi respectiv (Γ_2) şi θ_1, θ_2 măsurile unghiurilor versorilor $\overline{\upsilon}_1$ şi respectiv $\overline{\upsilon}_2$ cu $\overline{n}$ (fig. 3. 8).

Dacă $\overline{\tau}_1=\overline{\tau}_2$, atunci are loc relația:

$$\frac{\cos\theta_1}{R_1}=\frac{\cos\theta_2}{R_2}.$$

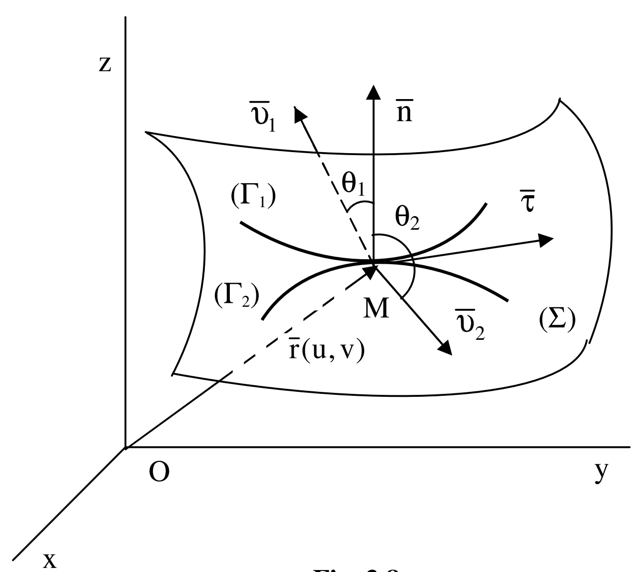


Fig. 3.8.

Demonstrație. Dacă se notează cu d şi δ operatorii de diferențiere pe curbele (Γ_1) şi (Γ_2), atunci în M , conform teoremei 3.20, au loc relațiile:

$$\frac{\cos\theta_1}{R_1} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{ds^2}, \qquad \frac{\cos\theta_2}{R_2} = \frac{L\,\delta u^2 + 2\,M\,\delta u\,\delta v + N\,\delta v^2}{\delta s^2},$$

de unde:

$$\frac{\cos\theta_1}{R_1} = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\,M\,\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

$$\frac{\cos\theta_2}{R_2} = L\left(\frac{\delta u}{\delta s}\right)^2 + 2\,M\,\frac{\delta u}{\delta s}\cdot\frac{\delta v}{\delta s} + N\left(\frac{\delta v}{\delta s}\right)^2.$$

Deoarece $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right)$, $\left(\frac{\delta u}{\delta s}, \frac{\delta v}{\delta s}\right)$ sunt, conform teoremei 3.5, unic determinate de versorii $\bar{\tau}_1$ şi respectiv $\bar{\tau}_2$ şi cum prin ipoteză are loc:

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2,$$

se obține:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\delta u}{\delta s}, \qquad \frac{dv}{ds} = \frac{\delta v}{\delta s},$$

prin urmare:

$$\frac{\cos\theta_1}{R_1} = \frac{\cos\theta_2}{R_2}.$$ ❒

§3.9. Secțiune normală. Teorema lui Meusnier. Curburi normale şi tangențiale

Definiția 3.21. Se consideră (Σ) o suprafață regulată, $M \in (\Sigma)$ un punct curent şi fie $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$ o familie de curbe trasate pe suprafața (Σ), tangente în punctul M. Fie $\bar{n}$ versorul normalei în punctul M la suprafața (Σ) şi (π_n) un plan ce trece prin punctul M, determinat de versorii $\bar{\tau}$ şi $\bar{n}$.

Se numeşte ***secțiune normală*** asociată familiei $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$, curba (Γ_n) de intersecție a suprafeței (Σ) cu planul (π_n) (fig. 3.9).

Observația 3.21. Din definiția 3.21 rezultă că secțiunea normală (Γ_n), asociată familiei $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$, aparține acestei familii:

$$(\Gamma_n) \in (\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I},$$

adică curba (Γ_n) admite acelaşi versor tangent, $\bar{\tau}$ comun tuturor curbelor (Γ_α) din familia $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$.

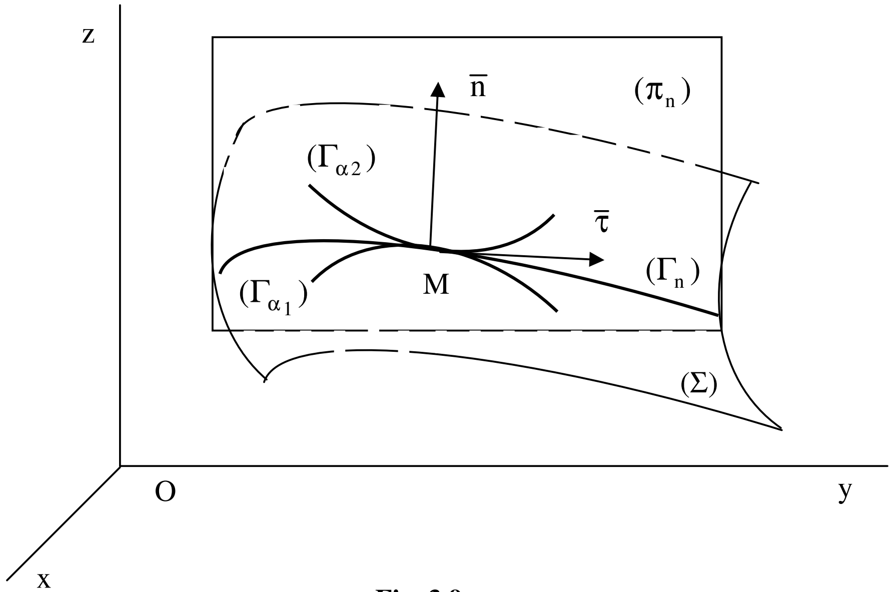


Fig. 3.9.

Teorema 3.22 (Teorema lui Meusnier). Fie R_α şi R_n razele de curbură în punctul $M \in (\Gamma_\alpha) \cap (\Gamma_n)$ ale curbelor (Γ_α) şi respectiv (Γ_n), unde (Γ_n) este secțiunea normală asociată familiei $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$, trasate pe suprafața regulată (Σ). Dacă $\overline{\upsilon}_\alpha$, $\overline{\upsilon}_n$ sunt versorii normalelor principale în punctul M ale curbelor (Γ_α) şi respectiv (Γ_n), atunci are loc relația:

$$\frac{\cos\theta_\alpha}{R_\alpha} = \pm\frac{1}{R_n},$$

unde θ_α este măsura unghiului format de vectorii $\overline{n}$ şi $\overline{\upsilon}_\alpha$.

Demonstrație. Fie θ_n măsura unghiului format de vectorii $\overline{n}$ şi $\overline{\upsilon}_n$. Dacă se ține seama de faptul că în punctul M curbele (Γ_α) şi (Γ_n) sunt tangente, atunci prin aplicarea teoremei 3.21, se obține:

$$\frac{\cos\theta_\alpha}{R_\alpha} = \frac{\cos\theta_n}{R_n}.$$

Deoarece curba $(\Gamma_n) \subset (\pi_n)$, unde planul (π_n) trece prin M şi este determinat de versorii $\overline{\tau}$ şi $\overline{n}$, se obține că versorii $\overline{n}$, $\overline{\upsilon}_n$ sunt coliniari, deci:

$$\overline{n} = \overline{\upsilon}_n, \quad \text{sau} \quad \overline{n} = -\overline{\upsilon}_n.$$

Aşadar:

$$\theta_n = 0, \quad \text{sau} \quad \theta_n = \pi,$$

de unde:

$$\cos\theta_n = 1, \quad \text{sau} \quad \cos\theta_n = -1,$$

prin urmare:

$$\frac{\cos\theta_\alpha}{R_\alpha} = \pm\frac{1}{R_n}.$$ ❒

Consecința 3.1. Din teorema lui Meusnier rezultă:

$$R_\alpha = R_n\left|\cos\theta_\alpha\right|,$$

deci curbura unei curbe oarecare (Γ_α) (plană sau în spațiu) se poate studia cu ajutorul curburii unei curbe plane (Γ_n) (secțiunea normală).

Definiția 3.22. Se consideră o suprafață (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

$M \in (\Sigma)$ un punct ordinar al acesteia, de vector de poziție $\bar{r}(u, v)$ iar $(\Gamma_\alpha) \in (\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I} \subset (\Sigma)$ o curbă din familia $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$ de curbe tangente în M pe suprafața (Σ). Fie $(\Gamma_n) \subset (\Sigma)$ secțiunea normală în punctul M, asociată familiei $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Se numeşte ***curbură normală*** a curbei (Γ_α) în punctul M, expresia:

$$\pm\frac{1}{R_n},$$

unde R_n este raza de curbură în M a secțiunii normale (Γ_n).

Observația 3.22. Curbura normală se notează cu $\dfrac{1}{\rho_n}$.

Deci:

$$\frac{1}{\rho_n} = \pm\frac{1}{R_n}.$$

Observații 3.23. 1° Din formula lui Meusnier rezultă:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\cos\theta_\alpha}{R_\alpha},$$

adică curbura normală $\dfrac{1}{\rho_n}$ este pozitivă sau negativă, după cum unghiul θ_α este ascuțit sau obtuz.

2° Se obține din definiția 3.22 că valoarea absolută a curburii normale a unei curbe $(\Gamma_\alpha) \subset (\Sigma)$, $\dfrac{1}{\rho_n}$, este egală cu curbura $\dfrac{1}{R_n}$ a secțiunii normale (Γ_n) ataşată curbei (Γ_α).

❒

Definiția 3.23. Se consideră suprafața (Σ) şi (Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ). Se numeşte ***curbură tangențială (geodezică)*** a curbei (Γ) în punctul $M \in (\Gamma)$ expresia:

$$\frac{\sin\theta}{R},$$

unde R este raza de curbură a curbei (Γ) în punctul M, θ este măsura unghiului dintre vectorii $\overline{\upsilon}$ şi $\overline{n}$, cu $\overline{\upsilon}$ versorul normalei principale la curba (Γ) în punctul M, iar $\overline{n}$ versorul normalei la suprafața (Σ) în punctul M.

Observația 3.24. Curbura tangențială se notează cu $\dfrac{1}{\rho_g}$.

Deci:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin\theta}{R}.$$

Propoziția 3.2. Se consideră o suprafață regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \overline{r} = \overline{r}(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

(Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ), iar $M \in (\Gamma)$, de vector de poziție $\overline{r}(u, v)$. Atunci curbura tangențială a curbei (Γ) în punctul M este dată de:

$$\frac{1}{\rho_g} = \left(\overline{n}, \overline{r}', \overline{r}''\right),$$

unde $\overline{n}$ este versorul normalei la suprafața (Σ) în punctul M, ds este elementul de arc pe curba (Γ), iar $\overline{r}' = \dfrac{d\overline{r}}{ds}$ şi $\overline{r}'' = \dfrac{d^2\overline{r}}{ds^2}$.

Demonstrație. Au loc succesiv egalitățile:

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \overline{\tau} \times \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \overline{\tau} \times \left(\frac{1}{R}\,\overline{\upsilon}\right) = \frac{1}{R}\left(\overline{\tau} \times \overline{\upsilon}\right) = \frac{1}{R}\,\overline{\beta},$$

unde s-a folosit prima formulă a lui Frenet, iar $\overline{\beta}$ este versorul binormalei în punctul M la curba (Γ).

Rezultă că:

$$\left(\overline{n}, \overline{r}', \overline{r}''\right) = \frac{1}{R}\left(\overline{n} \cdot \overline{\beta}\right) = \frac{1}{R}\left\|\overline{n}\right\| \cdot \left\|\overline{\beta}\right\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\theta}{R} = \frac{1}{\rho_g},$$

unde θ este măsura unghiului format de vectorii $\overline{\upsilon}$ şi $\overline{n}$.

❒

§3.10. Curburi principale. Direcții principale. Curbură totală. Curbură medie. Clasificarea punctelor unei suprafețe

Se consideră o suprafață regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

şi fie (Γ) o curbă arbitrară trasată pe suprafața (Σ), ce trece prin M ∈ (Σ), iar (π_n) planul determinat de vectorii $\bar{n}$ şi $\bar{\tau}$.

Conform teoremelor 3.20, 3.22 şi a definiției 3.22, pentru curbura normală a curbei (Γ) se obține formula:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Dacă se scoate factor dv^2 şi se notează $\frac{du}{dv} = m$, se obține:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{L\,m^2 + 2\,M\,m + N}{E\,m^2 + 2\,F\,m + G}.$$

Se deduce că $\frac{1}{\rho_n}$ depinde de punctul de pe suprafață, precum şi de raportul $m = \frac{du}{dv}$, care determină o anumită direcție în planul tangent la suprafață.

Rezultă că toate curbele de pe suprafața (Σ), care trec printr-un punct al suprafeței şi care admit aceeaşi tangentă, au aceeaşi curbură normală în acel punct.

Într-un punct de pe suprafață, curbura normală este o funcție continuă şi derivabilă de variabilă m.

Pentru simplificarea scrierii se notează $\frac{1}{\rho_n}(m) = k(m)$ şi deci:

$$k(m) = \frac{L\,m^2 + 2\,M\,m + N}{E\,m^2 + 2\,F\,m + G}.$$

Definiția 3.24. Se numesc ***curburi principale*** la suprafața (Σ) în punctul M ∈ (Γ) valorile extreme ale curburii normale.

Observația 3.25. Curburile principale se notează cu k_1, k_2.

Definiția 3.25. Se numesc ***raze de curbură principale*** inversele curburilor principale.

Observația 3.26. Razele de curbură principale se notează cu R_1, R_2.

Deci:

$$R_1 = \frac{1}{k_1}, \quad R_2 = \frac{1}{k_2}.$$

Definiția 3.25. Se consideră o suprafață regulată (Σ) şi $M \in (\Sigma)$. Fie k_1, k_2 curburile principale pe suprafața (Σ) în punctul M, iar (Γ_1), (Γ_2), două curbe trasate pe suprafața (Σ), ce trec prin punctul M şi care au curburile normale în M egale cu k_1, respectiv k_2.

Se numesc ***tangente principale*** pe suprafața (Σ) în punctul M, tangentele (T_1), (T_2) duse în M la (Γ_1), respectiv (Γ_2), adică tangentele pentru care funcția k(m) ia valori extreme.

Definiția 3.26. Se numesc ***direcții principale*** pe suprafața (Σ) în punctul M, valorile argumentului m pentru care funcția k(m) admite extreme.

Definiția 3.27. Se consideră (Σ) o suprafață regulată şi $M \in (\Sigma)$. Fie k_1, k_2 curburile principale pe suprafața (Σ) în punctul M, iar (Γ_1), (Γ_2), două curbe trasate pe suprafața (Σ), ce trec prin punctul M şi care au curburile normale în M egale cu k_1, respectiv k_2.

Se numesc ***secțiuni normale principale*** pe suprafața (Σ) în punctul M, secțiunile normale $\left(\Gamma_{n_1}\right)$, $\left(\Gamma_{n_2}\right)$, ataşate curbelor (Γ_1), respectiv (Γ_2).

Teorema 3.23. Se consideră o suprafață regulată (Σ). Atunci k_1, k_2, curburile principale ale suprafeței (Σ) într-un punct $M \in (\Sigma)$ sunt rădăcinile următoarei ecuații în k:

$$\begin{vmatrix} Ek - L & Fk - M \\ Fk - M & Gk - N \end{vmatrix} = 0,$$

unde E, F, G sunt coeficienții primei forme fundamentale, iar L, M, N sunt coeficienții celei de-a doua forme fundamentale a suprafeței (Σ).

