# 6. Rezolvarea numerică a problemei Cauchy pentru ecuații diferențiale

## *§6.1. Generalități*

Ecuațiile diferențiale reprezintă unul dintre cele mai importante instrumente matematice, necesar pentru înțelegerea unor rezultate din mecanică, fizică, etc.

În acest capitol prezentăm metode numerice pentru rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuații diferențiale.

Fie $D = [a, b] \times J \subset R^2$, $f : D \to R$ şi $(x_0, y_0) \in D$. *Problema Cauchy* pentru ecuația diferențială

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

constă în determinarea unei soluții a ecuației (1) , adică a unei funcții derivabile $y : I \subset [a, b] \to R$ astfel ca pentru orice $x \in I$, $(x, y(x)) \in D$ şi $y' = f(x, y(x))$, $(\forall) x \in I$ care satisface *condiția inițială*

$$y(x_0) = y_0 \ . \tag{2}$$

După cum este cunoscut, găsirea soluției exacte a problemei (1)-(2) nu este posibilă decât în anumite cazuri. De exemplu, determinarea soluției exacte, prin tehnici clasice, a ecuației aparent simple

$$y' = x^2 + y^2 \ , \ \ y(0) = 1 \ ,$$

nu este posibilă. Se justifică astfel necesitatea recurgerii la metode aproximative pentru rezolvarea problemei Cauchy.

Reamintim, pentru început, câteva rezultate privind existența, unicitatea şi stabilitatea soluției acestei probleme.

***Definiție.*** *Funcția $f : D \to R$ se numeşte lipschitziană în raport cu $y \in J$, dacă există o constantă $L > 0$ astfel ca pentru orice $(x, y) \in D$ şi $(x, z) \in D$ are loc inegalitatea*

$$|f(x, y) - f(x, z)| \le L|y - z| \ . \tag{3}$$

***Observație.*** *Dacă* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *există şi este mărginită pe D, atunci f este lipschitziană pe D. Într-adevăr, din Teorema lui Lagrange rezultă*

$$f(x,y) - f(x,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,c)(y-z),$$

*pentru un anumit c între y şi z, deci putem alege*

$$L = \max_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|. \tag{4}$$

În ce priveşte existența şi unicitatea soluției problemei (1)-(2), are loc următoarea teoremă.

***Teorema 1***. *Presupunem că sunt îndeplinite condițiile:*

*(i) f este continuă pe [a, b] în raport cu x ;*

*(ii) f este lipschitziană pe D în raport cu y ;*

*(iii)* $(x_0, y_0)$ *este punct interior lui D.*

*Atunci pentru un* $\alpha > 0$ *convenabil, există o soluție unică pe* $I=[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ *a problemei (1) - (2).*

***Exemplul 1***. Fie ecuația $y' = 1+\sin(xy)$ , $D = [0,1]\times \mathbb{R}$ . Deoarece $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy$ , conform observației de mai sus, putem lua $L = 1$. Atunci pentru orice $(x_0, y_0)$ cu $0 < x_0 < 1$ există o soluție a problemei Cauchy pentru ecuația dată pe un anumit interval $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \subset [0, 1]$.

După cum se ştie, soluția problemei (1)–(2) se află cu metoda aproximațiilor succesive.

Fie

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \ , \quad x \in I\,, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Atunci şirul de funcții $(y_n)_n$ este uniform convergent pe intervalul $I$ şi limita sa $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ este soluție unică a problemei (1)-(2). Mai mult, are loc

$$|y(x) - y_n(x)| \le \frac{ML^n C^{n+1}}{(n+1)!} e^{LC} \ , \tag{5}$$

unde

$$M = \sup_{x\in I}|f(x, y_0)| \ , \quad C = \max(|a - x_0|, |b - x_0|)\,.$$

*Metoda aproximațiilor succesive (Picard)* este o metodă aproximativă de rezolvare a problemei Cauchy. Se aproximează soluția $y(x)$ cu $y_n(x)$ şi se cunoaşte o evaluare a erorii.

***Exemplul 2***. Fie ecuația $y' = y$ , $y(0) = 1$ , $D = [-1, 1] \times \mathrm{R}$ . Atunci $M = 1$ , $L = 1$. Şirul aproximațiilor succesive este:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{t^2}{2})dt = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

.........................................................

$$y_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} .$$

Este clar că $y_n \to y = e^x$, care este soluția exactă a problemei.

Metoda aproximațiilor succesive are dezavantajul că presupune calculul unor integrale, lucru dificil de realizat. Din această cauză, această metodă este mai puțin folosită în practică, metoda având o importanță deosebită, mai ales din punct de vedere teoretic.

În ceea ce priveşte stabilitatea soluției problemei (1)-(2), ne interesează comportamentul soluției la modificări mici ale funcției $f(x,y)$ şi ale datei inițiale $y_0$. Considerăm, deci, problema perturbată

$$y' = f(x, y) + \delta(x), \quad (6)$$

$$y(x_0) = y_0 + \varepsilon , \quad (7)$$

cu aceleaşi ipoteze asupra funcției $f$ ca în Teorema 1. Presupunem, în plus, că $\delta(x)$ este continuă pe $[a, b]$. Atunci problema (6)-(7) are soluție unică, notată $y(x; \delta, \varepsilon)$.

***Teorema 2.*** *Presupunem satisfăcute ipotezele Teoremei 1 şi că funcția $\delta(x)$ este continuă pe [a, b]. Atunci problema (6)-(7) va avea soluție unică $y(x; \delta, \varepsilon)$ pe un interval $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, $\alpha > 0$, uniform pentru toate perturbările $\varepsilon$ şi $\delta(x)$ ce satisfac:*

$$|\varepsilon| \le \varepsilon_0, \quad \|\delta\|_\infty \le \varepsilon_0,$$

*cu $\varepsilon_0$ suficient de mic. În plus, dacă y(x) este soluția problemei neperturbate, atunci*

$$\max_{|x-x_0|\le\alpha} |y(x)-y(x;\delta,\varepsilon)| \le k(|\varepsilon| + \alpha\|\delta\|_\infty) \ , \qquad (8)$$

*cu* $k = 1/(1-\alpha L)$.

Utilizând acest rezultat, se poate afirma că problema (1)-(2) este *corect pusă* sau *stabilă*. Deci dacă se fac mici modificări în ecuația diferențială sau în data inițială, atunci soluția nu se modifică semnificativ.

Soluția $y$ depinde continuu de datele problemei, anume funcția $f$ şi data inițială $y_0$. Din punct de vedere fizic, semnificația Teoremei 2 constă în faptul că pentru fenomene fizice descrise de ecuații diferențiale, mici abateri sau erori în condițiile inițiale sau în însăşi legea de evoluție, nu deformează prea puternic procesul. Rezultatul este important cu atât mai mult cu cât asemenea perturbații sau erori sunt întotdeauna inevitabile. Se poate întâmpla ca o problemă să fie stabilă, dar prost condiționată în raport cu calculul numeric, deşi asemenea situații nu apar prea des în practică.

Pentru a înțelege mai bine când aceasta se poate produce, vom estima perturbările soluției $y(x)$, datorate perturbărilor în problemă. Vom simplifica discuția considerând numai perturbările $\varepsilon$ în data inițială $y_0$; perturbările $\delta(x)$ intervin în răspunsul final conform (8).