Demonstrație. Pentru a găsi ecuația curburilor principale se derivează funcția k(m):

$$k'(m) = \frac{2\left(E\,m^2 + 2\,F\,m + G\right)(L\,m + M) - 2\left(L\,m^2 + 2\,M\,m + N\right)(E\,m + F)}{\left(E\,m^2 + 2\,F\,m + G\right)^2},$$

care se anulează dacă numărătorul este zero, altfel scris dacă:

$$\frac{L\,m^2 + 2\,M\,m + N}{E\,m^2 + 2\,F\,m + G} = \frac{L\,m + M}{E\,m + F}, \tag{3.7}$$

deci:

$$k(m) = \frac{L\,m + M}{E\,m + F}.$$

În relația (3.7) se amplifică membrul drept cu m şi se scad în proporția obținută numărătorii între ei şi numitorii între ei, se obțin succesiv:

$$\frac{L\,m^2 + 2\,M\,m + N}{E\,m^2 + 2\,F\,m + G} = \frac{L\,m + M}{E\,m + F} = \frac{L\,m^2 + M\,m}{E\,m^2 + F\,m} = \frac{M\,m + N}{F\,m + G},$$

adică:

$$k(m) = \frac{M\,m + N}{F\,m + G}.$$

S-a obținut astfel sistemul:

$$\begin{cases} k = \dfrac{L\,m + M}{E\,m + F}, \\ k = \dfrac{M\,m + N}{F\,m + G}, \end{cases} \tag{3.8}$$

care reprezintă valorile extreme ale funcției k(m), adică curburile principale.

Dacă se înlocuieşte în sistemul obținut $m = \dfrac{du}{dv}$, se obține sistemul liniar şi omogen în variabilele du şi dv:

$$\begin{cases} (Ek - L)\,du + (Fk - M)\,dv = 0, \\ (Fk - M)\,du + (Gk - N)\,dv = 0. \end{cases}$$

Pentru ca acest sistem să admită şi soluții nebanale este necesar şi suficient ca determinantul său să fie nul, deci:

$$\begin{vmatrix} Ek - L & Fk - M \\ Fk - M & Gk - N \end{vmatrix} = 0.$$

Rădăcinile k_1, k_2 ale acestei ecuații sunt curburile principale ale suprafeței (Σ) în punctul M.

❒

Observația 3.27. Dezvoltat, determinantul anterior conduce la ecuația:

$$(EG - F^2)\,k^2 - (EN - 2\,FM + GL)\,k + (LN - M^2) = 0.$$

Teorema 3.24. Se consideră (Σ) o suprafață regulată şi M ∈ (Σ), de coordonate curbilinii u, v. Atunci ecuația direcțiilor principale se poate scrie sub una din următoarele forme echivalente:

$$(EM - FL)\,m^2 + (EN - GL)\,m + FN - GM = 0,$$

$$\begin{vmatrix} Em + F & Lm + M \\ Fm + G & Mm + N \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 .$$

Demonstrație. Din sistemul (3.8) rezultă:

$$\frac{L\,m + M}{E\,m + F} = \frac{M\,m + N}{F\,m + G},$$

ecuație care se poate scrie şi sub forma:

$$\begin{vmatrix} Em + F & Lm + M \\ Fm + G & Mm + N \end{vmatrix} = 0 ,$$

sau sub forma echivalentă:

$$(EM - FL)\, m^2 + (EN - GL)\, m + FN - GM = 0, \tag{3.9}$$

sau sub forma mai uşor de reținut:

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

❒

Observații 3.28. 1° Direcțiile principale sunt definite de coeficienții celor două forme fundamentale.

2° În cazul în care:

$$EM - FL = 0, \quad EN - GL = 0, \quad FN - GM = 0, \tag{3.10}$$

atunci ecuația (3.9) devine identitate.

Condițiile (3.10) se scriu echivalent sub forma:

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = a . \tag{3.11}$$

❒

Definiția 3.28. Un punct M al unei suprafețe (Σ) în care au loc relațiile (3.11) se numeşte ***punct ombilical*** al suprafeței (Σ).

Observația 3.29. Într-un punct ombilical curbura normală este constantă.

Într-adevăr:

$$\frac{1}{\rho_n} = k(m) = \frac{a\left(E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2\right)}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2} = a .$$

Exemplul 3.8. Toate punctele sferei şi ale pseudosferei sunt ombilicale.

Soluție: Afirmația pentru sferă este imediată din exemplul 3.7. ❒

Propoziția 3.3. Se consideră (Σ) o suprafață regulată. Atunci direcțiile principale într-un punct $M \in (\Sigma)$,care nu este ombilical, sunt reale şi distincte.

Demonstrație. Tangentele principale pe suprafața (Σ) în punctul M sunt independente de alegerea sistemului de coordonate curbilinii u, v pe suprafața (Σ).

Se alege atunci un sistem de coordonate (Γ_u), (Γ_v) ortogonal. În acest caz:

$$F = 0,$$

şi atunci discriminantul ecuației (3.9) care determină direcțiile principale, este:

$$\Delta = (EN - GL)^2 + 4\,EGM^2.$$

Dar:

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u > 0$$

şi

$$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v > 0,$$

deci:

$$\Delta > 0.$$

Aşadar ecuația (3.9) are rădăcini reale şi distincte, adică direcțiile principale pe suprafața (Σ) în punctul M sunt reale şi distincte.

❒

Observația 3.30. Fie (Σ) o suprafață regulată şi $M \in (\Sigma)$. Dacă M este un punct ombilical, atunci orice direcție pe suprafața (Σ), în punctul M este o direcție principală.

Într-adevăr, dacă M este un punct ombilical al suprafeței regulate (Σ), atunci:

$$k(m) = a,$$

de unde prin derivare se obține:

$$k'(m) \equiv 0,$$

deci orice direcție pe suprafața (Σ) în punctul M este o direcție principală.

❒

Propoziția 3.4. Fie (Σ) o suprafață regulată şi $M \in (\Sigma)$. Atunci direcțiile principale în M, punct care nu este ombilical, sunt ortogonale.

Demonstrație. Se consideră două curbe: (Γ_1), (Γ_2) ce trec prin punctul M, sunt trasate pe suprafața (Σ) şi ale căror direcții ale tangentelor sunt identice cu direcțiile principale ale suprafeței (Σ) în punctul M.

Condiția de ortogonalitate a două curbe trasate pe o suprafață este:

$$E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0,$$

de unde:

$$E\,\frac{du}{dv}\cdot\frac{\delta u}{\delta v}+F\left(\frac{du}{dv}+\frac{\delta u}{\delta v}\right)+G=0$$

şi dacă se notează:

$$\frac{du}{dv}=m_1,\ \ \frac{\delta u}{\delta v}=m_2,$$

atunci condiția de ortogonalitate devine:

$$Em_1m_2 + F(m_1 + m_2) + G = 0.$$

Prin ipoteză, m_1, m_2 sunt rădăcinile ecuației 3.9 a direcțiilor principale, atunci conform relațiilor lui Viète, se poate scrie:

$$m_1+m_2=-\frac{EN-GL}{EM-FL},\qquad m_1\cdot m_2=\frac{FN-GM}{EM-FL}.$$

Atunci au loc egalitățile:

$$Em_1m_2+F(m_1+m_2)+G=E\,\frac{FN-GM}{EM-FL}-F\,\frac{EN-GL}{EM-FL}+G=$$
$$=\frac{EFN-EGM-EFN+FGL+EGM-FGL}{EM-FL}=0.$$

Deoarece condiția de ortogonalitate este verificată, rezultă că direcțiile principale pe suprafața (Σ) în punctul $M \in (\Sigma)$ sunt ortogonale.

❒

Definiția 3.29. Se numeşte ***curbură totală*** sau ***curbura lui Gauss*** într-un punct M al unei suprafețe regulate (Σ), produsul curburilor principale.

Definiția 3.30. Se numeşte ***curbură medie*** într-un punct M al unei suprafețe regulate (Σ), semisuma curburilor principale.

Observația 3.31. Curbura totală se notează cu K, iar curbura medie cu H.
Deci:

$$K = k_1 \cdot k_2,\qquad H=\frac{1}{2}(k_1+k_2).$$

Observația 3.32. Curbura totală K şi curbura medie H în punctul M al unei suprafețe (Σ) sunt date de formulele:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{EN - 2\,FM + GL}{2\,(EG - F^2)}.$$

Într-adevăr, formulele pentru K şi H rezultă prin aplicarea relațiilor lui Viete, ecuației curburilor principale.

❒

Teorema 3.25 (Teorema lui Gauss). Se consideră o suprafață regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

K, curbura totală într-un punct curent M(u, v) al acesteia, iar E(u, v), F(u, v), G(u, v) coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței (Σ) în punctul M. Atunci curbura totală K, poate fi exprimată în funcție de coeficienții E, F, G şi de derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi ale acestor coeficienți.

Demonstrație. Din observația 3.32, are loc:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

unde:

$$L = \frac{\left(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{uu}\right)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{\left(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{uv}\right)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{\left(\bar{r}'_u, \bar{r}'_v, \bar{r}''_{vv}\right)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Se obține succesiv:

$$LN - M^2 = \frac{1}{EG - F^2}\left(\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \end{vmatrix}^2 \right) = \frac{1}{EG - F^2}\left(\begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x''_{vv} \\ y'_u & y'_v & y''_{vv} \\ z'_u & z'_v & z''_{vv} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x''_{uv} \\ y'_u & y'_v & y''_{uv} \\ z'_u & z'_v & z''_{uv} \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{EG - F^2} \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{vmatrix} x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u & x'_u\, x'_v + y'_u\, y'_v + z'_u\, z'_v & x'_u\, x''_{vv} + y'_u\, y''_{vv} + z'_u\, z''_{vv} \\ x'_u\, x'_v + y'_u\, y'_v + z'_u\, z'_v & x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v & x'_v\, x''_{vv} + y'_v\, y''_{vv} + z'_v\, z''_{vv} \\ x'_u\, x''_{uu} + y'_u\, y''_{uu} + z'_u\, z''_{uu} & x'_v\, x''_{uu} + y'_v\, y''_{uu} + z'_v\, z''_{uu} & x''_{uu}\, x''_{vv} + y''_{uu}\, y''_{vv} + z''_{uu}\, z''_{vv} \end{vmatrix} - \right.$$

$$-\left|\begin{matrix} x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u & x'_u\,x'_v+y'_u\,y'_v+z'_u\,z'_v & x'_u\,x''_{uv}+y'_u\,y''_{uv}+z'_u\,z''_{uv} \\ x'_u\,x'_v+y'_u\,y'_v+z'_u\,z'_v & x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v & x'_v\,x''_{uv}+y'_v\,y''_{uv}+z'_v\,z''_{uv} \\ x'_u\,x''_{uv}+y'_u\,y''_{uv}+z'_u\,z''_{uv} & x'_v\,x''_{uv}+y'_v\,y''_{uv}+z'_v\,z''_{uv} & x''^2_{uv}+y''^2_{uv}+z''^2_{uv} \end{matrix}\right|\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{EG-F^2}\left(\left|\begin{matrix} \|\bar{r}'_u\|^2 & \bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v & \bar{r}'_u\cdot\bar{r}''_{vv} \\ \bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v & \|\bar{r}'_v\|^2 & \bar{r}'_v\cdot\bar{r}''_{vv} \\ \bar{r}'_u\cdot\bar{r}''_{uu} & \bar{r}'_v\cdot\bar{r}''_{uu} & \bar{r}''_{uu}\cdot\bar{r}''_{vv} \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} \|\bar{r}'_u\|^2 & \bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v & \bar{r}'_u\cdot\bar{r}''_{uv} \\ \bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v & \|\bar{r}'_v\|^2 & \bar{r}'_v\cdot\bar{r}''_{uv} \\ \bar{r}'_u\cdot\bar{r}''_{uv} & \bar{r}'_v\cdot\bar{r}''_{uv} & \|\bar{r}''_{uv}\|^2 \end{matrix}\right|\right),$$

dar:

$$\|\bar{r}'_u\|^2 = E, \qquad \bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v = F, \qquad \|\bar{r}'_v\|^2 = G,$$

rezultă că prin derivare se obțin relațiile:

$$2\,\bar{r}'_u\cdot\bar{r}''_{uu} = \frac{\partial E}{\partial u}, \quad 2\,\bar{r}'_u\cdot\bar{r}''_{uv} = \frac{\partial E}{\partial v}, \quad \bar{r}'_u\cdot\bar{r}''_{uv}+\bar{r}'_v\cdot\bar{r}''_{uu} = \frac{\partial F}{\partial u},$$

$$\bar{r}'_u\cdot\bar{r}''_{vv}+\bar{r}'_v\cdot\bar{r}''_{uv} = \frac{\partial F}{\partial v}, \quad 2\,\bar{r}'_v\cdot\bar{r}''_{uv} = \frac{\partial G}{\partial u}, \quad 2\,\bar{r}'_v\cdot\bar{r}''_{vv} = \frac{\partial G}{\partial v},$$

deci:

$$LN-M^2 = \frac{1}{EG-F^2}\left(\left|\begin{matrix} E & F & \frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ F & G & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \bar{r}''_{uu}\cdot\bar{r}''_{vv} \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} E & F & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ F & G & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & \|\bar{r}''_{uv}\|^2 \end{matrix}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{EG-F^2}\left\{E\left(G\,\bar{r}''_{uu}\cdot\bar{r}''_{vv}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}\right)-F\left(F\,\bar{r}''_{uu}\cdot\bar{r}''_{vv}-\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\left[F\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)-G\,\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\right]-E\left[G\,\|\bar{r}''_{uv}\|^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]+$$

$$\left.+F\left(F\,\|\bar{r}''_{uv}\|^2-\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\left(F\,\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}-G\,\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{EG-F^2}\left\{\left(EG-F^2\right)\left(\bar{r}''_{uu}\cdot\bar{r}''_{vv}-\|\bar{r}''_{uv}\|^2\right)+E\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]+\right.$$

$$+F\left[\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}\right]+$$

$$\left.+G\left[\frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \bar{r}''_{uu} \cdot \bar{r}''_{vv} - \left\| \bar{r}''_{uv} \right\|^2 + \frac{1}{4\,(EG - F^2)} \cdot \left[\left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} \right] E +$$

$$+ \frac{1}{4\,(EG - F^2)} \left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v} + 4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} \right) F +$$

$$+ \frac{1}{4\,(EG - F^2)} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} \right] G\,.$$

Fie relațiile:

$$\bar{r}'_u \cdot \bar{r}''_{vv} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \bar{r}'_u \cdot \bar{r}''_{uv} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Prin derivarea primei relații în raport cu u, a celei de a doua în raport cu v şi apoi prin scăderea lor, se obține:

$$\bar{r}''_{uu} \cdot \bar{r}''_{vv} - \left\| \bar{r}''_{vv} \right\|^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} \right),$$

deci:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{EG - F^2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) + \frac{E}{4\left(EG - F^2\right)}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} \right] + \frac{E}{4\left(EG - F^2\right)}\left(\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} + \right.$$

$$\left.\left. + 4\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{G}{4\left(EG - F^2\right)}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} \right] \right\},$$

aşadar curbura totală K este funcție de coeficienții E, F, G şi derivatele parțiale de ordinul întâi şi de ordinul doi ale acestor coeficienți.

❒

Definiția 3.31. Se consideră (Σ) o suprafață regulată şi fie K curbura totală într-un punct M ∈ (Σ).

1° Punctul M se numeşte ***punct eliptic*** al suprafeței (Σ), dacă în M curbura totală este pozitivă.

O suprafață care este formată numai din puncte eliptice se numeşte ***suprafață de tip eliptic.***

2° Punctul M se numeşte ***punct hiperbolic*** al suprafeței (Σ), dacă în M curbura totală este negativă.

O suprafață care este formată numai din puncte hiperbolice se numeşte ***suprafață de tip hiperbolic.***

3° Punctul M se numeşte ***punct parabolic*** al suprafeței (Σ), dacă în M curbura totală se anulează.

O suprafață care este formată numai din puncte parabolice se numeşte ***suprafață de tip parabolic.***

Exemplul 3.9. 1° Elipsoidul, sfera, paraboloidul eliptic, hiperboloidul cu două pânze sunt suprafețe de tip eliptic.

2° Paraboloidul hiperbolic, hiperboloidul cu o pânză sunt suprafețe de tip hiperbolic.

3° Planul, suprafețele cilindrice, suprafețele conice sunt suprafețe de tip parabolic.

Observații 3.33. 1° Dacă se ține cont de faptul că:

$$EG - F^2 > 0,$$

rezultă că un punct eliptic este caracterizat de condiția:

$$LN - M^2 > 0,$$

un punct hiperbolic este caracterizat de condiția:

$$LN - M^2 < 0,$$

iar un punct parabolic este caracterizat de condiția:

$$LN - M^2 = 0.$$

2° Orice punct ombilical este eliptic.
Într-adevăr, din relația:

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = a\,,$$

se obține:

$$LN - M^2 = a^2(EG - F^2) > 0. \qquad ❐$$

Exemplul 3.10. Să se găsească direcțiile principale şi razele de curbură principale ale sferei:

$$(\Sigma):\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Soluție: Ecuațiile parametrice ale sferei sunt:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = R\cos u \sin v, \\ y = R\sin u \sin v, \\ z = R\cos v. \end{cases}$$

Coeficienții celor două forme fundamentale ale acestei suprafețe sunt:

$$\begin{cases} E = R^2 \sin^2 v, \\ F = 0, \\ G = R^2, \\ L = -R \sin^2 v, \\ M = 0, \\ N = -R. \end{cases}$$

Direcțiile principale sunt definite de ecuația:

$$\begin{vmatrix} R^2 \sin^2 v & 0 & R^2 \\ -R \sin^2 v & 0 & -R \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

$0 \cdot du\,dv = 0$, deci orice direcție ce trece prin $A \in (\Sigma)$ este o direcție principală.

Razele de curbură principale ρ sunt date de ecuația:

$$\begin{vmatrix} R^2 \sin^2 v\, k + R^2 \sin^2 v & 0 \\ 0 & R^2 k + R \end{vmatrix} = 0, \text{ adică } k = -\frac{1}{R}.$$

Deci razele de curbură sunt egale între ele şi egale cu $-R$.
Rezultă că $\dfrac{1}{\rho_n}$ este constant:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{-R \sin^2 v\,du^2 - R\,dv^2}{R^2 \sin^2 v\,du^2 + R^2\,dv^2} = -\frac{1}{R}.$$

Pentru orice suprafață la care $\dfrac{1}{\rho_n} = \dfrac{\Phi_2(M)}{\Phi_1(M)} =$ constant, razele de curbură principale sunt egale. ❒

Exemplul 3.11. Să se calculeze curburile principale, curbura medie şi curbura totală a elicoidului:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = hv. \end{cases}$$

Soluție: Coeficienții celor două forme fundamentale sunt:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + h^2, \quad L = 0, \quad M = -\frac{h}{\sqrt{u^2 + h^2}}, \quad N = 0.$$

În cazul elicoidului, ecuația ce dă curburile principale este:

$$\begin{vmatrix} k & \dfrac{h}{\sqrt{u^2+h^2}} \\ \dfrac{h}{\sqrt{u^2+h^2}} & (u^2+h^2)k \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$k^2(u^2+h^2) - \frac{h^2}{u^2+h^2} = 0,$$

aşadar:

$$k^2 - \frac{h^2}{(u^2+h^2)^2} = 0,$$

de unde:

$$k_{1,2} = \pm\frac{h}{u^2+h^2},$$

deci:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.$$

Rezultă că elicoidul este o suprafață minimală (a se vedea definiția 3.43).

$$K = k_1 \cdot k_2 = -\frac{h^2}{\left(u^2+h^2\right)^2} < 0,$$

deci elicoidul este o suprafață de tip hiperbolic. ❒

§3.11. Linii asimptotice. Linii de curbură. Linii geodezice

Se consideră suprafața regulată (Σ) şi $M \in (\Sigma)$, un punct situat pe suprafață.

Definiția 3.32. Se numesc ***tangente asimptotice*** la suprafața (Σ) în punctul $M \in (\Sigma)$, tangentele curbelor (Γ) ce trec prin M şi sunt conținute pe suprafața (Σ), pentru care curbura normală $\dfrac{1}{\rho_n}$ în punctul M se anulează.

Definiția 3.33. Se numesc ***direcții asimptotice*** la suprafața (Σ) în punctul $M \in (\Sigma)$, direcțiile tangentelor asimptotice ce trec prin punctul M.

Definiția 3.34. Se numeşte ***linie asimptotică,*** o curbă (Γ) trasată pe suprafața (Σ), care este tangentă în fiecare punct $M \in (\Gamma)$ la una din tangentele asimptotice ce trec prin M

Propoziția 3.5. Direcțiile asimptotice în punctul dat $M \in (\Sigma)$, la suprafața (Σ) sunt determinate de ecuația:

$$Lm^2 + 2\,Mm + N = 0,$$

unde L, M, N sunt coeficienții celei de-a doua forme fundamentale a suprafeței (Σ), iar $m = \frac{du}{dv}$.

Demonstrație. Expresia curburii normale este:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Dacă se notează:

$$\frac{du}{dv} = m,$$

rezultă că:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{L\,m^2 + 2\,M\,m + N}{E\,m^2 + 2\,F\,m + G}.$$

Pentru a determina direcțiile asimptotice, trebuie ca:

$$\frac{1}{\rho_n} = 0,$$

aşadar:

$$Lm^2 + 2\,Mm + N = 0.$$

❒

Observații 3.34. 1° În punctul $M \in (\Sigma)$, pot fi două direcții asimptotice reale şi distincte, sau două direcții asimptotice reale şi confundate, sau direcții imaginare, după cum realizantul $\Delta' = M^2 - LN$ al ecuației de gradul al doilea $Lm^2 + 2\,Mm + N = 0$ este respectiv pozitiv, zero sau negativ.

2° Dacă se ține seama că semnul curburii totale:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

este dat de semnul expresiei $LN - M^2$ rezultă că: dacă $M \in (\Sigma)$ este un punct hiperbolic ($K < 0$), atunci în M există două direcții asimptotice reale şi distincte, dacă $M \in (\Sigma)$ este un punct parabolic ($K = 0$), atunci în M există două direcții asimptotice reale şi confundate şi care coincid cu una din direcțiile principale, iar dacă $M \in (\Sigma)$ este un punct eliptic ($K > 0$), atunci în M există două direcții asimptotice imaginare.

❒

Propoziția 3.6. Pe o suprafață regulată (Σ) există două familii de linii asimptotice, determinate de ecuația diferențială:

$$L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2 = 0.$$

Demonstrație. Prin definiție, o linie asimptotică (Γ) este tangentă în orice punct M al său la una din tangentele asimptotice ce trec prin punctul M. Deoarece ecuația direcțiilor asimptotice în punctul $M \in (\Sigma)$ este:

$$Lm^2 + 2\, Mm + N = 0.$$

unde:

$$m = \frac{du}{dv}$$

şi cum M este un punct curent al curbei (Γ), se obține că această ecuație este verificată de toate punctele curbei (Γ) şi dacă se înlocuieşte $m = \frac{du}{dv}$ în ecuația direcțiilor asimptotice se obține ecuația liniilor asimptotice din enunț.

Prin rezolvarea ecuației de gradul al doilea:

$$L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\, M \frac{du}{dv} + N = 0\,,$$

în raport cu $\frac{du}{dv}$ se obțin două ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$\frac{du}{dv} = f_1(u, v) \quad \text{şi} \quad \frac{du}{dv} = f_2(u, v)\,,$$

ale căror soluții generale sunt de forma:

$$\varphi_1(u, v, c_1) = 0,$$

respectiv:

$$\varphi_2(u, v, c_2) = 0.$$

Prin urmare, în general, pe suprafața regulată (Σ) există două familii de linii asimptotice, prin fiecare punct al suprafeței trec două linii asimptotice, câte una din fiecare familie.

❒

Observația 3.35. 1° Dacă M^2 - LN, realizantul ecuației liniilor asimptotice este pozitiv, atunci cele două familii de linii asimptotice sunt reale şi distincte, prin fiecare punct $M \in (\Sigma)$ trec două linii asimptotice reale şi distincte (câte una din fiecare familie), care au direcții asimptotice reale şi distincte.

2° Dacă realizantul:

$$M^2 - LN = 0,$$

atunci cele două familii de linii asimptotice sunt reale şi confundate.

3° Dacă realizantul:

$$M^2 - LN < 0,$$

atunci cele două familii de linii asimptotice sunt imaginare.

Teorema 3.26. Se consideră (Σ) o suprafață regulată şi fie (Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ). Condiția necesară şi suficientă ca (Γ) să fie o linie asimptotică este ca planul osculator (π_0) al curbei (Γ) în punctul curent $M \in (\Gamma)$ să coincidă cu planul tangent (π_T) în punctul M la suprafața (Σ).

Demonstrație. Necesitatea. Se presupune că $(\Gamma) \subset (\Sigma)$ este o linie asimptotică, adică are loc:

$$L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2 = 0.$$

Fie R raza de curbură a curbei (Γ) în punctul curent $M \in (\Gamma)$ şi fie $\theta = \widehat{(\bar{n}, \bar{\upsilon})}$, unde $\bar{n}$ este versorul normal în M la suprafața (Σ), iar $\bar{\upsilon}$ este versorul normalei principale la curba (Γ) în M.

Are loc formula:

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{L\, du^2 + 2\, M\, du\, dv + N\, dv^2}{E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2}.$$

Se obține:

$$\frac{\cos\theta}{R} = 0.$$

Se pot întâlni două cazuri:

1° Dacă $\frac{1}{R} \neq 0$, atunci $\cos\theta = 0$, deci $\theta = \frac{\pi}{2}$, aşadar $\bar{\upsilon} \perp \bar{n}$.

Pe de altă parte:

$$\bar{\tau} \perp \bar{n} \quad ,$$

unde $\bar{\tau}$ este vectorul tangentei la curba (Γ) în M.

Deoarece planul osculator (π_0) în punctul M la curba (Γ) este determinat de versorii $\bar{\tau}$ şi $\bar{\upsilon}$, rezultă:

$$\bar{n} \perp (\pi_0),$$

dar:

$$\bar{n} \perp (\pi_T), \text{ deci } (\pi_0) \equiv (\pi_T).$$

2° Dacă $\frac{1}{R}=0$, atunci curba (Γ) este o dreaptă. Deoarece planul osculator al unei drepte este nedeterminat, se ia prin convenție ca plan osculator al dreptei (Γ), planul (π_T), deci:

$$(\pi_0) \equiv (\pi_T).$$

Suficiența. Se presupune $(\pi_0) \equiv (\pi_T)$. În acest caz:

$$\theta = (\widehat{\overline{\upsilon}, \overline{n}}) = \frac{\pi}{2},$$

deci:

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

aşadar se obține:

$$L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

prin urmare curba (Γ) este o linie asimptotică. ❐

Definiția 3.35. Se consideră suprafața regulată (Σ) şi (Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ). Curba (Γ) se numeşte ***linie de curbură*** a suprafeței (Σ), dacă în fiecare punct M al său, este tangentă la una din direcțiile principale ce trec prin punctul M.

Propoziția 3.7. Pe o suprafață regulată (Σ) există două familii de linii de curbură determinate de ecuația diferențială:

$$(EM - FL)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (EN - GL)\frac{du}{dv} + (FN - GM) = 0.$$

Demonstrație. Fie:

$$(EM - FL)\,m^2 + (EN - GL)\,m + (FN - GM) = 0,$$

ecuația care determină direcțiile principale în punctul M la suprafața (Σ), unde:

$$m = \frac{du}{dv}.$$

Deoarece versorul $\overline{\tau}$ într-un punct $M \in (\Gamma)$ la curba (Γ) este, conform definiției 3.35, coliniar cu versorul unei tangente principale în punctul M, rezultă că ecuația:

$$(EM - FL)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (EN - GL)\frac{du}{dv} + (FN - GM) = 0,$$

este verificată în fiecare punct al curbei (Γ), prin urmare această ecuație diferențială determină liniile de curbură pe suprafața (Σ).

Prin rezolvarea ecuației diferențiale a liniilor de curbură ale suprafeței (Σ) în raport cu $\frac{du}{dv}$, se obțin ecuațiile diferențiale de ordinul întâi:

$$\frac{du}{dv} = f_1(u, v) \quad \text{şi} \quad \frac{du}{dv} = f_2(u, v).$$

Prin integrarea acestora se obțin ecuațiile a fouă familii de linii de curbură ale suprafeței (Σ):

$$(\Gamma_\alpha): \ F(u, v, \alpha) = 0,$$

$$(\Gamma_\beta): \ F(u, v, \beta) = 0.$$

Pentru α şi β dați, se obține că prin punctul $M \in (\Sigma)$, $M(u, v)$ trec două linii de curbură corespunzătoare constantelor α şi β. Deoarece tangentele principale care trec prin punctul $M \in (\Sigma)$ sunt rele, distincte şi ortogonale, se obține că şi liniile de curbură vor fi reale, distincte şi ortogonale.

❒

Observația 3.36.. Ecuația diferențială a liniilor de curbură se mai poate scrie:

$$\frac{L\,du + M\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{M\,du + N\,dv}{F\,du + G\,dv},$$

sau:

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & L\,du + M\,dv \\ F\,du + G\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Definiția 3.36. Se consideră suprafața regulată (Σ) şi fie (Γ) o curbă trasată pe suprafața (Σ). Curba (Γ) se numeşte ***linie geodezică***, dacă planul osculator în fiecare punct $M \in (\Gamma)$ conține versorul $\bar{n}$ al normalei la suprafața (Σ) în punctul M.

Teorema 3.27. Se consideră (Σ) o suprafață regulată şi fie $\{(\Gamma)\}$ mulțimea liniilor geodezice trasate pe suprafața (Σ).

1° În cazul în care suprafața (Σ) este dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

atunci ecuația diferențială a liniilor geodezice ale suprafeței (Σ) este:

$$(\Gamma):\ \left(\bar{n}, d\bar{r}, d^2\bar{r}\right) = 0,$$

unde $\bar{n}$ este versorul normalei la suprafața (Σ) în punctul curent M al lui (Γ).

2° În cazul în care suprafața (Σ) este dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2), \end{cases}$$

atunci ecuația diferențială a liniilor geodezice ale suprafeței (Σ) este:

$$(\Gamma):\ \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$(\Gamma):\ \frac{d^2x}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \frac{d^2y}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}} = \frac{d^2z}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}.$$

3° În cazul în care suprafața (Σ) este dată în reprezentare implicită:

$$(\Sigma):\ F(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

atunci ecuația diferențială a liniilor geodezice ale suprafeței (Σ) este:

$$(\Gamma):\ = \frac{d^2x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{d^2y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{d^2z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Demonstrație. 1° Deoarece planul osculator (π_0) la linia geodezică (Γ) în punctul M ∈ (Γ) este determinat de versorii $d\bar{r}$ și $d^2\bar{r}$, iar prin ipoteză el conține versorul $\bar{n}$ al normalei în punctul M ∈ (Σ) la suprafața (Σ), rezultă că vectorii $\bar{n}$, $d\bar{r}$, $d^2\bar{r}$ sunt coplanari, adică:

$$\left(\bar{n}, d\bar{r}, d^2\bar{r}\right) = 0.$$

Deoarece această ecuație este verificată în fiecare punct al unei linii geodezice, se obține că ea este ecuația diferențială a liniilor geodezice ale suprafeței (Σ):

$$(\Gamma):\ \left(\bar{n}, d\bar{r}, d^2\bar{r}\right) = 0.$$

2° Au loc relațiile următoare în reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$:

$$\bar{n} = \frac{1}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v) = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \bar{k} \right).$$

Prin scrierea expresiei analitice, în raport cu reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ a produsului mixt obținut la punctul 1°, se obține ecuația diferențială a liniilor geodezice în acest caz:

$$(\Gamma): \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Deoarece planul osculator (π_0) este determinat de versorii $\bar{\tau}$ şi $\bar{\upsilon}$, iar prin ipoteză el conține versorul $\bar{n}$ se obține că $\bar{\tau}$, $\bar{\upsilon}$ şi $\bar{n}$. Sunt coplanari. Cum $\bar{\upsilon}$ şi $\bar{n}$ sunt ortogonali pe $\bar{\tau}$, rezultă că ei sunt coliniari, deci:

$$\bar{\upsilon} = \alpha \bar{n},$$

dar:

$$\bar{\upsilon} = \gamma \frac{d^2\bar{r}}{ds^2},$$

adică:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \lambda\, \bar{n}, \quad \text{unde} \quad \lambda = \frac{\alpha}{\gamma},$$

sau:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \lambda \cdot \frac{1}{\|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\|}(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v),$$

de unde se obține:

$$\frac{\dfrac{d^2x}{ds^2}}{\dfrac{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\dfrac{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}}} = \frac{\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\dfrac{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}}},$$

rezultă că au loc egalitățile:

$$(\Gamma): \frac{d^2x}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \frac{d^2y}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}} = \frac{d^2z}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}.$$

3° Dacă suprafața (Σ) este definită prin ecuația implicită:

$$(\Sigma): \ F(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3,$$

în acest caz:

$$\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} \left(F'_x \ \overline{i} + F'_y \ \overline{j} + F'_z \ \overline{k} \right),$$

de unde rezultă:

$$\frac{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{F'_x} = \frac{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}}{F'_y} = \frac{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}{F'_y},$$

se obțin ecuațiile diferențiale ale liniilor geodezice sub forma:

$$(\Gamma): = \frac{d^2x}{F'_x} = \frac{d^2y}{F'_y} = \frac{d^2z}{F'_z}.$$

❒

Observații 3.37. Fie (Σ) o suprafață regulată şi fie:

$$(\Gamma): \left(\overline{n}, d\overline{r}, d^2\overline{r} \right) = 0 \ ,$$

ecuația liniilor geodezice pe suprafața (Σ).