Perturbăm deci, valoarea inițială $y_0$ ca în (7). Fie $y(x;\varepsilon)$ soluția perturbată. Atunci

$$y'(x;\varepsilon) = f(x, y(x;\varepsilon)), \quad x_0 - \alpha \le x \le x_0 + \alpha,$$

$$y(x_0;\varepsilon) = y_0 + \varepsilon$$

Dacă $y(x)$ este soluția problemei neperturbate (1)-(2) şi $z(x) = y(x;\varepsilon) - y(x)$ este eroarea, atunci

$$z'(x;\varepsilon) = f(x, y(x;\varepsilon)) - f(x, y(x)) \approx \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} \cdot z(x;\varepsilon) \, , \qquad (9)$$

$$z(x_0;\varepsilon) = \varepsilon \quad .$$

Aproximarea (9) este valabilă când $y(x;\ \varepsilon)$ este suficient de aproape de $y(x)$ , ceea ce se întâmplă pentru valori mici ale lui $\varepsilon$ şi intervale mici $[x_0\text{-}\alpha,\ x_0\text{+}\alpha]$.

Ecuația diferențială aproximativă (9) se poate integra uşor. Se obține

$$z(x;\varepsilon) \approx \varepsilon \exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t}\, dt\right].$$

Dacă derivata parțială satisface

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \le 0, \quad |x_0 - t| \le \alpha \ ,$$

atunci $z(x;\varepsilon)$ rămâne mărginită de $\varepsilon$ când $x$ crește. În acest caz, se spune că problema Cauchy este *bine condiționată*. Ca exemplu de comportare opusă, considerăm problema

$$y' = \lambda y + g(x) \ , \quad y(0) = y_0, \tag{10}$$

cu $\lambda > 0$. Cum $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda,$ putem calcula exact $z(x;\varepsilon) = \varepsilon e^{\lambda x}$ .

Atunci perturbarea lui $y(x)$ se mărește când $x$ crește.

***Exemplul 3***. Ecuația diferențială

$$y' = 100y - 101e^{-x} \ , \quad y(0) = 1, \tag{11}$$

are soluția $y(x;\varepsilon) = e^{-x} + \varepsilon e^{100x}$, care se depărtează rapid de soluția exactă. Spunem că problema (11) este *prost condiționată*.

Revenim acum la problema (1)-(2). Din considerente practice, se presupune că $x_0 = a$ , adică se înlocuiește condiția (2) cu

$$y(a) = y_0 \ . \tag{12}$$

Această presupunere nu este restrictivă, pentru că dacă am găsit un algoritm care rezolvă problema (1)-(12), atunci cu acest algoritm putem rezolva și problema (1)-(2). Într-adevăr, fie $I_1 = [a, x_0]$ și $I_2 = [x_0, b]$.

Pe intervalul $I_1$ facem schimbarea de variabilă $X = x_0 - x$. Atunci $y(x) = y(x_0 - X) = Y(X)$ și ecuația (1) devine

$$Y'(X) = -f(X,Y) \ , \quad X \in [0, x_0 - a] \ , \tag{13}$$

iar condiția inițială (12) devine

$$Y(0) = y_0 \ . \tag{14}$$

Metodele numerice pentru rezolvarea problemei (1)-(12) constau în alegerea unor noduri (de obicei, echidistante) $x_k = a + kh, \ k \in \mathrm{N}$ și determinarea unor valori aproximative ale soluției exacte $y(x)$ în aceste noduri, valori pe care le notăm cu $y_k$. Așadar $y_k \cong y(x_k)$ .

Se cunosc două clase importante de metode numerice pentru rezolvarea problemei Cauchy.

1. *Metode directe (uni-pas)* în care $y_k$ este calculat, printr-o relație de recurență, în funcție numai de valoarea $y_{k-1}$ calculată anterior. În această categorie intră metoda Taylor și metodele Runge-Kutta.

2. *Metode indirecte (cu mai mulți pași)* în care $y_k$ se calculează printr-o relație de recurență în funcție de valorile precedente $y_{k-m}, \ldots, y_{k-2}, y_{k-1}$ .

În această categorie intră metodele Adams-Bashforth, Adams-Moulton și metoda predictor-corector.

## *§6.2. Metode directe*

***Metoda lui Taylor*** (1685-1731). Fie nodurile echidistante $x_n = x_0+nh$ , $x_0 = a$ şi $y=y(x)$ soluţia exactă a problemei (1)-(2).

Aşadar $y'(x) = f(x, y(x))$ , $y(x_0) = y_0$.

Presupunem că $f$ este diferenţiabilă de un număr suficient de ori. Cum $x_1 = x_0+h$ , din formula lui Taylor rezultă

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{1!} y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + .... + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(x_0) + R_{p+1},$$

unde

$$R_{p+1} = \frac{y^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} h^{p+1} \quad , \quad \xi \in (x_0, x_1) .$$

Din $y'(x) = f(x, y(x))$ rezultă succesiv

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) y'(x) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) f(x, y(x)) ,$$

$$y'''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot y' + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' \right) f + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \cdot f \qquad \text{etc.}$$

Atunci:

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) ,$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) f(x_0, y_0) ,$$

$$y'''(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) f(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) f^2(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^2 \cdot f(x_0, y_0) \qquad \text{etc.}$$

Pentru $p = 3$ obţinem

$$y(x_1) = y_0 + \frac{h}{1!} y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + R_4 \quad .$$

Aproximăm soluția exactă în $x_1$, deci $y(x_1)$, cu

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0),$$

eroarea fiind dată de

$$|y(x_1) - y_1| = |R_4| \le \frac{1}{4!}M_4 \cdot h^4 \quad , \quad \text{unde} \quad M_4 = \sup_{x\in[a,x_1]}\left|y^{IV}(x)\right|,$$

unde $y^{IV}(x)$ se calculează ca mai sus.

În continuare, considerând soluția problemei (1) ce satisface $y(x_1) = y_1$, deci pornind cu punctul $(x_1, y_1)$, se determină $y_2$ care aproximează pe $y(x_2)$, ş.a.m.d. În general, $y(x_n)$ se aproximează cu $y_n$, dat de

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{1!}y'(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2!}y''(x_{n-1}) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_{n-1}) \quad .$$

Evident, erorile se acumulează.

***Exemplul 4***. Fie ecuația $y' = 1 - \frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{3}{2}$. Alegem $h = 0.1$. În acest caz

$$f(x,y) = 1 - \frac{y}{x} \; , \; \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \; , \; \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2y}{x^3} \; , \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2} \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad .$$

Atunci $y'(1) = f\left(1, \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ , $y''(1) = 2$ , $y'''(1) = -6$ .

Deci $x_0 = 1$ , $x_1 = 1.1$ . Aproximăm $y(1.1)$ cu $y_1$ dat de

$$y_1 = \frac{3}{2} + \frac{0.1}{1!}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{(0.1)^2}{2!}\cdot 2 + \frac{(0.1)^3}{3!}(-6) \quad .$$

Obținem $y_1 = 1.459$ . Pe de altă parte, soluția exactă a problemei este $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, deci $y(1.1) = 1.459090$ .