1° Dacă în lungul liniilor geodezice se consideră v ca variabilă independentă şi u = u(v), atunci:

$$d\overline{r} = \left(\overline{r}'_u \frac{du}{dv} + \overline{r}'_v \right) dv$$

$$d^2\bar{r}=\left[\bar{r}''_{uu}\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2\,\bar{r}''_{uv}\,\frac{du}{dv}+\bar{r}''_{vv}+\bar{r}'_u\,\frac{d^2u}{dv^2}\right]dv^2 .$$

Prin înlocuire în ecuația liniilor geodezice se obține:

$$(\Gamma):\ \bar{n}\left\{\left(\bar{r}'_u\,\frac{du}{dv}+\bar{r}'_v\right)\times\left[\bar{r}''_{uu}\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2\,\bar{r}''_{uv}\,\frac{du}{dv}+\bar{r}''_{vv}+\bar{r}'_u\,\frac{d^2u}{dv^2}\right]\right\}=0 .$$

Dacă se efectuează calculele, se obține:

$$(\Gamma):\ \bar{n}\,(\bar{r}'_u\times\bar{r}'_v)\frac{d^2u}{dv^2}-[\bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}''_{uu})]\left(\frac{du}{dv}\right)^3-[2\,\bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}''_{uv})+$$

$$+\bar{n}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}''_{uu})]\left(\frac{du}{dv}\right)^2-[\bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}''_{vv})+2\,\bar{n}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}''_{uv})]\frac{du}{dv}-\bar{n}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}''_{vv})=0 .$$

2° Dacă în lungul liniilor geodezice se consideră u ca variabilă independentă iar v = v(u), atunci:

$$d\bar{r}=\left(\bar{r}'_u+\bar{r}'_v\,\frac{dv}{du}\right)du ,$$

$$d^2\bar{r}=\left[\bar{r}''_{uu}+2\,\bar{r}''_{uv}\,\frac{dv}{du}+\bar{r}''_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\bar{r}'_v\,\frac{d^2v}{du^2}\right]du^2 .$$

Prin înlocuire în ecuația liniilor geodezice, în urma efectuării calculelor, se obține:

$$(\Gamma):\ \bar{n}\,(\bar{r}'_u\times\bar{r}'_v)\frac{d^2v}{du^2}+[\bar{n}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}''_{vv})]\left(\frac{dv}{du}\right)^3+[\bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}''_{vv})+$$

$$+2\ \bar{n}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}''_{uv})]\left(\frac{dv}{du}\right)^2+[2\,\bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}''_{uv})+\bar{n}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}''_{uu})]\frac{dv}{du}+\bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}''_{uu})=0 .$$

3° Dacă E, F, G sunt coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței (Σ), atunci printr-un calcul simplu rezultă:

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}'_v)=\sqrt{EG-F^2}\,,\qquad \bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}''_{uu})=\frac{E\left(2\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}\right)-F\frac{\partial E}{\partial u}}{2\sqrt{EG-F^2}}\,,$$

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}''_{uu})=\frac{F\left(2\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}\right)-G\frac{\partial E}{\partial u}}{2\sqrt{EG-F^2}}\,,\qquad \bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}''_{uv})=\frac{E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}}{2\sqrt{EG-F^2}}\,,$$

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}''_{uv})=\frac{F\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial E}{\partial v}}{2\sqrt{EG-F^2}},\qquad \bar{n}\cdot(\bar{r}'_u\times\bar{r}''_{vv})=\frac{E\frac{\partial G}{\partial v}-F\left(2\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)}{2\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\bar{n}\cdot(\bar{r}'_v\times\bar{r}''_{vv})=\frac{F\frac{\partial G}{\partial v}-G\left(2\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)}{2\sqrt{EG-F^2}}.$$

Prin înlocuirea acestor produse mixte în ecuațiile liniilor geodezice din 1° şi 2° se obține respectiv:

i) $$(\Gamma):\ 2(EG-F^2)\frac{d^2u}{dv^2}+\left[F\frac{\partial E}{\partial u}+E\left(\frac{\partial E}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right]\left(\frac{du}{dv}\right)^3+$$
$$+\left[G\frac{\partial E}{\partial u}+\left(3\frac{\partial E}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial u}\right)F-2E\frac{\partial G}{\partial u}\right]\left(\frac{du}{dv}\right)^2+$$
$$+\left[2G\frac{\partial E}{\partial v}+\left(2\frac{\partial F}{\partial v}-3\frac{\partial G}{\partial u}\right)F-E\frac{\partial G}{\partial v}\right]\frac{du}{dv}+\left[G\left(2\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)-F\frac{\partial G}{\partial v}\right]=0;$$

ii) $$(\Gamma):\ 2(EG-F^2)\frac{d^2v}{du^2}+\left[F\frac{\partial G}{\partial v}+G\left(\frac{\partial G}{\partial u}-2\frac{\partial F}{\partial v}\right)\right]\left(\frac{dv}{du}\right)^3+$$
$$+\left[E\frac{\partial G}{\partial v}+\left(3\frac{\partial G}{\partial u}-2\frac{\partial F}{\partial v}\right)F-2G\frac{\partial E}{\partial v}\right]\left(\frac{dv}{du}\right)^2+$$
$$+\left[2E\frac{\partial G}{\partial u}+\left(2\frac{\partial F}{\partial u}-3\frac{\partial E}{\partial v}\right)F-G\frac{\partial F}{\partial u}\right]\frac{dv}{du}+\left[E\left(2\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}\right)-F\frac{\partial E}{\partial u}\right]=0.$$

4° Din 1°–3° rezultă că ecuația liniilor geodezice este o ecuație diferențială de ordinul doi. Soluția generală a acestei ecuații va fi de forma:

$$\varphi(u, v, c_1, c_2) = 0.$$

Deci mulțimea liniilor geodezice este o familie ce curbe ce depinde de doi parametri, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5° Dacă rețeaua $[(\Gamma_u), (\Gamma_v)]$ de curbe coordonate pe (Σ) este o rețea ortogonală pe (Σ), atunci liniile geodezice (Γ) pe (Σ) sunt determinate de sistemul de ecuații:

$$\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}\cos\alpha,$$

$$\frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\alpha,$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos\alpha - \frac{1}{2\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin\alpha ,$$

unde α este unghiul format de tangenta în M la geodezica (Γ) cu tangenta în M la curba coordonată (Γ_u), adică $\alpha = \widehat{(\bar{\tau}, \bar{r}_u)}$.

Prin împărțire membru cu membru a ecuației a doua şi a treia cu prima ecuație se obține:

$$\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{E}{G}}\, \mathrm{tg}\,\alpha ,$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \frac{\partial \ln E}{\partial v} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \ln G}{\partial u}\, \mathrm{tg}\,\alpha .$$

Soluția generală a acestui sistem este de forma:

$$v = f(u, c_1, c_2), \qquad \alpha = g(u, c_1, c_2).$$

Prima ecuație determină familia de linii geodezice şi a doua ecuație determină direcția tangentelor la liniile geodezice.

❒

Teorema 3.28. Printr-un punct M(u, v) al suprafeței regulate (Σ) trec o infinitate de linii geodezice ale suprafeței (Σ).

Demonstrație. Liniile geodezice (Γ), ale suprafeței (Σ) sunt determinate de ecuația diferențială:

$$(\Gamma):\ \left(\bar{n}, d\bar{r}, d^2\bar{r}\right) = 0 .$$

Dacă se consideră u variabilă independentă şi v funcție de u, ecuația liniilor geodezice este conform observației 3.37 o ecuație diferențială de ordinul doi. Soluția generală a acestei ecuații este de forma:

$$\varphi(u, v, c_1, c_2) = 0,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Se obține că printr-un punct M(u, v) $\in$ (Σ) trec o infinitate de linii geodezice.

❒

Observații 3.38. 1° Pentru a determina o geodezică ce trece printr-un punct M(u, v) $\in$ (Σ), este necesar a cunoaşte în afară de punctul M încă o condiție inițială.

2° Dacă se ține cont de cele prezentate în paragraful 3.9 rezultă că liniile geodezice ale suprafeței regulate (Σ), sunt curbele (Γ) $\subset$ (Σ), pentru care curbura geodezică (tangențială) $\dfrac{1}{\rho_g}$ în orice punct M $\in$ (Γ) este nulă.

3° Se poate demonstra următorul rezultat: drumul cel mai scurt pe o suprafață între două puncte ale acesteia este geodezica ce trece prin ele.

Exemplul 3.12. Se consideră pseudosfera dată în reprezentarea parametrică:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = R\sin u\cos v, \\ y = R\sin u\sin v, \\ z = R(\cos u + \ln \operatorname{tg} u/2), \quad \operatorname{tg} u/2 > 0. \end{cases}$$

Să se determine liniile de curbură.

Soluție:

$$x'_u = R\cos u\cos v, \qquad y'_u = R\cos u\sin v, \qquad z'_u = R\left(-\sin u + \frac{1}{\sin u}\right),$$

$$x'_v = -R\sin u\sin v, \qquad y'_v = R\sin u\cos v, \qquad z'_v = 0,$$

$$x''_{uu} = -R\sin u\cos v, \qquad y''_{uu} = -R\sin u\sin v, \qquad z''_{uu} = R\left(-\cos u - \frac{\cos u}{\sin^2 u}\right),$$

$$x''_{uv} = -R\cos u\sin v, \qquad y''_{uv} = R\cos u\cos v, \qquad z''_{uv} = 0,$$

$$x''_{vv} = -R\sin u\cos v, \qquad y''_{vv} = -R\sin u\sin v, \qquad z''_{vv} = 0,$$

deci:

$$E = R^2\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}, \quad F = 0, \quad G = R^2\sin^2 u, \quad EG - F^2 = R^4\cos^2 u.$$

$$L = \frac{1}{R^2\cos u}\begin{vmatrix} R\cos u\cos v & R\cos u\sin v & R\left(-\sin u + \frac{1}{\sin u}\right) \\ -R\sin u\sin v & R\sin u\cos v & 0 \\ -R\sin u\cos v & -R\sin u\sin v & R\left(-\cos u - \frac{\cos u}{\sin^2 u}\right) \end{vmatrix} = -\frac{R\cos u}{\sin u},$$

$$M = \frac{1}{R^2\cos u}\begin{vmatrix} R\cos u\cos v & R\cos u\sin v & R\left(-\sin u + \frac{1}{\sin u}\right) \\ -R\sin u\sin v & R\sin u\cos v & 0 \\ -R\cos u\sin v & R\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$N = \frac{1}{R^2\cos u}\begin{vmatrix} R\cos u\cos v & R\cos u\sin v & R\left(-\sin u + \frac{1}{\sin u}\right) \\ -R\sin u\sin v & R\sin u\cos v & 0 \\ -R\sin u\cos v & -R\sin u\sin v & 0 \end{vmatrix} = R\sin u\cos u.$$

Liniile de curbură sunt definite de ecuația diferențială:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

dar:

F = 0,
M = 0.

Se obține ecuația:

(EN – GL) du dv = 0,

de unde:

du = dv = 0,

aşadar:

$u = u_0$,
$v = v_0$,

sunt linii de curbură trasate pe suprafața (Σ). ❐

§3.12. Clase remarcabile de suprafețe

3.12.1. Suprafețe riglate

Definiția 3.37. Se numeşte ***suprafață riglată***, o suprafață generată de o dreaptă (Δ), numită ***generatoare***, care se sprijină pe o curbă în spațiu (Γ), numită ***curbă directoare*** a suprafeței riglate.

Se consideră curba în spațiu (Γ), de clasă 1, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Gamma):\ \bar{r} = \bar{a}(u).$$

Fie P ∈ (Γ), P(u) şi $\bar{b}(u)$ un versor al dreptei (Δ), ce trece prin acest punct (fig. 3.10). Deoarece orice punct M, al suprafeței riglate (Σ), aparține unei drepte (Δ), se obține că această suprafață poate fi dată printr-o reprezentare vectorială de forma:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}(u, v),$$

unde:

$$\bar{r}(u, v) = \bar{a}(u) + v \cdot \bar{b}(u),\quad (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Din ecuația vectorială a suprafeței riglate (Σ) se obțin ecuațiile parametrice ale acesteia:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = a_1(u) + v\, l(u), \\ y = a_2(u) + v\, m(u), \\ z = a_3(u) + v\, n(u), \end{cases}$$

unde x, y, z sunt coordonatele carteziene ale punctului M, $a_1(u)$, $a_2(u)$, $a_3(u)$ sunt coordonatele punctului P, iar l(u), m(u), n(u) sunt componentele versorului $\overline{b}$.

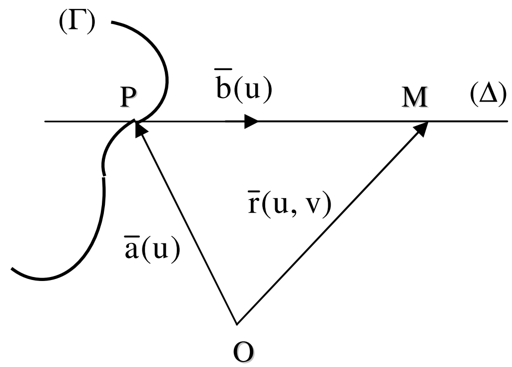


Fig. 3.10.

Observația 3.39. Ecuația vectorială a unei suprafețe riglate este liniară în raport cu parametrul v. Reciproc, se arată imediat că orice ecuație liniară în raport cu unul dintre parametri, reprezintă o suprafață riglată.

Teorema 3.29. Se consideră (Σ) o suprafață riglată dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \overline{r} = \overline{a}(u) + v \cdot \overline{b}(u),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

şi M ∈ (Σ) un punct curent, atunci planul tangent (π_T) în punctul M la suprafața (Σ) conține generatoarele ce trec prin punctul M.

Demonstrație. Planul tangent (π_T) în punctul M la suprafața (Σ) este determinat de vectorii $\overline{r}'_u$, $\overline{r}'_v$. Din ecuația vectorială a suprafeței riglate se obține:

$$\overline{r}'_u = \overline{a}' + v\,\overline{b}', \qquad \overline{r}'_v = \overline{b},$$

deci, $\overline{b}(u)$ este o direcție în planul tangent (π_T). Cum planul tangent în punctul M la suprafața (Σ) conține vectorul director $\overline{b}(u)$, va conține şi generatoarea prin M determinată de vectorul $\overline{b}(u)$.

❐

Observația 3.40. Punctele în care $\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = \left(\overline{a}' + v\,\overline{b}'\right) \times \overline{b} = \overline{0}$, adică punctele singulare ale suprafeței riglate, nu vor fi studiate în cele ce urmează.

Coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței riglate (Σ) sunt:

$$E = \overline{r}'^{\,2}_u = \overline{a}'^2 + 2\, v\, \overline{a}'\, \overline{b}' + v^2\, \overline{b}'^2,$$

$$F = \overline{a}' \cdot \overline{b},$$

$$G = 1,$$

unde:

$$\overline{a}' = \frac{d\overline{a}}{du}.$$

Direcția normalei la suprafața riglată (Σ) este dată de vectorul unitar:

$$\overline{n} = \frac{1}{\left\| \overline{r}'_u \times \overline{r}'_v \right\|}\left(\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v\right) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\overline{a}' + v\,\overline{b}'\right) \times \overline{b}.$$

Propoziția 3.8. Se consideră (Σ) o suprafață riglată dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \ \overline{r} = \overline{a}(u) + v \cdot \overline{b}(u),\ \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Dacă $\overline{b} \times \overline{b}' = \overline{0}$, atunci suprafața riglată (Σ) are același plan tangent (π_T) în toate punctele unei generatoare.

Demonstrație. Deoarece:

$$\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\overline{a}' \times \overline{b} + v\,\overline{b}' \times \overline{b}\right),$$

pe baza ipotezei se obține:

$$\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\,\overline{a}' \times \overline{b},$$

deci $\overline{n}$ este coliniar cu vectorul $\overline{a}' \times \overline{b}$, care este constant dacă punctual P al curbei directoare (Γ) este fixat.

❒

Coeficienții celei de-a doua forme fundamentale a suprafeței riglate (Σ) sunt:

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\left(\overline{a}'', \overline{a}', \overline{b}\right) + \left(\overline{a}', \overline{b}, \overline{b}''\right)v - \left(\overline{a}'', \overline{b}, \overline{b}'\right)v - \left(\overline{b}, \overline{b}', \overline{b}''\right)v^2\right],$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\overline{a}', \overline{b}, \overline{b}'\right),$$

$$N = 0,$$

iar curbura sa Gauss este:

$$K = -\frac{\left(\overline{a}', \overline{b}, \overline{b}'\right)}{\left(EG - F^2\right)^2}.$$

Propoziția 3.9. Se consideră (Σ), o suprafață riglată dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{a}(u) + v \cdot \bar{b}(u), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Punctele suprafeței (Σ) sunt:

1) hiperbolice, dacă $(\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}') \neq 0$,
2) parabolice, dacă $(\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}') = 0$.

Demonstrație.

$$LN - M^2 = -M^2 = -\frac{1}{EG - F^2}(\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}')^2.$$

Pentru $(\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}') \neq 0$, se obține $LN - M^2 < 0$, adică punctele suprafeței sunt hiperbolice, iar dacă $(\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}') = 0$ rezultă că $LN - M^2 = 0$, adică punctele suprafeței sunt parabolice.

❒

Propoziția 3.10. Generatoarele unei suprafețe riglate sunt linii asimptotice ale acesteia.

Demonstrație. Deoarece N = 0, rezultă că ecuația liniilor asimptotice devine:

$$du\,(L\,du + 2\,M\,dv) = 0,$$

de unde se obține:

$$u = \text{constant}.$$ ❒

3.12.2. Suprafețe desfăşurabile

Definiția 3.38. Se numeşte ***suprafață desfăşurabilă***, o suprafață riglată (Σ), cu proprietatea că planul tangent (π_T) la suprafața (Σ) în punctul M ∈ (Σ) rămâne constant, atunci când punctul M parcurge o generatoare oarecare (Δ) a suprafeței (Σ).

Teorema 3.30. Se consideră (Σ) o suprafață riglată dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{a}(u) + v \cdot \bar{b}(u), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Condiția necesară şi suficientă ca suprafața (Σ) să fie o suprafață desfăşurabilă este ca:

$$(\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}') = 0.$$

Demonstrație. Necesitatea. Se consideră o suprafață desfăşurabilă (Σ), rezultă că vectorul $\bar{N}$ normal la suprafața (Σ) păstrează o direcție constantă de-a lungul unei generatoare arbitrare (Δ) ⊂ (Σ) de ecuație:

(Δ) : $u = \text{constant}$.

Deoarece:

$$\bar{r}'_u = \bar{a}' + v\,\bar{b}', \qquad \bar{r}'_v = \bar{b},$$

rezultă că:

$$\bar{N} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \bar{a}' \times \bar{b} + v\,\bar{b}' \times \bar{b}.$$

Dar vectorii $\bar{a}' \times \bar{b}$ şi $\bar{b}' \times \bar{b}$ sunt constanți, deoarece de-a lungul generatoarei (Δ) are loc:

$$u = \text{constant}$$

şi cum $\bar{N}$ păstrează aceeaşi direcție, se obține că vectorii:

$$\bar{a}' \times \bar{b}, \qquad \bar{b}' \times \bar{b}$$

sunt coliniari.

Deoarece vectorul $\bar{a}' \times \bar{b}$ este ortogonal pe vectorii $\bar{a}', \bar{b}$, iar vectorul $\bar{b}' \times \bar{b}$ este ortogonal pe vectorii $\bar{b}', \bar{b}$ rezultă că vectorii $\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}'$ sunt coplanari fiind toți perpendiculari pe aceeaşi direcție, direcția lui $\bar{N}$, aşadar:

$$\left(\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}'\right) = 0.$$

Suficiența. Se presupune că are loc relația:

$$\left(\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}'\right) = 0,$$

rezultă că vectorii $\bar{a}', \bar{b}, \bar{b}'$ sunt coplanari, aşadar vectorii $\bar{a}' \times \bar{b}$, $\bar{b}' \times \bar{b}$ sunt coliniari sau unul dintre ei este vectorul nul. Prin urmare vectorul normal $\bar{N}$ păstrează aceeaşi direcție de-a lungul oricărei generatoare, adică planul tangent (π_T) este constant de-a lungul unei generatoare oarecare, deci (Σ) este o suprafață desfăşurabilă.

❐

Exemplul 3.13. Se consideră suprafața:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = [\cos u - (u+v)\sin u]\,\bar{i} + [\sin u + (u+v)\cos u]\,\bar{j} + (2u+v)\,\bar{k}.$$

Să se arate că (Σ) este o suprafață desfăşurabilă.

Soluție. Deoarece ecuația suprafeței (Σ), este liniară în v, se obține că (Σ) este o suprafață riglată.

Au loc relațiile:

$$\bar{r}'_u = [-2\sin u - (u+v)\cos u]\,\bar{i} + [2\cos u - (u+v)\sin u]\,\bar{j} + 2\,\bar{k},$$

$$\bar{r}'_v = -\sin u\,\bar{i} + \cos u\,\bar{j} + \bar{k},$$

de unde:

$$\overline{N} = \overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2\sin u - (u+v)\cos u & 2\cos u - (u+v)\sin u & 2 \\ -\sin u & \cos u & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -(u+v)\cos u & -(u+v)\sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 1 \end{vmatrix} = (u+v) \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -\cos u & -\sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 1 \end{vmatrix}.$$

Se obține:

$$\overline{N} = (u+v)\,(-\sin u\,\overline{i} + \cos u\,\overline{j} - \overline{k}).$$

Pentru u = constant, adică de-a lungul oricărei generatoare (Δ), vectorul $\overline{N}$ este coliniar cu vectorul constant $\overline{c} = -\sin u\,\overline{i} + \cos u\,\overline{j} - \overline{k}$, deci vectorul normal $\overline{N}$ păstrează aceeaşi direcție de-a lungul oricărei generatoare, prin urmare planul tangent (π_T) este constant de-a lungul unei generatoare oarecare, deci (Σ) este o suprafață desfăşurabilă.

❒

Se consideră (Σ), o suprafață desfăşurabilă, dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \overline{r} = \overline{a}(u) + v\cdot\overline{b}(u),\ (u,v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2),$$

unde vectorii $\overline{a}(u), \overline{b}(u)$ satisfac condiția:

$$\left(\overline{a}', \overline{b}, \overline{b}'\right) = 0.$$

Au loc relațiile:

$$\overline{r}'_u = \overline{a}' + v\,\overline{b}',\quad \overline{r}'_v = \overline{b},\quad \overline{r}''_{uu} = \overline{a}'' + v\,\overline{b}'',\quad \overline{r}''_{uv} = \overline{b}',\quad \overline{r}''_{vv} = \overline{0},$$

de unde:

$$L = \frac{\left(\overline{r}'_u, \overline{r}'_v, \overline{r}''_{uu}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\left(\overline{a}' + v\,\overline{b}'\right)\cdot\left(\overline{b}\times\overline{a}'' + v\,\overline{b}\times\overline{b}''\right)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

$$M = \frac{\left(\overline{r}'_u, \overline{r}'_v, \overline{r}''_{uv}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\left(\overline{a}' + v\,\overline{b}'\right)\cdot\left(\overline{b}\times\overline{b}'\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\overline{a}'\cdot\left(\overline{b}\times\overline{b}'\right) + v\,\overline{b}'\cdot\left(\overline{b}\times\overline{b}'\right)}{\sqrt{EG - F^2}} =$$

$$= \frac{\left(\overline{a}', \overline{b}, \overline{b}'\right) + \left(\overline{b}', \overline{b}, \overline{b}'\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = 0.$$

$$N = \frac{\left(\overline{r}'_u, \overline{r}'_v, \overline{r}''_{vv}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\left(\overline{a}' + v\,\overline{b}'\right)\cdot\left(\overline{b}\times\overline{0}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = 0,$$

deci:

$$LN - M^2 = 0,$$

aşadar:

$$K = 0.$$

3.12.3. Suprafețe cilindrice

Definiția 3.39. Se numeşte ***suprafață cilindrică***, o suprafață riglată ale cărei generatoare păstrează aceeaşi direcție.

Se obține că o suprafață cilindrică (Σ) admite o reprezentare vectorială de forma:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{a}(u) + v \cdot \bar{b},$$

unde $\bar{b}$ este un vector constant.

Exemplul 3.14. Să se găsească ecuația suprafeței cilindrice (Σ) ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta de ecuații:

$$(d): \begin{cases} (\pi_1) = 0, \\ (\pi_2) = 0 \end{cases}$$

şi are curba directoare:

$$(\Gamma): \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Soluție. Deoarece ecuațiile a două plane paralele diferă numai prin termenii liberi, rezultă că orice dreaptă $(\Delta_{\lambda\mu})$ paralelă cu (d) are ecuațiile:

$$(\Delta_{\lambda\mu}): \begin{cases} (\pi_1) = \lambda, \\ (\pi_2) = \mu. \end{cases}$$

Dreapta $(\Delta_{\lambda\mu})$ este generatoare a suprafeței (Σ) căutate dacă $(\Delta_{\lambda\mu}) \cap (\Gamma) \neq \varnothing$. Se obține astfel o condiție de compatibilitate prin eliminarea lui x, y, z între cele patru ecuații ale sistemului:

$$\begin{cases} (\pi_1) = \lambda, \\ (\pi_2) = \mu, \\ F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

şi anume:

$$\phi(\lambda, \mu) = 0.$$

Problema a fost astfel redusă la găsirea locului geometric al dreptelor $(\Delta_{\lambda\mu})$, pentru care

are loc condiția $\phi(\lambda, \mu) = 0$. Prin eliminarea parametrilor λ şi μ între aceste ecuații se obține ecuația implicită a suprafeței cilindrice:

$$(\Sigma): \phi((\pi_1), (\pi_2)) = 0.$$

❐

3.12.4. Suprafețe conice

Definiția 3.40. Se numeşte ***suprafață conică***, o suprafață riglată ale cărei generatoare trec printr-un punct fix V, numit ***vârf*** al suprafeței.

Se obține că o suprafață conică (Σ) admite o reprezentare vectorială de forma:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{a} + v \cdot \bar{b}(u),$$

unde $\bar{a}$ este vectorul constant $\overline{OV}$ (fig. 3.11).

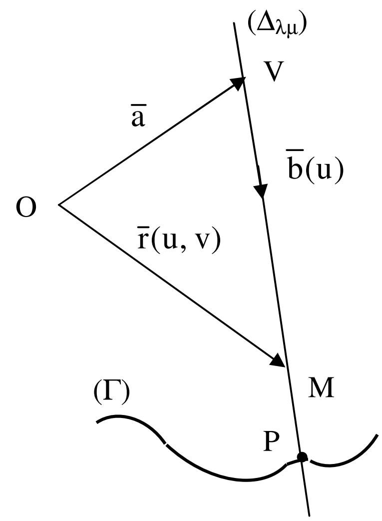


Fig. 3.11.

Exemplul 3.15. Să se găsească ecuația suprafeței conice (Σ) cu vârful:

$$V: \begin{cases} (\pi_1) = 0, \\ (\pi_2) = 0, \\ (\pi_3) = 0, \end{cases}$$

şi a cărei curbă directoare este:

$$(\Gamma): \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Soluție. Orice dreaptă $(\Delta_{\lambda\mu})$, care trece prin punctul V are ecuații de forma:

$$(\Delta_{\lambda\mu}): \begin{cases} (\pi_1) - \lambda(\pi_3) = 0, \\ (\pi_2) - \mu(\pi_3) = 0. \end{cases}$$

Dreapta $(\Delta_{\lambda\mu})$ este generatoare a suprafeței (Σ) căutate dacă $(\Delta_{\lambda\mu}) \cap (\Gamma) \neq \varnothing$. Se obține astfel o condiție de compatibilitate a sistemului prin eliminarea lui x, y, z între ecuațiile:

$$\begin{cases} (\pi_1) - \lambda(\pi_3) = 0, \\ (\pi_2) - \mu(\pi_3) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

şi anume:

$$\phi(\lambda, \mu) = 0.$$

Ecuația suprafeței conice căutate rezultă prin eliminarea parametrilor λ şi μ între ecuațiile:

$$\begin{cases}(\pi_1)-\lambda(\pi_3)=0,\\(\pi_2)-\mu(\pi_3)=0,\\\phi(\lambda,\mu)=0.\end{cases}$$

Rezultă în final:

$$(\Sigma):\ \phi\left(\frac{(\pi_1)}{(\pi_3)},\frac{(\pi_2)}{(\pi_3)}\right)=0$$ ❒

3.12.5. Suprafețe conoide

Definiția 3.41. Se numeşte ***conoid cu plan director***, o suprafață riglată ale cărei generatoare sunt paralele cu un plan (π), numit ***plan director*** şi se sprijină pe o dreaptă fixă (d), numită ***axă***.

Se obține că reprezentarea vectorială a unui conoid cu plan director este:

$$(\Sigma):\ \overline{r}=\overline{a}(u)+v\cdot\overline{b}(u),$$

cu:

$$\overline{b}\parallel(\pi)\ \text{şi}\ \left(\overline{a}-\overline{b}\right)\parallel\overline{d},$$

unde $\overline{d}$ este vectorul director al dreptei (d).