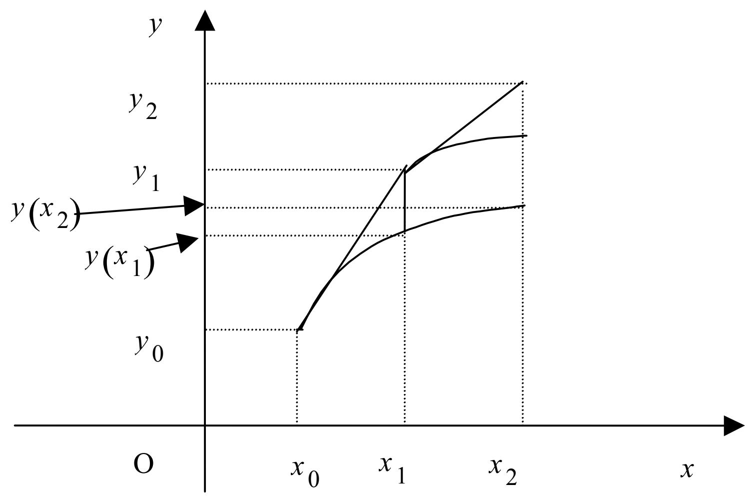
Dezavantajul metodei Taylor constă în faptul că presupune calculul derivatelor $y^{(2)}, y^{(3)}, \ldots, y^{(k)}, \ldots$, la fiecare pas, ceea ce este dificil de realizat. Această deficiență este înlăturată de metodele care urmează.

Dacă $p = 1$ se obține ***metoda lui Euler*** (1707-1783). În acest caz valorile aproximative $y_n$ ale lui $y(x_n)$ sunt date de

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \; , \quad n \ge 1 \; , \qquad (15)$$

unde, evident, $y_0 = y(x_0)$ .

Metoda lui Euler are o interpretare geometrică foarte simplă: dacă s-a determinat valoarea $y_{n-1}$, pentru a determina $y_n$, se consideră soluția ecuației (1) care trece prin $(x_{n-1}, y_{n-1})$ (deci care satisface $y(x_{n-1})=y_{n-1}$) ; se duce apoi tangenta la graficul acestei soluții, în punctul $(x_{n-1}, y_{n-1})$ ; se intersectează această tangentă cu dreapta $x=x_n$ , obținându-se $y_n$. Din acest motiv, metoda lui Euler se mai numeşte şi *metoda liniilor poligonale*. După cum se observă din figura de mai jos, erorile se acumulează.




***Exemplul 5.*** Folosind metoda Euler să se determine soluția aproximativă a următoarei probleme Cauchy

$$\begin{cases} y' & = y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{4x^2} \\ y(1) & = 0.5 \end{cases}$$

în punctul $x=2$ în doi paşi.

În acest caz

$x_0=1$ , $y_0=0.5$ , $n=2$ , $h=0.5$ , $x_1=1+0.5=1.5$ , $x_2=2$.

Atunci:

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0) = 0.5 + 0.5\left(0.5^2 - \frac{0.5}{1} - \frac{1}{4\cdot 1^2}\right) = 0.25\,,$$

$$y_2 = y_1 + h\cdot f(x_1, y_1) = 0.14236\,.$$

***Metodele Runge-Kutta*** se deosebesc de metoda lui Taylor prin faptul că înlocuiesc calculul derivatelor funcției $f$, prin evaluări ale lui $f$ în diverse puncte. Metoda a fost introdusă de matematicianul german Carl David Runge în 1895 şi dezvoltată de un alt matematician german, Wilhelm Kutta, în 1901. Vom analiza în detaliu metoda Runge-Kutta de ordinul doi. Valorile aproximative $y_n$ ale lui $y(x_n)$ sunt date de

$$\begin{aligned} y_n = y_{n-1} + a_1 h f(x_{n-1}, y_{n-1}) + a_2 h f(x_{n-1} + b_1 h, y_{n-1} + \\ + b_2 h f(x_{n-1}, y_{n-1}))\ , \quad n \geq 1\ , \end{aligned} \tag{16}$$

iar $y_0 = y(x_0)$. Constantele $a_1, a_2, b_1, b_2$ urmează a fi determinate. Dacă notăm $f = f(x_{n-1}, y_{n-1})$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_{n-1}, y_{n-1})$, atunci, din formula lui Taylor pentru funcții de două variabile, obținem

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + a_1\, h\, f + a_2\, h\left(f + b_1\, h\, f_x + b_2\, h\, f_y\, f + O(h^2)\right) = \\ &= y_{n-1} + (a_1 + a_2) f \cdot h + \left(a_2\, b_1\, f_x + a_2\, b_2\, f\, f_y\right) \cdot h^2 + O(h^3)\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Pe de altă parte, din metoda lui Taylor, avem

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{1!} f + \frac{h^2}{2!}\left(f_x + f_y \cdot f\right) + O(h^3)\,. \tag{18}$$

Identificând coeficienții lui $h$ și $h^2$ din (17) și (18), rezultă

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 b_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2 b_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} . \tag{19}$$

Deoarece sistemul (19) are 3 ecuații și 4 necunoscute, una din necunoscute poate fi aleasă arbitrar. De exemplu, dacă alegem $b_2 = \alpha$, atunci $b_1 = \alpha$, deci

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 \alpha = \dfrac{1}{2} \\ b_2 = \alpha \end{cases} ,$$

astfel că formulele (16) se mai scriu

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + h(a_1\, g_1 + a_2\, g_2) \quad , \ n \ge 1 \\ g_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ g_2 = f(x_{n-1} + \alpha\, h\, , y_{n-1} + \alpha\, h\, g_1) \\ a_1 + a_2 = 1 \\ a_2\, \alpha = \dfrac{1}{2} \ . \end{cases} \tag{20}$$

Pentru $a_1 = a_2 = \dfrac{1}{2}$ , $\alpha = 1$, se obține *metoda Euler îmbunătățită*

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}\left[f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right) + f\left(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hf\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)\right)\right],\ n \ge 1. \tag{21}$$

Pentru $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ , $\alpha = \dfrac{1}{2}$, se obține *metoda Euler modificată*

$$y_n = y_{n-1} + hf\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)\right) \ ,\ n \ge 1 \ . \tag{22}$$

***Exemplul 6.*** Folosind metoda Euler îmbunătățită să se determine soluția aproximativă a următoarei probleme Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{4x^2} \\ y(1) &= 0.5 \end{cases}$$

în punctul $x$=2 în doi paşi.

În acest caz $x_0$=1 , $y_0$=0.5 , $h = 0.5$ , $x_1$=1.5 , $x_2$=2.

Cum $y_1 = y_0 + \dfrac{h}{2} \cdot \left[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_0 + h, y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)\right)\right]$, prin calcul se obține $y_1 = 0.32118$.

Similar

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_1, y_1) + f\left(x_1 + h, y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)\right)\right] = \\ &= 0.32118 + 0.25 \cdot \left(-0.22207 - 0.12341\right) = 0.23481. \end{aligned}$$

***Exemplul 7.*** Folosind metoda Euler modificată să se determine soluția aproximativă a problemei Cauchy din Exemplul 6, în punctul $x$=2 în doi paşi.

În acest caz $y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)\right)$, deci $y_1 = 0.34031$, iar

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_1)) = 0.25868 .$$

În continuare prezentăm metoda Runge-Kutta de ordinul patru în forma particulară sub care este cel mai des utilizată ( W.Kutta - 1901).

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}\left(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4\right) \ , \ n \geq 1 \quad , \tag{23}$$

unde

$$g_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$g_2 = f(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} g_1),$$

$$g_3 = f(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} g_2),$$

$$g_4 = f\left(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hg_3\right),$$

şi $y_0 = y(x_0)$.

***Exemplul 8.*** Folosind metoda Runge-Kutta de ordinul 4 să se determine soluția aproximativă a problemei Cauchy din Exemplul 6, în punctul $x=2$ în doi paşi. Folosind notațiile din Exemplul 6 se obține:

$$g_1 = f(x_0, y_0) = -0.5 ,$$

$$g_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot g_1) = f(1.25, 0.5 - 0.25 \cdot 0.5) = -0.31937 ,$$

$$g_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot g_2) = f(1.25, 0.5 - 0.25 \cdot 0.31937) = -0.31959 ,$$

$$g_4 = f(x_0 + h, y_0 + h \cdot g_3) = f(1.5, 0.5 - 0.5 \cdot 0.31959) = -0.22218 ,$$

deci

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} \cdot \left[g_1 + 2 \cdot \left(g_2 + g_3\right) + g_4\right] = 0.33332 .$$

Pentru $y_2$ calculăm mai întâi

$$g_1 = f(x_1, y_1) = -0.22222 ,$$

$$g_2 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} \cdot g_1) = -0.1632 ,$$

$$g_3 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} \cdot g_2) = -0.16322 ,$$

$$g_4 = f(x_1 + h, y_1 + h \cdot g_3) = -0.125 .$$

În consecință

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6} \cdot \left[g_1 + 2 \cdot \left(g_2 + g_3\right) + g_4\right] = 0.24999 \, .$$

Această metodă se poate aplica şi pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale.

Fie sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \tag{24}$$

cu condiţia iniţială

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases} . \tag{25}$$

Formulele (23) se scriu în acest caz astfel

$$\begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,n-1} \\ y_{2,n-1} \end{pmatrix} + \frac{h}{6}\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} + \frac{h}{3}\begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} + \frac{h}{3}\begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \end{pmatrix} + \frac{h}{6}\begin{pmatrix} g_{41} \\ g_{42} \end{pmatrix} \ , \ n \geq 1 \, ,$$

unde:

$$\begin{aligned} g_{11} &= f_1(x_{n-1}, y_{1,n-1}, y_{2,n-1}) \\ g_{12} &= f_2(x_{n-1}, y_{1,n-1}, y_{2,n-1}) \\ g_{21} &= f_1\left( x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{1,n-1} + \frac{h}{2} g_{11}, y_{2,n-1} + \frac{h}{2} g_{12} \right) \\ g_{22} &= f_2\left( x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{1,n-1} + \frac{h}{2} g_{11}, y_{2,n-1} + \frac{h}{2} g_{12} \right) \\ g_{31} &= f_1\left( x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{1,n-1} + \frac{h}{2} g_{21}, y_{2,n-1} + \frac{h}{2} g_{22} \right) \\ g_{32} &= f_2\left( x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{1,n-1} + \frac{h}{2} g_{21}, y_{2,n-1} + \frac{h}{2} g_{22} \right) \\ g_{41} &= f_1\left(x_{n-1} + h, y_{1,n-1} + hg_{31}, y_{2,n-1} + hg_{32}\right) \\ g_{42} &= f_2\left(x_{n-1} + h, y_{1,n-1} + hg_{31}, y_{2,n-1} + hg_{32}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

şi

$$\begin{aligned} y_{1,0} &= y_1\left(x_0\right) \\ y_{2,0} &= y_2\left(x_0\right) \end{aligned} .$$

***Asupra consistenței, stabilității şi convergenței metodelor directe***

Orice metodă directă pentru rezolvarea probelemei Cauchy poate fi scrisă sub forma generală

$$y_n = y_{n-1} + h\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h)\ ,\quad n \ge 1, \tag{28}$$
$$y_0 = y(x_0)\ ,$$

unde funcția $\Phi(x, y, h)$ se numeşte *funcție de creştere*. Pentru $h \neq 0$, relația (28) se scrie sub forma

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h)\ . \tag{29}$$

***Definiție.*** *Dacă y(x) este soluția exactă a problemei Cauchy (1)-(2), se numeşte eroare de trunchiere a metodei, funcția*

$$t(x,h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi\,(x, y(x), h), \tag{30}$$

*unde* $x \in [x_0, b)$ *şi* $h > 0$ *astfel ca* $x+h \le b$ .

***Definiție.*** *Se spune că formula (28) dă o aproximare consistentă a problemei (1), (2), dacă* $t(x,h) \to 0$ *când* $h \to 0$ , *uniform în raport cu* $x \in [x_0, b)$.

Din (30) se vede că, pentru o metodă consistentă, avem

$$y'(x) = \Phi(x, y(x), 0) = f(x, y(x))\,.$$

***Definiție.*** *Se spune că formula (28) dă o aproximare consistentă de ordin* $p$ , *dacă există* $N \ge 0$ , $h_0 > 0$ *şi un întreg pozitiv* $p$ *astfel ca* $\sup\limits_{x_0 \le x \le b} |t(x,h)| \le N \cdot h^p$ , *pentru orice* $h \in (0, h_0]$.

***Propoziția 1***. *Metoda lui Taylor de ordin p este consistentă de ordin p. Metodele Runge-Kutta de ordinul p dat sunt metode consistente de ordinul p.*

**Demonstrație.** Pentru metoda dată de formula lui Taylor de ordinul $p$, avem

$$t(x,h) = \frac{h^p}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi)\ ,\ \text{unde}\quad x < \xi < x + h\ .$$

Alegând $N = \sup\limits_{x_0 \le x \le b} \frac{1}{(p+1)!} \left| y^{(p+1)}(x) \right|$, rezultă consistența de ordinul $p$. ❑

Spre exemplu, metoda lui Euler este consistentă de ordinul 1. Pentru metodele Runge-Kutta este dificil să obținem o formă explicită a lui *N*.

Până acum am considerat erorile de trunchiere, adică erorile ce apar prin discretizarea ecuației diferențiale. Ne interesează însă, în ce măsură soluția ecuației cu diferențe, adică a ecuației obținută prin discretizare (deci șirul $(y_n)_n$), aproximează soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale.

Așadar, vom aborda problema "convergenței" soluției ecuației cu diferențe la soluția ecuației diferențiale. Această convergență trebuie definită cu atenție. De exemplu, dacă analizăm comportarea șirului $(y_n)_n$, când $h \to 0$, pentru $n$ fixat, nu vom obține un concept util, deoarece, în acest caz $x_n = x_0 + nh \to x_0$, iar pe noi ne interesează ce se întâmplă pentru $x \neq x_0$. Deci trebuie să considerăm comportarea șirului $(y_n)_n$ când $h \to 0$, cu $x = x_n = x_0+nh$ fixat. Pentru a obține o soluție pentru valoarea $x \neq x_0$ fixată, trebuie să mărim numărul de pași ceruți pentru a ajunge la $x$ din $x_0$, dacă pasul $h$ descrește.

***Definiție.*** *Metoda numerică directă se numește convergentă dacă pentru orice* $x \in [x_0, b]$, *avem*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x = x_n = x_0 + nh}} y_n = y(x) \qquad (31)$$

Această definiție se datorează lui G. Dahlquist.
În studiul convergenței metodelor directe, este utilă următoarea lemă.