Exemplul 3.16. Să se găsească ecuația conoidului (Σ) cu planul director (π) = 0, de axă:

$$(d):\begin{cases}(\pi_1)=0,\\(\pi_2)=0\end{cases}$$

şi a cărui curbă directoare este:

$$(\Gamma):\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

Soluție. Dreptele paralele cu planul (π) şi care intersectează dreapta (d) au ecuațiile de forma:

$$(\Delta_{\lambda\mu}):\begin{cases}(\pi)=\lambda,\\(\pi_1)-\mu(\pi_2)=0.\end{cases}$$

Dreapta $(\Delta_{\lambda\mu})$ este generatoare a suprafeței (Σ) căutate, dacă $(\Delta_{\lambda\mu}) \cap (\Gamma) \neq \emptyset$. Se obține astfel o condiție de compatibilitate prin eliminarea lui x, y, z între cele patru ecuații ale sistemului:

$$\begin{cases} (\pi) = \lambda, \\ (\pi_1) - \mu(\pi_2) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

şi anume:

$$\phi(\lambda, \mu) = 0.$$

Problema a fost astfel redusă la găsirea locului geometric al dreptelor $(\Delta_{\lambda\mu})$, pentru care are loc condiția $\phi(\lambda, \mu) = 0$. Prin eliminarea parametrilor λ şi μ între aceste ecuații se obține ecuația implicită a conoidului cu plan director:

$$(\Sigma):\ \phi\left((\pi), \frac{(\pi_1)}{(\pi_2)}\right) = 0. \qquad \square$$

3.12.6. Suprafețe de rotație

Definiția 3.42. Se numeşte ***suprafață de rotație***, o suprafață generată prin rotirea unei curbe în jurul unei drepte, numită ***axă de rotație***.

Exemplul 3.17. Să se găsească ecuația suprafeței de rotație (Σ) generată prin rotirea curbei (Γ) dată în reprezentare implicită:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

în jurul axei de rotație, de ecuații canonice:

$$(\Delta):\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Soluție. Orice punct $M \in (\Gamma)$ se deplasează într-un plan perpendicular pe axa (Δ), de ecuație generală:

$$(\pi) : lx + my + nz - \lambda = 0$$

şi descrie un cerc cu centrul pe (Δ). Astfel, suprafața de rotație (Σ) poate fi privită ca locul geometric al cercurilor $(\mathscr{C})$ cu centrul pe (Δ), situate în planul (π) şi care se sprijină pe curba (Γ).

Aşadar, ecuațiile cercului sunt:

$$(\mathscr{C}) : \begin{cases} lx + my + nz = \lambda, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \mu^2. \end{cases}$$

Cercul ($\mathscr{C}$) este o generatoare a suprafeței de rotație (Σ) căutate, dacă ($\mathscr{C}$) ∩ (Γ) ≠ ∅. Se obține astfel o condiție de compatibilitate, prin eliminarea lui x, y, z între cele patru ecuații ale sistemului:

$$\begin{cases} lx + my + nz = \lambda, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \mu^2, \\ F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

şi anume:

$$\phi(\lambda, \mu^2) = 0.$$

Problema a fost astfel redusă la găsirea locului geometric al cercurilor ($\mathscr{C}$), pentru care are loc condiția $\phi(\lambda, \mu) = 0$. Prin eliminarea parametrilor λ şi μ^2 între aceste ecuații se obține ecuația implicită a suprafeței de rotație:

$$(\Sigma): \ \phi\big(lx + my + nz, \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\big) = 0 .$$ ❒

Observația 3.41. În situația când axa de rotație este (Oz), iar curba (Γ) este plană şi admite o reprezentare parametrică de forma:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = f(u), \\ y = 0, \\ z = g(u), \end{cases}$$

atunci suprafața de rotație (Σ) are reprezentarea parametrică:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = f(u) \cos v, \\ y = f(u) \sin v, \\ z = g(u). \end{cases}$$

În acest caz F = 0, deci curbele coordonate u = constant, numite ***paralele***, şi v = constant, numite ***meridiane*** sunt ortogonale.

❒

3.12.7. Suprafețe minimale

Definiția 3.43. Se numeşte ***suprafață minimală (minimă)***, o suprafață (Σ) pentru care curbura medie H este egală cu zero în toate punctele sale.

Propoziția 3.10. Dacă (Σ) este o suprafață minimală, atunci curbura sa totală, K, este negativă.

Demonstrație. Deoarece (Σ) este o suprafață minimală, rezultă că:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0,$$

de unde:

$$k_1 = -\,k_2.$$

Curburile principale sunt deci de semne contrare, aşadar:

$$K = k_1\, k_2 < 0.$$ ❐

Teorema 3.31. Dacă există o suprafață de arie minimă, mărginită de o curbă închisă, dată, atunci aceasta este minimală.

Demonstrație. Fie (Γ) o curbă închisă şi (Σ) o suprafață mărginită de (Γ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \ \bar{r} = \bar{r}(u, v),\ \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Dacă (Σ^*) este o altă suprafață mărginită de (Γ) şi obținută din (Σ) printr-o „deplasare mică" ε, în direcția normalei, atunci reprezentarea lui (Σ^*) este:

$$(\Sigma^*):\ \ \bar{r}^* = \bar{r}(u, v) + \varepsilon \cdot \bar{n}(u, v).$$

Au loc relațiile:

$$\bar{r}^*{}'_u = \bar{r}'_u + \varepsilon'_u \cdot \bar{n} + \varepsilon \cdot \bar{n}'_u,\quad \bar{r}^*{}'_v = \bar{r}'_v + \varepsilon'_v \cdot \bar{n} + \varepsilon \cdot \bar{n}'_v.$$

Dacă se presupune că $\varepsilon'_u \to 0$ şi $\varepsilon'_v \to 0$ atunci când $\varepsilon \to 0$ şi dacă se neglijează termenii care conțin ε la puteri mai mari sau egale cu doi, rezultă:

$$E^* = E - 2\,\varepsilon\, L,\qquad F^* = F - 2\,\varepsilon\, M,\qquad G^* = G - 2\,\varepsilon\, N.$$

Se obține atunci:

$$E^*G^* - F^{*2} = EG - F^2 - 2\,\varepsilon(EN + GL - 2\,FM),$$

de unde se deduce:

$$\sqrt{E^*G^* - F^{*2}} = \sqrt{EG - F^2}\left(1 - 2\,\varepsilon\,\frac{EN + GL - 2\,FM}{EG - F^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dacă se ține seama de definiția curburii medii H, se poate scrie:

$$\sqrt{E^*G^* - F^{*2}} = \sqrt{EG - F^2}\,(1 - 2\,\varepsilon\,H)^{\frac{1}{2}}$$

şi prin dezvoltarea binomului $(1 - 2\,\varepsilon\,H)^{\frac{1}{2}}$ după formula lui Taylor în jurul lui ε = 0, în care se păstrează doar termenii de gradul întâi în ε, se obține:

$$\sqrt{E^*G^* - F^{*2}} = \sqrt{EG - F^2}\,(1 - 2\,\varepsilon\,H).$$

Ariile suprafețelor (Σ) şi (Σ*) sunt:

$$\mathscr{A}_{(\Sigma)} = \iint\limits_{(\Sigma)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \qquad \mathscr{A}_{(\Sigma^*)} = \iint\limits_{(\Sigma^*)} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}}\,du\,dv$$

şi dacă se ține cont de egalitatea precedentă, rezultă:

$$\mathscr{A}_{(\Sigma^*)} = \mathscr{A}_{(\Sigma)} - 2\,\varepsilon \iint\limits_{(\Sigma)} \sqrt{EG - F^2}\,H\,du\,dv\,.$$

Dacă (Σ) este staționară, atunci în egalitatea precedentă termenul în ε nu există, deci are loc:

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \sqrt{EG - F^2}\,H\,du\,dv = 0$$

şi cum $\sqrt{EG - F^2} > 0$, rezultă H = 0. ❒

Observația 3.42. Noțiunea de punct staționar este în esență cea clasică: dacă se consideră funcția $f(\Sigma) = \mathscr{A}$, suprafața (Σ) este staționară dacă:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\Sigma^*) - f(\Sigma)}{\varepsilon} = 0,$$

unde expresia din primul membru este analoagă cu definiția derivatei unei funcții într-un punct.

3.12.8. Suprafețe de curbură totală constantă

Definiția 3.44. Suprafața (Σ) pentru care curbura totală K este aceeaşi în orice punct M al suprafeței (Σ) se numeşte ***suprafață de curbură totală constantă***.

Exemplul 3.18. Sfera este o suprafață de curbură totală constantă pozitivă, adică sfera este o suprafață de curbură totală constantă de tip eliptic.

Soluție: Pentru sfera (Σ), cu centrul în origine şi de rază R, dată în reprezentarea parametrică:

$$(\Sigma):\begin{cases} x = R\cos u\cos v,\\ y = R\cos u\sin v,\\ z = R\sin u, \qquad (u,v)\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\times(0,2\pi),\end{cases}$$

coeficienții celor două forme fundamentale sunt proporționali:

$$E = R^2,\quad F = 0,\quad G = R^2\cos^2 u,\quad L = R,\quad M = 0,\quad N = R\cos^2 u,$$

deci:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{R},$$

unde R este raza sferei.

Atunci curburile principale k_1, k_2 sunt soluțiile ecuației:

$$\begin{vmatrix} R^2k - R & 0\\ 0 & R^2k\cos^2 u - R\cos^2 u\end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$R^2\cos^2 u\,(Rk-1)^2 = 0,$$

aşadar:

$$k_1 = k_2 = +\frac{1}{R},$$

de unde:

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{R^2} > 0.$$

Deci, curbura totală a sferei este constantă şi pozitivă. ❒

Exemplul 3.19. Pseudosfera (Σ) dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma):\begin{cases} x = R\sin u\cos v,\\ y = R\sin u\sin v,\\ z = R\left[\cos u + \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right)\right], \qquad (u,v)\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\times(0,2\pi),\end{cases}$$

este o suprafață de curbură totală constantă negativă.

Soluție: Într-un punct oarecare al pseudosferei au loc relațiile:

$$E = R^2 \operatorname{ctg}^2 u,\quad F = 0,\quad G = R^2 \sin^2 u,\quad L = -R \operatorname{ctg} u,\quad M = 0,\quad N = R \operatorname{ctg} u \sin^2 u.$$

Ecuația curburilor principale este:

$$\begin{vmatrix} R^2 \dfrac{\cos^2 u}{\sin^2 u} k + R \dfrac{\cos u}{\sin u} & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u\, k - R \sin u \cos u \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$R^2 \cos u \left(R + \frac{\cos u}{\sin u} k + 1 \right) (R \sin u\, k - \cos u) = 0,$$

de unde se obțin curburile principale:

$$k_1 = -\frac{1}{R} \frac{\sin u}{\cos u} \quad \text{şi} \quad k_2 = \frac{1}{R} \frac{\cos u}{\sin u}.$$

Rezultă pentru curbura totală expresia:

$$K = k_1 \cdot k_2.$$

Aşadar se obține:

$$K = -\frac{1}{R^2} < 0.$$ ❐

Observația 3.43. Prin rotirea în jurul axei (Oz) a curbei plane (Γ), dată în reprezentarea parametrică:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = R \sin u, \\ y = 0, \\ z = R\left[\cos u + \ln\left(\operatorname{tg} \dfrac{u}{2} \right) \right], \qquad u \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi \right), \end{cases}$$

numită ***tractrice*** se obține suprafața dată de ecuațiile parametrice din exemplul 3.19 şi numită pseudosferă (observația 3.41) (fig. 3.12).

Lungimea segmentului de tangentă la tractrice dintre punctul de tangență şi asimptota (Oz), are mărime constantă, egală cu constanta R, de aici vine numele de pseudosferă (MN = R) (fig. 3.12).

Exemplul 3.20. Suprafețele desfăşurabile sunt suprafețe de curbură totală nulă (§3.12.2). În particular, planul are curbura totală nulă.

Definiția 3.45. Se numeşte ***geometrie intrinsecă a unei suprafețe***, totalitatea noțiunilor şi proprietăților definite cu ajutorul primei forme fundamentale a respectivei suprafețe.

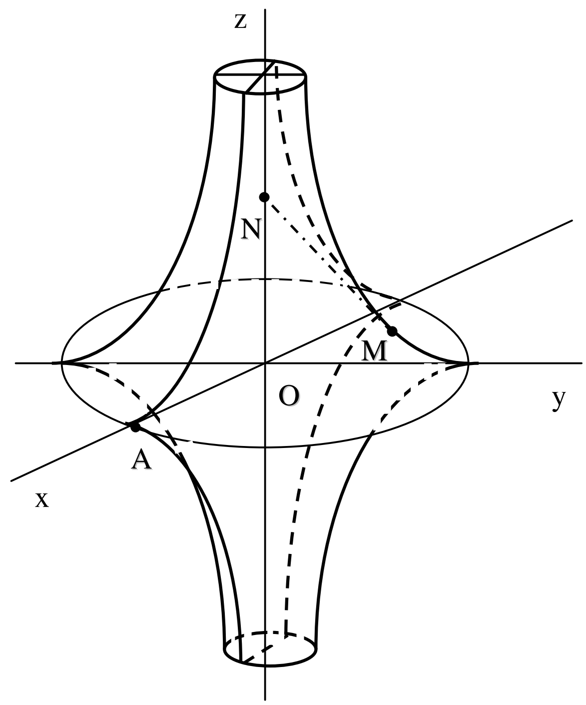


Fig. 3.12.

3.12.9. Suprafețe Țițeica

Definiția 3.46. Se numeşte ***suprafață Țițeica***, o suprafață pentru care $\frac{K}{d^n} = \text{constant}$, unde d este distanța de la un punct fix, de exemplu originea reperului, la planul tangent la suprafață, iar K este curbura totală.

3.12.10. Suprafețe elicoidale

Definiția 3.47. Se numeşte ***suprafață elicoidală***, o suprafață generată de o curbă ce execută o mişcare obținută din compunerea unei rotații în jurul unei axe cu o translație paralelă cu axa respectivă - direct proporțională cu unghiul de rotație.

Din această definiție şi din parametrizarea unei suprafețe de rotație (observația 3.41), rezultă următoarea parametrizare pentru o suprafață elicoidală:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = f(u)\cos v\,\bar{i} + f(u)\sin v\,\bar{j} + [g(u) + c \cdot v]\bar{k}, \quad (u, v) \in I \times [0, 2\pi).$$

Dacă se particularizează curba generatoare - într-o dreaptă - chiar (Ox) într-o poziție inițială - se va lua:

$$f(u) = u \text{ şi } g(u) = 0,$$

se obține ***elicoidul drept cu plan director***, o suprafață cu aplicații fizice, a cărei reprezentare vectorială este:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + c\cdot v\,\bar{k}.$$

Curbele coordonate sunt:

$$(\Gamma_u):\ \bar{r}(u, v_0) = c\,v_0\,\bar{k} + u(\cos v_0\,\bar{i} + \sin v_0\,\bar{j}),$$

care este reprezentarea vectorială a unei drepte, dusă prin $M_0(u_0, v_0)$, paralelă cu planul (xOy).

$$(\Gamma_v):\ \bar{r}(u_0, v) = u_0\cos v\,\bar{i} + u_0\sin v\,\bar{j} + c\,v\,\bar{k},$$

care este reprezentarea vectorială a unei elice.

Deoarece această suprafață conține drepte paralele cu un plan fix (plan director) şi elice, se justifică denumirea acestei suprafețe.

Evident, elicoidul drept cu plan director este şi o suprafață riglată.

§3.13. Invarianți pe o suprafață

Se consideră o suprafață (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v),\ (u, v)\in(u_1, u_2)\times(v_1, v_2).$$

Se spune că funcția $\phi(u, v)$ de argumentele u şi v, este un ***invariant pe suprafața* (Σ) *față de transformarea de coordonate curbilinii***:

$$\begin{cases} u^* = u^*(u, v), \\ v^* = v^*(u, v), \end{cases}$$

dacă :

$$\phi(u, v) = \phi(u^*, v^*).$$

Definiția 3.48. Se consideră o suprafață (Σ), dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v),\ (u, v)\in(u_1, u_2)\times(v_1, v_2). \end{cases}$$

Se spune că funcția $\phi(x, y, z)$, de argumentele x, y şi z, este un ***invariant pe suprafața* (Σ) *față de transformarea de coordonate carteziene ortogonale***:

$$\begin{cases} x^* = x^*\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big), \\ y^* = y^*\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big), \\ z^* = z^*\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big), \end{cases}$$

dacă:

$$\phi(x, y, z) = \phi(x^*, y^*, z^*).$$

Propoziția 3.11. Se consideră o suprafață regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Vectorul normal la suprafață, $\bar{n}$, este, abstracție făcând de semn, un invariant pe suprafața (Σ) față de transformarea de coordonate curbilinii:

$$\begin{cases} u^* = u^*(u, v), \\ v^* = v^*(u, v). \end{cases}$$

Demonstrație. Fie reprezentarea vectorială a suprafeței (Σ) în coordonatele curbilinii u^* şi v^*:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}^*(u^*, v^*), \ (u^*, v^*) \in (u_1^*, u_2^*) \times (v_1^*, v_2^*).$$

Dacă se aplică regula de derivare a funcțiilor compuse se obține:

$$\bar{r}^*{}'_{u^*} = \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial u^*}, \qquad \bar{r}^*{}'_{v^*} = \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial v^*}.$$

Fie $\bar{n} = \dfrac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \|}$ versorul normal la suprafața (Σ), în coordonatele u şi v.