***Lema 1.*** *Au loc inegalitățile:*

$$1 + x \le e^x \ , \ (\forall) x \in \mathbb{R} \ , \qquad (32)$$

$$0 \le (1+x)^m \le e^{mx} \ , \ (\forall) x \ge 1 \ , \ m \in \mathbb{N} \ . \qquad (33)$$

**Demonstrație.** Cum (33) este consecință imediată a lui (32), este suficient să justificăm (32). Dar (32) este consecință imediată a formulei lui Taylor, deoarece

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{\xi},$$

unde $\xi$ este între 0 și $x$. ❑

În continuare, vom analiza convergența metodelor directe.

Fie $e_n = y(x_n) - y_n$, $n \ge 0$. Deci $e_n$ reprezintă eroarea globală dintre soluția exactă și soluția aproximativă în nodurile $x_n$.

Din (30), obținem

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + h\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h) + ht(x_{n-1}, h).$$

Scăzând (28) din această egalitate, avem

$$e_n = e_{n-1} + h\left[\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h) - \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h\right] + ht(x_{n-1}, h) \qquad (33')$$

Evident $e_0 = 0$.

Din nefericire, faptul că $t(x_{n-1},h)$ este mic, nu este suficient pentru a asigura că $e_n$ este mic. Ar trebui să arătăm că

$$\max_n |e_n| \le C \max_n |t(x_n, h)|,$$

unde constanta $C$ este independentă de $h$ ; este ceea ce numim *stabilitatea metodei de aproximare*.

În cele ce urmează, presupunem că funcţia de creştere $\Phi$ satisface condiţia lui Lipschitz

$$\left|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,z,h)\right|\le K\left|y-z\right| \ , \ x\in\left[x_0,b\right] \ , \ y,z\in \mathbb{R} \ , \ h>0 . \qquad (34)$$

şi că metoda este consistentă de ordin $p$ cu constanta $N$.

Considerăm mai întâi cazul $K > 0$. Atunci din (33′) rezultă că există $h_0 > 0$ astfel ca pentru $h\in(0,h_0]$ să avem

$$\left|e_n\right|\le\left|e_{n-1}\right|\left(1+hK\right)+Nh^{p+1} \ .$$

Aplicând această inegalitate recursiv rezultă

$$\left|e_n\right|\le\left(1+hK\right)^n\left|e_0\right|+Nh^{p+1}[1+(1+hK)+...+(1+hK)^{n-1}] \qquad .$$

Deoarece $e_0 = 0$, din Lema 1, rezultă că

$$\left|e_n\right|\le Nh^p\,\frac{(1+hK)^n-1}{K}\le Nh^p\,\frac{e^{nhK}-1}{K}=Nh^p\,\frac{e^{(x_n-x_0)K}-1}{K} \quad .$$

Pentru $K = 0$, se obţine imediat

$$\left|e_n\right|\le\left(x_n-x_0\right)Nh^p \ .$$

Am demonstrat deci următoarea teoremă.

***Teorema 3.*** *Dacă metoda (28) este consistentă de ordin p, cu constanta N, iar funcţia $\Phi$ satisface condiţia lui Lipschitz (34), atunci există $h_0>0$, astfel ca pentru $h\in(0, h_0]$ avem*

$$\left|y(x_n)-y_n\right|\le\begin{cases}\dfrac{e^{(x_n-x_0)K}-1}{K}Nh^p \ , & \text{dacă} \quad K\ne 0\\[2mm] (x_n-x_0)Nh^p \ , & \text{dacă} \quad K=0 \ ,\end{cases} \qquad (35)$$

*unde y(x) este soluţia exactă a problemei Cauchy. Deci metoda este convergentă.*

Această teoremă s-a obţinut pornind de la principiu important al analizei numerice, care se poate enunţa astfel:

CONSISTENŢĂ + STABILITATE $\Rightarrow$ CONVERGENŢĂ

***Definiţie.*** *O metodă numerică directă se numeşte convergentă de ordinul $p\in\mathbb{N}$ dacă există $C > 0$ astfel încât $\left|y(x_n)-y_n\right|\le Ch^p$, oricare ar fi $x_n = x\in[x_0, b]$.*

Teorema 3 spune că o metodă numerică consistentă de ordinul $p\in\mathbb{N}$ şi pentru care funcţia de creştere satisface condiţia Lipschitz (34) este convergentă de ordinul $p$ . Numărul $p$ introdus de Teorema 3 nu este unic determinat (dacă există): dacă $h < 1$ şi $p$ este ordin de convergenţă, atunci şi $p'$ cu $0 < p' < p$ este un ordin de convergenţă pentru această metodă. Se poate pune problema determinării unui ordin de convergenţă maximal pentru o metodă dată. În practică este suficient să se determine un ordin de convergenţă convenabil.

Metodele prezentate mai sus au ordine de convergenţă diferite.

Spre exemplu se poate arăta că metoda lui Euler îmbunătăţită are ordin de convergenţă 2, dacă există $L > 0$ astfel încât

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le L \ , \ (\forall)(x,y) \subset [a,b] \times J.$$

În funcţie de $L$, se poate determina $K$ din (34).

Ţinând seama de (21) pentru această metodă avem

$$\Phi(x,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(x+h, y+hf(x,y))\right].$$

Atunci

$$|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,z,h)| \le \frac{1}{2}|f(x,y) - f(x,z)| +$$

$$+\frac{1}{2}|f(x+h, y+hf(x,y)) - f(x+h, z+hf(x,z))| \le$$

$$\le \frac{1}{2}L|y-z| + \frac{1}{2}L\left[|y-z| + h|f(x,y) - f(x,z)|\right] \le (L + \frac{L^2 h_0}{2})|y-z|, \quad h \le h_0 \ ,$$

deci $K = L + \dfrac{L^2 h_0}{2}$.

În acest caz, din formula Taylor rezultă

$$t(x,h) = h^2(R_3(x) + Q_3(x,h)),$$

unde $R_3(x)$ este eroarea de la formula Taylor, iar $Q_3(x,h)$ eroarea care se face oprind termenii de ordinul doi din formula Runge-Kutta. Dacă derivatele lui $y$ şi ale lui $f$ sunt mărginite, atunci metoda Euler îmbunătăţită are ordinul de consistenţă 2.

În încheiere, menţionăm că metoda folosită în studiul stabilităţii soluţiei problemei Cauchy se poate aplica şi în cazul metodei Euler.

Considerăm metoda numerică (analoagă problemei Cauchy):

$$z_n = z_{n-1} + h\left[f(x_{n-1}, z_{n-1}) + \delta(x_{n-1})\right] \ , \ n \le 1 \qquad (36)$$

$$z_0 = y_0 + \varepsilon \ .$$

Comparăm cele două soluţii numerice $(z_n)_n$, $(y_n)_n$, când $h \to 0$.