Se notează cu $\bar{n}^*$, versorul normal la suprafața (Σ) în coordonatele u^* şi v^*.
Au loc egalitățile:

$$\bar{n}^* = \frac{\bar{r}^*{}'_{u^*} \times \bar{r}^*{}'_{v^*}}{\| \bar{r}^*{}'_{u^*} \times \bar{r}^*{}'_{v^*} \|} = \frac{\left(\bar{r}'_u \dfrac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{r}'_v \dfrac{\partial v}{\partial u^*}\right) \times \left(\bar{r}'_u \dfrac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_v \dfrac{\partial v}{\partial v^*}\right)}{\left\| \left(\bar{r}'_u \dfrac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{r}'_v \dfrac{\partial v}{\partial u^*}\right) \times \left(\bar{r}'_u \dfrac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_v \dfrac{\partial v}{\partial v^*}\right) \right\|} =$$

$$= \frac{\left(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial v^*} - \dfrac{\partial u}{\partial v^*} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial u^*}\right)}{\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \| \cdot \left| \left(\dfrac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial v^*} - \dfrac{\partial u}{\partial v^*} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial u^*}\right) \right|} = \pm 1 \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{\| \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \|} = \pm 1 \cdot \bar{n}.$$

❐

Propoziția 3.12. Se consideră suprafața regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = \bar{r}(u, v), \ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2).$$

Prima formă fundamentală a suprafeței (Σ), este un invariant față de transformarea de coordonate curbilinii:

$$\begin{cases} u^* = u^*(u, v), \\ v^* = v^*(u, v). \end{cases}$$

Demonstrație. Prima formă fundamentală a suprafeței (Σ), în coordonatele u și v este:

$$\Phi_1 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = \left(\bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv\right)^2.$$

Se notează cu $\Phi_1^* = E^*\,du^{*2} + 2\,F^*\,du^*\,dv^* + G^*\,dv^{*2}$, prima formă fundamentală a suprafeței (Σ), în coordonatele u^* și v^* și dacă se aplică regula de derivare a funcțiilor compuse, se obține:

$$\Phi_1^* = E^*\,du^{*2} + 2\,F^*\,du^*\,dv^* + G^*\,dv^{*2} = \left(\bar{r}'^*_{u^*}\,du^* + \bar{r}'^*_{v^*}\,dv^*\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\bar{r}'_u\,\frac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{r}'_v\,\frac{\partial v}{\partial u^*}\right)du^* + \left(\bar{r}'_u\,\frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_v\,\frac{\partial v}{\partial v^*}\right)dv^*\right]^2 =$$

$$= \left[\bar{r}'_u\left(\frac{\partial u}{\partial u^*}\,du^* + \frac{\partial u}{\partial v^*}\,dv^*\right) + \bar{r}'_v\left(\frac{\partial v}{\partial u^*}\,du^* + \frac{\partial v}{\partial v^*}\,dv^*\right)\right]^2 = \left(\bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv\right)^2 =$$

$$= E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = \Phi_1.$$

❒

Observația 3.44. Coeficienții E, F, G, ai primei forme fundamentale a suprafeței (Σ) nu sunt invarianți față de transformările de coordonate curbilinii.

Demonstrație. Într-adevăr, din demonstrația propoziției 3.11 se deduce că:

$$E^* = \bar{r}^{*\prime\,2}_{u^*} = \left(\bar{r}'_u\,\frac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{r}'_v\,\frac{\partial v}{\partial u^*}\right)^2 = \bar{r}'^{\,2}_u\left(\frac{\partial u}{\partial u^*}\right)^2 + 2\,\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v\,\frac{\partial u}{\partial u^*}\,\frac{\partial v}{\partial v^*} + \bar{r}'^{\,2}_v\left(\frac{\partial v}{\partial u^*}\right)^2 =$$

$$= E\left(\frac{\partial u}{\partial u^*}\right)^2 + 2\,F\,\frac{\partial u}{\partial u^*}\,\frac{\partial v}{\partial v^*} + G\left(\frac{\partial v}{\partial u^*}\right)^2.$$

$$F^* = \bar{r}^{*\prime}_{u^*}\cdot\bar{r}^{*\prime}_{v^*} = \left(\bar{r}'_u\,\frac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{r}'_v\,\frac{\partial v}{\partial u^*}\right)\cdot\left(\bar{r}'_u\,\frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_v\,\frac{\partial v}{\partial v^*}\right) =$$

$$= \bar{r}'^{\,2}_u\,\frac{\partial u}{\partial u^*}\,\frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_u\,\bar{r}'_v\left(\frac{\partial u}{\partial u^*}\,\frac{\partial v}{\partial v^*} + \frac{\partial u}{\partial v^*}\,\frac{\partial v}{\partial u^*}\right) + \bar{r}'^{\,2}_v\,\frac{\partial v}{\partial u^*}\,\frac{\partial v}{\partial v^*} =$$

$$= E\,\frac{\partial u}{\partial u^*}\,\frac{\partial u}{\partial v^*} + F\left(\frac{\partial u}{\partial u^*}\,\frac{\partial v}{\partial v^*} + \frac{\partial u}{\partial v^*}\,\frac{\partial v}{\partial u^*}\right) + G\,\frac{\partial v}{\partial u^*}\,\frac{\partial v}{\partial v^*}.$$

$$G^* = \bar{r}^{*}{}'^{\,2}_{v^*} = \left(\bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial v^*}\right)^2 = \bar{r}'^{\,2}_u \left(\frac{\partial u}{\partial v^*}\right)^2 + 2\,\bar{r}'_u\,\bar{r}'_v \frac{\partial u}{\partial v^*}\frac{\partial v}{\partial v^*} + \bar{r}'^{\,2}_v \left(\frac{\partial v}{\partial v^*}\right)^2 =$$

$$= E\left(\frac{\partial u}{\partial v^*}\right)^2 + 2\,F \frac{\partial u}{\partial v^*}\frac{\partial v}{\partial v^*} + G\left(\frac{\partial v}{\partial v^*}\right)^2 .$$ ❒

Propoziția 3.13. Se consideră suprafața regulată (Σ), dată în reprezentare vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = \bar{r}\,(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2)\,.$$

Abstracție făcând de semn, forma a doua fundamentală a suprafeței (Σ), este un invariant față de transformarea de coordonate curbilinii:

$$\begin{cases} u = u(u^*, v^*), \\ v = v(u^*, v^*). \end{cases}$$

Demonstrație. Deoarece $\bar{n}$, versorul normal la suprafață este ortogonal pe vectorii $\bar{r}'_u$, $\bar{r}'_v$, rezultă că:

$$\begin{cases} \bar{n} \cdot \bar{r}'_u = 0, \\ \bar{n} \cdot \bar{r}'_v = 0. \end{cases}$$

Prin derivare a acestor egalități în raport cu u şi v se obține:

$$\begin{cases} \bar{n}'_u \cdot \bar{r}'_u + \bar{n} \cdot \bar{r}''_{uu} = 0, \\ \bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_u + \bar{n} \cdot \bar{r}''_{uv} = 0, \\ \bar{n}'_u \cdot \bar{r}'_v + \bar{n} \cdot \bar{r}''_{uv} = 0, \\ \bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_v + \bar{n} \cdot \bar{r}''_{vv} = 0. \end{cases}$$

Pe de altă parte, au loc relațiile:

$$L = \bar{n} \cdot \bar{r}''_{uu}\,, \qquad M = \bar{n} \cdot \bar{r}''_{uv}\,, \qquad N = \bar{n} \cdot \bar{r}''_{vv}\,.$$

Se obține:

$$L = -\bar{n}'_u \cdot \bar{r}'_u\,, \quad M = -\bar{n}'_u \cdot \bar{r}'_v = -\bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_u\,, \quad N = -\bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_v\,.$$

Se notează cu $\bar{n}^*$, versorul normal la suprafața (Σ) în coordonatele u^* şi v^*.
În mod analog rezultă:

$$L^* = -\bar{n}^{*}{}'_{u^*} \cdot \bar{r}^{*}{}'_{u^*}\,, \qquad M^* = -\bar{n}^{*}{}'_{u^*} \cdot \bar{r}^{*}{}'_{v^*} = -\bar{n}^{*}{}'_{v^*} \cdot \bar{r}^{*}{}'_{u^*}\,, \qquad N^* = -\bar{n}^{*}{}'_{v^*} \cdot \bar{r}^{*}{}'_{v^*}\,,$$

unde L^*, M^* şi N^* sunt coeficienții celei de-a doua forme fundamentale a suprafeței (Σ), obținuți în urma transformării de coordonate curbilinii.

Dar:

$$\bar{n}^* = \pm 1 \cdot \bar{n},$$

aşadar:

$$\bar{n}^{*\prime}_{u^*} = \pm 1\left(\bar{n}'_u \frac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{n}'_v \frac{\partial v}{\partial u^*}\right), \quad \bar{n}^{*\prime}_{v^*} = \pm 1\left(\bar{n}'_u \frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{n}'_v \frac{\partial v}{\partial v^*}\right),$$

iar:

$$\bar{r}^{*\prime}_{u^*} = \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial u^*}, \qquad \bar{r}^{*\prime}_{v^*} = \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial v^*}.$$

Prin înlocuirea vectorilor $\bar{n}^{*\prime}_{u^*}$, $\bar{n}^{*\prime}_{v^*}$, $\bar{r}^{*\prime}_{u^*}$, $\bar{r}^{*\prime}_{v^*}$, rezultă că L^*, M^* şi N^* devin:

$$L^* = \pm 1 \cdot \left[-\left(\bar{n}'_u \frac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{n}'_v \frac{\partial v}{\partial u^*}\right) \cdot \left(\bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial u^*}\right)\right] = \pm 1 \cdot \left[-\bar{n}'_u \cdot \bar{r}'_u \left(\frac{\partial u}{\partial u^*}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial u^*} - \bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_v \left(\frac{\partial v}{\partial u^*}\right)^2\right] = \pm 1 \cdot \left[L\left(\frac{\partial u}{\partial u^*}\right)^2 + 2M \cdot \frac{\partial u}{\partial u^*} \frac{\partial v}{\partial u^*} + N\left(\frac{\partial v}{\partial u^*}\right)^2\right],$$

$$M^* = \pm 1 \cdot \left[-\left(\bar{n}'_u \frac{\partial u}{\partial u^*} + \bar{n}'_v \frac{\partial v}{\partial u^*}\right) \cdot \left(\bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial v^*}\right)\right] =$$

$$= \pm 1 \cdot \left[-\bar{n}'_u \cdot \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} - \bar{n}'_u \cdot \bar{r}'_v \frac{\partial u}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*} - \bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial u^*} - \bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial u^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*}\right] =$$

$$= \pm 1 \cdot \left[L \cdot \frac{\partial u}{\partial u^*} \frac{\partial u}{\partial v^*} + M \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial u^*} \frac{\partial v}{\partial v^*} + \frac{\partial u}{\partial v^*} \frac{\partial v}{\partial u^*}\right) + N \cdot \frac{\partial v}{\partial u^*} \frac{\partial v}{\partial v^*}\right],$$

$$N^* = \pm 1 \cdot \left[-\left(\bar{n}'_u \frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{n}'_v \frac{\partial v}{\partial v^*}\right) \cdot \left(\bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial v^*} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial v^*}\right)\right] = \pm 1 \cdot \left[-\bar{n}'_u \cdot \bar{r}'_u \left(\frac{\partial u}{\partial v^*}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\bar{n}'_u \cdot \bar{r}'_v \frac{\partial u}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*} - \bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial v^*} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^*} - \bar{n}'_v \cdot \bar{r}'_v \left(\frac{\partial v}{\partial v^*}\right)^2\right] =$$

$$= \pm 1 \cdot \left[L\left(\frac{\partial u}{\partial v^*}\right)^2 + 2M \cdot \frac{\partial u}{\partial v^*} \frac{\partial v}{\partial v^*} + N\left(\frac{\partial v}{\partial v^*}\right)^2\right].$$

Dar:

$$du = \frac{\partial u}{\partial u^*} du^* + \frac{\partial u}{\partial v^*} dv^*, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial u^*} du^* + \frac{\partial v}{\partial v^*} dv^*.$$

A doua formă fundamentală a suprafeței (Σ), în coordonatele u şi v este:

$$\Phi_2 = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Se notează cu $\Phi_2^* = L^*\,(du^*)^2 + 2\,M^*\,du^*\,dv^* + N^*\,(dv^{*2})$, a doua formă fundamentală a suprafeței (Σ), în coordonatele u^* şi v^*. Cu ajutorul rezultatelor de mai sus, se obține:

$$\Phi_2^* = \pm 1 \left\{ \left[L\left(\frac{\partial u}{\partial u^*}\right)^2 + 2\,M\,\frac{\partial u}{\partial u^*}\,\frac{\partial v}{\partial u^*} + N\left(\frac{\partial v}{\partial u^*}\right)^2 \right] (du^*)^2 + \right.$$
$$+ 2\left[L\,\frac{\partial u}{\partial u^*}\,\frac{\partial u}{\partial v^*} + M\left(\frac{\partial u}{\partial u^*}\,\frac{\partial v}{\partial v^*} + \frac{\partial u}{\partial v^*}\,\frac{\partial v}{\partial u^*}\right) + N\,\frac{\partial v}{\partial u^*}\,\frac{\partial v}{\partial v^*} \right] du^*\,dv^* +$$
$$\left. + \left[L\left(\frac{\partial u}{\partial v^*}\right)^2 + 2\,M\,\frac{\partial u}{\partial v^*}\,\frac{\partial v}{\partial v^*} + N\left(\frac{\partial v}{\partial v^*}\right)^2 \right] (dv^*)^2 \right\} = \pm 1\,(L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + G\,dv^2) = \pm\,\Phi_2.$$

❒

Consecința 3.2. Pe o suprafață regulată (Σ), curbura normală $\frac{1}{\rho_n}$, curburile principale k_1, k_2, curbura totală K şi curbura medie H, abstracție făcând de semn, sunt invarianți față de transformarea de coordonate curbilinii:

$$\begin{cases} u^* = u^*(u, v), \\ v^* = v^*(u, v). \end{cases}$$

Demonstrație. Are loc formula:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

Deoarece Φ_1 este un invariant față de transformarea de coordonate curbilinii, iar Φ_2 este şi ea, abstracție făcând de semn, un invariant față de aceeaşi transformare, rezultă că $\frac{1}{\rho_n}$ este, abstracție făcând de semn, un invariant față de transformarea de coordonate curbilinii.

Prin definiție k_1 şi k_2 sunt extremele funcției $k(m) = \frac{L\,m^2 + 2\,M\,m + N}{E\,m^2 + 2\,F\,m + G} = \frac{1}{\rho_n}$, cu $m = \frac{du}{dv}$. Cum $\frac{1}{\rho_n}$ este, abstracție făcând de semn, un invariant față de transformarea de coordonate curbilinii, rezultă că şi k_1 şi k_2 sunt, abstracție făcând de semn, invarianți față de aceeaşi transformare.

De aici se obține că şi $K = k_1 + k_2$ şi $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ sunt, abstracție făcând de semn, invarianți față de transformările de coordonate curbilinii. ❒

Teorema 3.32. Se consideră suprafața regulată (Σ), dată în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v),\ (u, v) \in (u_1, u_2) \times (v_1, v_2). \end{cases}$$

Versorul $\bar{n}$, prima formă fundamentală Φ_1, a doua formă fundamentală Φ_2, curbura normală $\frac{1}{\rho_n}$, curburile principale k_1 şi k_2, curbura totală K şi curbura medie H sunt invarianți față de transformarea de coordonate carteziene ortogonale:

$$\begin{cases} x = x\left[x^*\left(x(u, v), y^*(u, v), z^*(u, v)\right)\right], \\ y = y\left[x^*\left(x(u, v), y^*(u, v), z^*(u, v)\right)\right], \\ z = z\left[x^*\left(x(u, v), y^*(u, v), z^*(u, v)\right)\right]. \end{cases} \tag{3.12}$$

Demonstrație. Fie x, y, z, $\bar{r}$ coordonatele carteziene şi vectorul de poziție ale unui punct curent M ∈ (Σ) față de sistemul de axe (Oxyz) şi fie x^*, y^*, z^*, $\bar{r}^*$ coordonatele carteziene şi vectorul de poziție ale aceluiaşi punct față de sistemul de axe ($O^*x^*y^*z^*$).

Transformarea (3.12) de coordonate carteziene ortogonale este echivalentă cu transformarea:

$$\bar{r} = \overline{OO^*} + \bar{r}^*, \tag{3.13}$$

unde $\overline{OO^*}$ este vector fix.

Versorul $\bar{n}$, prima formă fundamentală Φ_1, a doua formă fundamentală Φ_2, curbura normală $\frac{1}{\rho_n}$, curburile principale k_1 şi k_2, curbura totală K şi curbura medie H sunt funcții de diferențialele de ordinul întâi şi doi şi de derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi ale vectorului $\bar{r}$.

Prin diferențierea şi derivarea ecuației vectoriale (3.13), se obține:

$$d\bar{r} = d\bar{r}^*,\quad d^2\bar{r} = d^2\bar{r}^*,$$

$$\bar{r}'_u = \bar{r}^{*\prime}_u,\ \ \bar{r}'_v = \bar{r}^{*\prime}_v,$$

$$\bar{r}''_{uu} = \bar{r}^{*\prime\prime}_{uu},\qquad \bar{r}''_{uv} = \bar{r}^{*\prime\prime}_{uv},\qquad \bar{r}''_{vv} = \bar{r}^{*\prime\prime}_{vv}.$$

Rezultă că diferențialele şi derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi sunt invarianți față de transformarea (3.12), deci $\bar{n}$, Φ_1, Φ_2, $\frac{1}{\rho_n}$, k_1 şi k_2, K şi H sunt invarianți față de transformările de coordonate carteziene ortogonale (3.12).

❐

§3.14. Probleme propuse

1. Se dă suprafața de ecuații parametrice:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \\ z = uv. \end{cases}$$

Se cere:
a) să se afle coordonatele punctelor:

$$A(u = 8,\ v = 1),\quad B(u = 1,\ v = 0);$$

b) să se verifice dacă punctele $C(4;\ 2;\ 3)$, $D(1;\ 7;\ -8)$ aparțin suprafeței;
c) să se afle ecuația carteziană a suprafeței.

2. Să se determine ecuația carteziană a suprafeței a cărei ecuație vectorială este:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = u^2 \cdot \bar{i} + uv \cdot \bar{j} + (au + v^2) \cdot \bar{k}.$$

3. Se dă suprafața:

$$(\Sigma):\ x = R\cos u \cos v,\quad y = R\cos u \sin v,\quad z = R\sin u.$$

Se cere:
a) să se arate că suprafața este o sferă cu centrul în originea axelor de coordonate şi rază R;
b) să se afle natura curbelor u = constant, v = constant;
c) să se afle semnificația geometrică a parametrilor u, v.

4. Se dă suprafața de reprezentare parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = u^2 + v + 1, \\ y = u^2 - v + 1, \\ z = uv + 2 \end{cases}$$

şi fie punctul $M(u = 1,\ v = -1)$ pe suprafață.
Să se scrie ecuațiile carteziene ale curbelor u = constant şi v = constant care trec prin punctul M.

5. Fie dată suprafața în reprezentare parametrică:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u^2 - v^2, \\ z = uv. \end{cases}$$

Se cere:
a) să se scrie prima formă fundamentală a suprafeței;
b) să se calculeze elementul de arc pentru curbele u = 2, v = 1, v = au;
c) să se calculeze lungimea arcului curbei u = au, cuprins între intersecțiile curbei u = au cu u = 1 şi u = 2.

6. Se dă suprafața de ecuații parametrice:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = 2(u+v), \\ y = u^2 + v^2, \\ z = \dfrac{1}{3}(u^3 + v^3). \end{cases}$$

Se cere să se calculeze:
a) lungimea arcului curbei u = 1, cuprins între curbele v = 1, v = 2;
b) unghiul curbelor u = 2 şi v = −1;
c) elementul de arie al suprafeței.

7. Să se calculeze unghiul curbelor v = u + 1 şi v = 3 – u de pe suprafața de rotație:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + u^2\,\bar{k}.$$

8. Fie $ds^2 = du^2 + dv^2$, prima formă fundamentală a unei suprafețe. Să se determine unghiul sub care se intersectează curbele u = 2 u şi v = −2 u.

9. Să se calculeze între punctele $M_1(1; 2)$ şi $M_2(2; 3)$ lungimea arcului de curbă v = u + 1, situat pe suprafața de rotație:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + \frac{2}{3}u\sqrt{u}\,\bar{k}.$$

10. Fie punctele $M_1(2; 6)$, $M_2(-1; 3)$ şi $M_3(0; 2)$, situate pe suprafața de rotație:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + \frac{2}{3}u\sqrt{u}\,\bar{k}.$$

Să se calculeze unghiurile triunghiului curbiliniu $M_1M_2M_3$, dacă se ştie că $\overset{\frown}{M_1M_2}$ este un arc al curbei v = u + 4, $\overset{\frown}{M_2M_3}$ este arcul curbei v = −u + 2 şi $\overset{\frown}{M_3M_1}$ arcul curbei $v = u^2 + 2$.

11. Pe conul de rotație:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = u\cos v\,\bar{i} + u\sin v\,\bar{j} + u\,\bar{k},$$

se consideră familia de curbe $v = u^2 + \alpha$, unde α este un parametru. Să se determine curbele ortogonale acestei familii.

12. Se consideră suprafața de ecuație explicită:

$$(\Sigma): \ z = x^3 + y^3.$$

Se cere:
a) să se scrie ecuația planului tangent şi ecuațiile normalei în punctul M(1, 2, 9);
b) să se arate că toate planele tangente duse la suprafață în punctele $(\alpha, -\alpha, 0)$ formează un fascicul de plane.

13. Să se determine punctele de pe suprafața de reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = u^2 \cdot \bar{i} + uv \cdot \bar{j} + (v^2 + 2\,u) \cdot \bar{k},$$

ale căror plane tangente trec prin dreapta de ecuații:

$$(\Gamma): \ \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{14}.$$

14. Să se analizeze natura punctelor suprafeței de reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = u \cos v \cdot \bar{i} + u \sin v \cdot \bar{j} + \left(\frac{u^2}{2} - 5\,u + 6 \ln u + 7 \right) \cdot \bar{k}.$$

15. Să se determine curburile principale în punctul M(1, 1, 1) ale suprafeței de ecuație explicită:

$$(\Sigma): \ z = xy.$$

16. Să se determine vectorii directori ai tangentelor principale la suprafața de reprezentare vectorială:

$$(\Sigma): \ \bar{r} = u^2 \cdot \bar{i} + v^2 \cdot \bar{j} + (u + v) \cdot \bar{k}.$$

17. Se consideră suprafața (Σ) de ecuații parametrice:

$$(\Sigma): \ \begin{cases} x = u^2 + 2\,v, \\ y = u^2 - 2\,v, \\ z = uv. \end{cases}$$

Fie punctul M(u = 1, v = 2) pe suprafață şi curba:

$$(\Gamma): \ v = 2\,u^3,$$

care trece prin punctul M.

Să se calculeze curbura secțiunii normale prin planul determinat de normala în M la suprafață şi tangenta (T) în punctul M la curba (Γ).

18. Se consideră suprafața (Σ) de ecuații parametrice:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u^2 - v^2, \\ z = uv \end{cases}$$

şi fie punctul P(u = 1, v = 1) pe suprafață.
Să se calculeze curbura totală şi curbura medie a suprafeței în punctul P.

19. Să se demonstreze că toate punctele suprafeței:

$$(\Sigma):\ x + y - z^3 = 0,$$

sunt parabolice.

20. Să se determine curburile principale în punctul M(1, 1, 1) de pe suprafața de ecuație explicită:

$$(\Sigma):\ z = xy.$$

21. Să se determine vectorii directori ai tangentelor principale la suprafața de ecuație vectorială:

$$(\Sigma):\ \bar{r} = u^2\,\bar{i} + v^2\,\bar{j} + (u + v)\,\bar{k}\,.$$

22. Să se arate că suprafața de ecuații parametrice:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = \lambda u, \end{cases}$$

este desfăşurabilă.

23. Se dă suprafața (Σ) de ecuații parametrice:

$$(\Sigma):\ \begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u^2 - v^2, \\ z = \lambda v. \end{cases}$$

Să se arate că liniile ei de curbură sunt familiile de curbe u = constant şi v = constant şi cele două familii sunt ortogonale.

24. Să se determine liniile de curbură ale paraboloidului de ecuație explicită:

$$(\Sigma):\ z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\,.$$

25. Să se afle liniile asimptotice ale suprafeței de ecuații parametrice:

$$(\Sigma): \begin{cases} x = u, \\ y = uv, \\ z = v + \ln u. \end{cases}$$

26. Să se arate că liniile asimptotice ale paraboloidului hiperbolic:

$$(\Sigma): \ z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

sunt chiar familiile de generatoare rectilinii ale suprafeței.

27. Să se determine liniile geodezice ale unui cilindru oarecare şi să se demonstreze că ele sunt elice.

28. Să se determine liniile geodezice ale unui plan.

Bibliografie

1. **Atanasiu, Gh.,** *Curs de geometrie diferențială,* Universitatea din Braşov, 1979.
2. **Atanasiu, Gh.; Munteanu, Gh.,** *Curs de algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferențială şi ecuații diferențiale, (Partea I)*, Universitatea „Transilvania" din Braşov, 1992.
3. **Atanasiu, Gh.; Munteanu, Gh.; Păun, M.,** *Curs de algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferențială şi ecuații diferențiale, (Partea a II-a)*, Universitatea „Transilvania" din Braşov, 1993.
4. **Atanasiu, Gh.; Munteanu, Gh.; Postolache, M.,** *Algebră liniară. Geometrie analitică şi diferențială. Ecuații diferențiale - Culegere de probleme,* Ed. All, Bucureşti, 1994, 1998.
5. **Atanasiu, Gh.; Tatomir, E.; Purcaru, M.; Târnoveanu, M.; Manea, A.L.,** *Geometrie diferențială şi analiză matematică – culegere de probleme*, Reprografia Universității „Transilvania" din Braşov, 2000.
6. **Atanasiu, Gh. şi colectiv,** *Culegere de probleme de algebră liniară, geometrie analitică, diferențială şi ecuații diferențiale,* Universitatea din Braşov, 1984, 1993.
7. **Barbu, V.,** *Ecuații diferențiale*, Ed. Junimea, 1985.
8. **Bălan, V.,** *Algebră liniară. Geometrie analitică,* Ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.
9. **Berger, M.; Gostiaux, B.,** *Géometrie différentielle,* Armand Colin, Paris, 1972.
10. **Bianchi, L.,** *Lezioni di geometria diferenziale,* Bologna, 1927.
11. **Dobrescu, A.,** *Curs de geometrie diferențială,* E.D.P., Bucureşti, 1961, 1963.
12. **Favard, J.,** *Cours de géométrie différentielle,* Gauthier-Villars, Paris, 1957.
13. **Finikov, S.P.,** *Curs de geometrie diferențială.* (Traducere din limba rusă), Ed. Tehnică, Bucureşti, 1954.
14. **Gheorghiev, Gh.; Miron, R.; Papuc, D.,** *Geometrie analitică şi diferențială,* Vol. I, II, E.D.P., Bucureşti, 1968-1969.
15. **Gheorghiu, Gh.Th.,** *Geometrie diferențială,* E.D.P., Bucureşti, 1964.
16. **Gheorghiu, Gh.Th.,** *Algebră liniară, geometrie analitică, diferențială şi programare,* E.D.P., Bucureşti, 1977.
17. **Grecu, E.,** *Geometrie diferențială,* Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 1997.
18. **Ianuş, S.,** *Curs de geometrie diferențială,* Litografia Universității Bucureşti, 1981.
19. **Ionescu-Bujor, C.; Sacter, O.,** *Exerciții şi probleme de geometrie analitică şi diferențială,* Vol. I, II, E.D.P., Bucureşti, 1969.
20. **Mihăileanu, N.,** *Geometrie analitică, proiectivă şi diferențială,* E.D.P., Bucureşti, 1971.
21. **Mihu, C.; Jambor, I.P.,** *Curbe plane*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1989.
22. **Miron, R.,** *Introducere în geometria diferențială,* Litografia Universității Iaşi, 1971.
23. **Murărescu, Gh.,** *Geometrie diferențială. Curs,* Reprografia Universității Craiova, 1998.

24. **Murgulescu, E.; Flexi, S.; Kreindler, O.; Sacter, O.; Tîrnoveanu, M.,** *Geometrie analitică şi diferențială,* E.D.P., Bucureşti, 1965.
25. **Murgulescu, E.; Donciu, N.; Popescu, V.,** *Geometrie analitică în spațiu şi geometrie diferențială - Culegere de probleme*, E.D.P., Bucureşti, 1973.
26. **Nicolescu, L.,** *Geometrie diferențială - Culegere de probleme*, Litografia Universității Bucureşti, 1982.
27. **Obădeanu, V.,** *Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică*, Ed. Facla, Timişoara, 1981.
28. **Orman, G.,** *Elemente de algebră liniară*, Universitatea din Braşov, 1974.
29. **O'Neill, B.,** *Elementary differential geometry,* Academic Press, 1970.
30. **Papuc, D.,** *Geometrie diferențială,* E.D.P., Bucureşti, 1982.
31. **Pitiş, Gh.,** *Curs de algebră, geometrie şi ecuații diferențiale,* Universitatea din Braşov, 1990.
32. **Popescu, I.P.,** *Lecții de geometrie diferențială,* Litografia Universității Timişoara, 1973.
33. **Radu, C.,** *Algebră şi geometrie,* Litografia I.P.B., 1976.
34. **Radu, Gh.,** *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferențială,* Ed. All, Bucureşti, 1996.
35. **Radu, C.; Drăguşin, C.; Drăguşin, L.,** *Aplicații de algebră, geometrie şi matematici speciale*, E.D.P., Bucureşti, 1991.
36. **Simionescu, C.,** *Curs de geometrie*, Universitatea din Braşov, 1977.
37. **Stavre, P.,** *Teoria curbelor şi suprafețelor,* Reprografia Universității Craiova, 1968.
38. **Teodorescu, N.,** *Ecuații diferențiale cu derivate parțiale, Vol. I*, Ed. Tehnică, 1978.
39. **Udrişte, C.,** *Curbe şi suprafețe,* Litografia I.P.B., 1975.
40. **Udrişte, C.; Radu, C.; Dicu, C.; Mălăncioiu, O.,** *Algebră, geometrie şi ecuații diferențiale*, E.D.P., Bucureşti, 1982.
41. **Udrişte, C.; Radu, C.; Dicu, C.; Mălăncioiu, O.,** *Probleme de algebră, geometrie şi ecuații diferențiale*, E.D.P., Bucureşti, 1981.
42. **Vrânceanu, Gh.,** *Geometrie analitică, proiectivă şi diferențială*, E.D.P., Bucureşti, 1967.