Fie $e_n = z_n - y_n$, $n \ge 0$. Atunci $z_0 = \varepsilon$. Scăzând (15) din (36), obţinem

$$e_n = e_{n-1} + h\left[f(x_{n-1}, z_{n-1}) - f(x_{n-1}, y_{n-1})\right] + h\delta(x_{n-1}),$$

care are aceeaşi formă ca (23). Utilizând acelaşi procedeu ca îndemonstraţia Teoremei 3, rezultă

$$\max_n |z_n - y_n| \le e^{(b-x_0)} |\,\varepsilon\,| + \frac{e^{(b-x_0)L} - 1}{L} \cdot \|\delta\|_\infty \ .$$

În consecință, există constantele $k_1$, $k_2$, independente de $h$, astfel ca

$$\max_n |z_n - y_n| \le k_1 |\,\varepsilon\,| + k_2 \|\delta\|_\infty \ . \qquad (37)$$

Această inegalitate este analoagă inegalității (8) din cazul problemei Cauchy inițiale. Aşadar metoda Euler este stabilă numeric. De altfel, toate metodele numerice pentru problema Cauchy au această formă de stabilitate, imitând stabilitatea problemei inițiale. Analiza se poate simplifica, luând $\delta(x) = 0$ şi considerând numai efectul perturbării inițiale $y_0$. Nu vom analiza aici problema erorilor de rotunjire.

## *§6.3. Metode indirecte (cu mai mulți paşi)*

***Metoda Adams-Bashforth.*** Să presupunem că printr-o metodă directă (de exemplu, de tip Runge-Kutta) s-au determinat valorile $y_1, ..., y_n$ în nodurile $x_1, ..., x_n$, unde $y_k \approx y(x_k)$. Se pune problema determinării unei valori aproximative $y_{n+1}$ pentru $y(x_{n+1})$ ($y(x)$ este soluția exactă a problemei Cauchy). Integrând (1) pe intervalul $[x_n, x_{n+1}]$, obținem:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx. \qquad (38)$$

Pentru a calcula integrala, folosim o metodă numerică, de exemplu o metodă Newton-Côtes pentru nodurile echidistante $x_{n-m}, ..., x_i, ..., x_n$, $m \le n$, $x_i = x_n + (i-n)h$, $i = \overline{n-m, n}$.

Dacă $x \in [x_n, x_{n+1}]$, atunci există $t \in [0,1]$ astfel încât

$$x = x_n + th. \qquad (39)$$

Fie $P_m$ polinomul de interpolare Lagrange corespunzător tabelului

| $x$ | $x_{n-m}$ | ... | $x_i$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $f_{n-m}$ | ... | $f_i$ | ... | $f_n$ |

unde $f_i = f(x_i, y_i)$, $i = \overline{n-m, n}$.

Vom aproxima valoarea exactă $y(x_{n+1})$ prin

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_m(x)dx. \qquad (40)$$

După cum se ştie $P_m(x) = \sum_{i=n-m}^{n} L_i(x) f(x_i, y_i)$, unde

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=n-m \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{\substack{j=n-m \\ j\neq i}}^{n} \frac{(t-j+n)h}{(i-j)h} =$$

$$= \frac{(t+m)...(t+n-i+1)(t+n-i-1)...t}{(i-n+m)...1(-1)...[-(n-i)]} = \frac{(-1)^{n-i}\prod\limits_{k=0}^{m}(t+k)}{(i-n+m)!(n-i)!(t+n-i)} .$$

Făcând schimbarea de variabilă (39) în (40), obținem:

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^1 \Big( \sum_{i=n-m}^{n} \frac{(-1)^{n-i}\prod\limits_{k=0}^{m}(t+k)}{(i-n+m)!(n-i)!(t+n-i)} \cdot h f_i \Big) dt$$

Dacă notăm cu

$$A_i = \frac{(-1)^{n-i}\cdot h}{(i-n+m)!(n-i)!} \cdot \int_0^1 \frac{\prod\limits_{k=0}^{m}(t+k)}{t+n-i} dt \ , \qquad (41)$$

obținem

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=n-m}^{n} A_i f_i , \qquad (42)$$

cunoscută sub numele de *formula Adams-Bashforth.*

În continuare vom explicita formula (42) pentru valori particulare ale lui $m$. Astfel pentru $m = 1$, deci când se folosesc nodurile $x_n$ şi $x_{n-1}$, formula (42) devine

$$y_{n+1} = y_n + A_{n-1} f_{n-1} + A_n f_n ,$$

unde conform (41)

$$A_{n-1} = \frac{(-1)^{-1} h}{0!1!} \cdot \int_0^1 \frac{t(t+1)}{t+1} dt = -h \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{h}{2} ,$$

$$A_n = \frac{(-1)^0 h}{1!\cdot 0!} \cdot \int_0^1 \frac{t(t+1)}{t} dt = h\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2} h .$$

În consecință pentru $m = 1$, formula lui Adams-Bashforth se scrie

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) \ . \qquad (43)$$

Similar, pentru $m = 2$ se obține

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) \ , \qquad (44)$$

iar pentru $m = 3$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right) \ . \qquad (45)$$

În ceea ce priveşte evaluarea erorii, scăzând (40) din (38) obţinem

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) - y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(x, y(x)) - P_m(x)]dx,$$

deci

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \le |y(x_n) - y_n| + \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x, y(x)) - P_m(x)|dx.$$

Deci eroarea din metoda lui Adams-Bashforth este mai mică decât suma dintre eroarea din metoda Runge-Kutta folosită în calculul lui $y_n$ şi eroarea de la integrarea numerică. În cazul $m = 1$, se obţine folosind schimbarea de variabilă (39) :

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x, y(x)) - P_m(x)|\, dx \le \frac{M_2}{2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n)(x - x_{n-1})dx = \frac{M_2}{2} \int_0^1 h^3 t(t+1)dt =$$

$$= \frac{5}{12} h^3 M_2,$$

unde

$$M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x, y(x))|.$$

Deci eroarea de integrare în acest caz este de ordinul $h^3$.

Să menţionăm acum că integrând (1) pe $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, în locul lui (38) se poate considera

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx. \qquad (46)$$

Se poate proceda apoi ca mai sus. Această metodă este atribuită lui E. J. Nyström (1925). Pentru $m = 1$, de exemplu, se obţine

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n). \qquad (47)$$

Metodele Adams-Bashforth şi Nyström sunt cunoscute ca metode explicite, deoarece relaţia de recurenţă (42) sau cea corespunzătoare pentru metoda Nyström nu conţin $f(x_{n+1}, y_{n+1})$; ele exprimă explicit $y_{n+1}$ în funcţie de $y_n$, $y_{n-1}$, ... , $y_{n-m}$.

***Exemplul 1.*** Folosind metoda Adams-Bashforth de ordin trei să se determine soluţia aproximativă a următoarei probleme Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{4x^2} \\ y(1) &= 0.5 \end{cases}$$

în punctul $x$=2.25, determinând soluţia în $x$=2 cu metoda Runge-Kutta de ordinul patru în patru paşi.

Pentru a aplica metoda Runge-Kutta de ordin patru luăm: $x_0=1$ , $y_0=0.5$, $x=2$ , $n=4$ , $h=\dfrac{x-x_0}{n}=0.25$ , $x_1=x_0+h=1+0.25=1.25$, $x_2=1.5$ , $x_3=1.75$ , $x_4=2$ şi obţinem $y_1=0.4$ , $y_2=0.33333$ , $y_3=0.28571$ , $y_4=0.25$ .

Pentru a determina valoarea aproximativă a soluţiei în $x=2.25$ folosim metoda Adams-Bashforth de ordin trei

$$y_5=y_4+\frac{h}{12}\left(55f_4-59f_3+37f_2-9f_1\right) ,$$

unde

$f_2=f(x_2,y_2)=-0.22222,\ f_3=f(x_3,y_3)=-0.16327,\ f_4=f(x_4,y_4)=-0.125,$ obţinându-se $y(2.25)\approx y_5=0.22307$ ( soluţia exactă fiind $y(2.25)=0.22222$).

***Metoda Adams-Moulton***. Presupunem că printr-o metodă directă am determinat valorile aproximative $y_1$, ..., $y_n$ în nodurile $x_k=x_0+kh$, $k=\overline{1,n}$ şi că $x_{n+1}<b$. Fie $P_{m+1}$ polinomul de interpolare Lagrange corespunzător tabelului

| $x$ | $x_{n-m}$ | ... | $x_n$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f$ | $f_{n-m}$ | ... | $f_n$ | $f_{n+1}$ |

Formula corespunzătoare lui (40) este:

$$y_{n+1}=y_n+\int_{x_n}^{x_{n+1}}P_{m+1}(x)dx . \tag{48}$$

Procedând ca mai sus, obţinem

$$y_{n+1}=y_n+\sum_{i=n-m}^{n+1}B_i f_i, \tag{49}$$

unde

$$B_i=\frac{(-1)^{n+1-i}h}{(i-n+m)!(n+1-i)!}\cdot\int_0^1\frac{\prod_{k=-1}^{m}(t+k)}{t+n-i}dt,\ i=\overline{n-m,n+1}, \tag{50}$$

cunoscută sub numele de *formula Adams-Moulton.*

Vom particulariza acum această formulă. Pentru $m=0$ se obţine

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f_{n+1}+f_n), \tag{51}$$

pentru $m=1$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}(5f_{n+1}+8f_n-f_{n-1}), \tag{52}$$

pentru $m=2$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(9f_{n+1}+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2}) . \tag{53}$$

Deoarece $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$, necunoscuta $y_{n+1}$ apare şi în membrul drept, deci, în general nu se poate explicita.De aceea metoda Adams-Moulton este o *metodă implicită*.

De obicei (49) trebuie rezolvată ca o ecuaţie algebrică printr-o metodă iterativă. Se alege $y_{n+1}^{(0)}$, apoi se calculează

$$y_{n+1}^{(1)} = F(y_{n+1}^{(0)}) \ , \ \ y_{n+1}^{(2)} = F(y_{n+1}^{(1)}) \ \text{ etc.,}$$

unde $F$ apare din scrierea convenabilă a lui (49) sub forma $y_{n+1} = F(y_{n+1})$.

Pentru a calcula o aproximaţie bună $y_{n+1}^{(0)}$, se poate utiliza o formulă explicită, de exemplu, Adams-Bashforth.

Se poate demonstra următoarea teoremă.

***Teorema 4.*** *Fie şirul recurent*

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \sum_{i=n-m}^{n} B_i f_i + B_{n+1} f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}), \ k \in \mathbb{N} \ . \qquad (54)$$

*Dacă funcţia $f$ satisface condiţiile Teoremei 1 şi $h$ este ales astfel încât $|B_{n+1}| \cdot L < 1$, $L$ fiind constanta lui Lipschitz, atunci şirul $y_{n+1}^{(k)}$ este convergent şi limita sa $y_{n+1} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n+1}^{(k)}$ satisface ecuaţia $y_{n+1} = y_n + \sum\limits_{i=n-m}^{n+1} B_i f_i$ .*

Eroarea din metoda Adams-Moulton se poate estima ca şi în cazul metodei Adams-Bashforth.

***Exemplul 2.*** Folosind metoda Adams-Moulton de ordin unu să se determine soluţia aproximativă a următoarei probleme Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{4x^2} \\ y(1) &= 0.5 \end{cases}$$

în punctul $x$=1.5, considerând soluţia $y^{(0)}(1.5)$ obţinută cu metoda Euler modificată, cu $h$ = 0.05. Atunci $y^{(0)}(1.5) = 0.333406$ şi cum

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}) \ \ , k\text{=0,1,2...}$$

obţinem

$$y_5^{(1)} = 0.333403, \ y_5^{(2)} = 0.333331$$

***Metoda predictor-corector*** ( *Adams-Bashforth-Moulton* )

Presupunem că printr-o metodă directă am determinat valorile aproximative $y_1, ..., y_n$ în nodurile $x_1, ..., x_n$.

Fie $m_1, m_2 \le n$ şi $x_{n+1} = x_n + h \le b$.

În prima etapă (*etapa predictor*) se determină valoarea aproximativă $y_{n+1}$ cu metoda Adams-Bashforth, pentru $m = m_1$.

Valoarea astfel determinată se notează cu $y_{n+1}^{(0)}$, şi este folosită în continuare în etapa a doua (*etapa corector*) pentru determinarea valorii $y_{n+1}$ cu metoda Adams-Moulton cu $m = m_2$.

Cele mai utilizate metode predictor-corector sunt:

1) $$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) & (m_1 = 1) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}\right) + f_n\right] & (m_2 = 0) \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) & (m_1 = 2) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{12}\left(5f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}\right) + 8f_n - f_{n-1}\right) & (m_2 = 1) \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) & (m_1 = 3) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{24}\left(9f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}\right) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right) & (m_2 = 2) \end{cases}.$$

***Exemplul 3.*** Folosind metoda Adams-Bashforth-Moulton de ordin (3,2) să se determine soluția aproximativă a următoarei probleme Cauchy

$$\begin{cases} y' & = y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{4x^2}, \\ y(1) & = 0.5 \end{cases}$$

în punctul $x$=2.25, considerând soluția $y^{(0)}(2.25)$ obținută în exemplul 1.

Ca şi în exemplul 1 avem: $x_0$=1 , $y_0$=0.5 , $x$=2 , $n$=4, $h = 0.25$ , $x_1$=$x_0$+$h$=1+0.25=1.25, $x_2$=1.5 , $x_3$=1.75 , $x_4$=2 şi obținem $y_1$=0.4 , $y_2$=0.33333 , $y_3$=0.28571 , $y_4$=0.25 .

Pentru a determina valoarea aproximativă a soluției în $x$=2.25 folosim metoda Adams-Bashforth de ordin trei

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{12}(55f_4 - 59f_3 + 37f_2 - 9f_1) ,$$

si obținem $y(2.25) \approx y_5 = 0.22307$ . Notăm $y_5^{(0)} = 0.22307$ și aplicăm în continuare metoda Adams-Moulton de ordin 2. Obtinem: $y_5^{(1)} = 0.22219$; $y_5^{(2)} = 0.22219$.

În continuare vom aborda un anumit tip de stabilitate pentru a ilustra anumite idei, care nu pot fi prezentate în cazul metodei Euler. Am arătat la metoda Euler, că metodele numerice pentru problema Cauchy au o anumită formă de stabilitate, imitând stabilitatea problemei Cauchy. În particular acest tip de stabilitate caracterizează şi metoda (47) dată de

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n),\ n \geq 1\ .$$

Din păcate, această stabilitate nu este satisfăcătoare pentru scopuri practice. Vom arăta această metodă nu este convenabilă în raport cu un anumit sens de stabilitate pe care o vom defini. Deoarece relația de recurență depinde de $f(x,y)$ este greu să dăm rezultate generale privind stabilitatea numerică a unei astfel de metode. Este instructiv să căutăm, cu metoda de mai sus, soluția numerică a problemei

$$y' = \lambda y\ ,\ y(0) = 1\ ,\ \lambda \in \mathrm{R}\ , \tag{55}$$

a cărei soluție este $y(x) = e^{\lambda x}$. Această problemă o vom utiliza ca *problemă model*. Dacă o metodă numerică se comportă rău cu o problemă atât de simplă ca (55), este puțin probabil ca aceasta să fie bună pentru ecuații diferențiale mai complicate. În acest caz (47) devine

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h\lambda y_n\ ,\ n \geq 1\ . \tag{56}$$

Vom calcula soluția exactă a acestei ecuații și o vom compara cu soluția exactă a ecuației (55), $y(x) = e^{\lambda x}$. Ecuația (56) este un exemplu de ecuație liniară cu diferențe de ordin 2. Există o teorie generală pentru ecuații liniare cu diferențe de ordin $p$. Multe metode pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale au un analog în rezolvarea ecuațiilor cu diferențe, fiind un ghid în a rezolva (56). Vom începe căutând soluții liniar independente pentru ecuații cu diferențe. Acestea sunt combinate sub forma soluției generale.

Similar cu soluțiile exponențiale ale ecuațiilor diferențiale liniare, căutăm soluții pentru (56) de forma

$$y_n = r^n\ ,\ n \geq 0\ , \tag{57}$$

pentru un anumit $r$ necunoscut. Înlocuind în (56), pentru a găsi condiții necesare pentru $r$, obținem

$$r^{n+1} = r^{n-1} + 2h\lambda r^n\ .$$

Împărțind cu $r^{n-1}$, rezultă

$$r^2 = 1 + 2\lambda hr\ . \tag{58}$$

Este valabilă şi reciproca. Dacă $r$ satisface (58), atunci $y_n$ dat de (57) satisface (56). Ecuația (58) se numeşte *ecuație caracteristică* pentru metoda (47). Rădăcinile sale sunt

$$r_0 = h\lambda + \sqrt{1+h^2\lambda^2}\,, \quad r_1 = h\lambda - \sqrt{1+h^2\lambda^2}\ . \tag{59}$$

Soluția generală a lui (56) este

$$y_n = \beta_0 r_0^n + \beta_1 r_1^n\ ,\ n \ge 0\,. \tag{60}$$

Coeficienții $\beta_0$ și $\beta_1$ din (60) se determină din condițiile ca $y_0$ și $y_1$ să coincidă cu ce se obține din (60) pentru $n = 0$ și $n = 1$.

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 = y_0 \\ \beta_0 r_0 + \beta_1 r_1 = y_1\ . \end{cases}$$

Soluția acestui sistem este

$$\beta_0 = \frac{y_1 - r_1 y_0}{r_0 - r_1}\ ,\ \ \beta_1 = \frac{y_0 r_0 - y_1}{r_0 - r_1}\,.$$

Dar $y_0 = 1$, $y_1 = e^{\lambda h}$ (acestea sunt valorile soluției exacte). Atunci, folosind formula lui Taylor, obținem

$$\beta_0 = \frac{e^{\lambda h} - r_1}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}} = 1 + O(h^2\lambda^2)$$

$$\beta_1 = \frac{r_0 - e^{\lambda h}}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}} = O(h^3\lambda^3)\ \ .$$

Pentru aceste valori, $\beta_0 \to 1$ și $\beta_1 \to 0$ , când $h \to 0$ . În consecință $\beta_1 r_1^n \to 0$ când $h \to 0$, deci din (60) rezultă că termenul $\beta_0 r_0^n$ ar trebui să corespundă soluției exacte $e^{\lambda x_n}$. De fapt
$r_0^n = e^{\lambda x_n}\left[1 + O(h^2)\right]$ .

Într-adevăr

$$r_0 = \lambda h + 1 + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 + O(h^4),$$

$$e^{\lambda h} = 1 + \lambda h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 + O(h^3)\,.$$

Atunci

$$r_0 = e^{\lambda h} + O(h^3) = e^{\lambda h}\left[1 + O(h^3)\right],$$

deoarece $e^{\lambda h} = 1 + O(h)$ .

În consecință

$$r_0^n = e^{\lambda x_n}[1 + nO(h^3)] = e^{\lambda x_n}(1 + O(h^2))\ \ .$$

Pentru a vedea dificultatea utilizării formulei (60) în rezolvarea numerică a ecuației (55), să examinăm cu atenție, valorile relative ale lui $r_0$ și $r_1$. Pentru $0 < \lambda < \infty$ are loc $r_0 > |r_1| > 0, (\forall)h$ .

Atunci termenul $r_1^n$ va creşte mai puțin rapid decât $r_0^n$ şi termenul corect în (60), $\beta_0 r_0^n$ va domina. Totuşi pentru $\lambda < 0$, vom avea $0 < r_0 < 1$ , $r_1 < -1$ , $h > 0$. În consecință, $\beta_1 r_1^n$ va domina $\beta_0 r_0^n$ când $n$ creşte pentru $h$ fixat, necontând cât de mic este $h$ ales inițial. Termenul $\beta_0 r_0^n \to 0$ când $n \to \infty$, pe când termenul $\beta_1 r_1^n$ creşte în magnitudine, alternând ca semn când $n$ creşte. Termenul $\beta_1 r_1^n$ se numeşte *soluție parazită* a metodei numerice (56), deoarece nu corespunde unei soluții a ecuației diferențiale originale $y' = \lambda y$. Ecuația originală are o familie de soluții cu un parametru, depinzând de valoarea inițială $y_0$, dar aproximația (56) are familia de soluții (60), cu doi parametri, care depinde de $y_0$ şi $y_1$. Noua soluție $\beta_1 r_1^n$ este o creație a metodei numerice; pentru problema (55) cu $\lambda < 0$ ea face ca soluția numerică să se depărteze de soluția corectă când
$x_n \to +\infty$. Din cauza acestei comportări, spunem că metoda (47) este *slab stabilă*.

***Exemplul 4***. Fie problema model $y' = -y$ cu $y(0) = 1$ şi $h = 0.25$ . Se aplică metoda (47) cu $y_0 = 1$ şi $y_1$ determinat cu metoda Euler. Pentru $x_n = 2.25$ soluția $y_n$ devine negativă şi alternează ca semn la fiecare pas.

Se constată că dacă $\frac{\partial f}{\partial y}$ are semn negativ, atunci instabilitatea slabă apare uzual în rezolvarea problemei Cauchy prin metoda (47).

| $x_k$ | $y_k$ | $y(x_k)$ | $x_k$ | $y_k$ | $y(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1.75 | 0.89844 | 0.173774 |
| 0.25 | 0.75 | 0.77880 | 2 | 0.244141 | 0.135353 |
| 0.5 | 0.625 | 0.606531 | 2.25 | -0.32227 | 0.105399 |
| 0.75 | 0.4375 | 0.472367 | 2.5 | 0.260254 | 0.082085 |
| 1 | 0.40625 | 0.367879 | 2.75 | -0.162354 | 0.063928 |
| 1.25 | 0.234375 | 0.286505 | 3 | 0.341431 | 0.049787 |
| 1.5 | 0.289063 | 0.223130 | | | |

***Exemplul 5***. Fie problema $y' = x - y^2$ , $y(0) = 0$. Soluția acestei ecuații diferențiale este strict crescătoare pentru $x \geq 0$. Dar $f(x,y) = x - y^2$, deci $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y < 0$ pentru $y > 0$. Ne aşteptăm la o anumită instabilitate. Luând $h =$ 0.25 se constată că de la $x_n$=2.25 soluția numerică începe să descrească, ajungând în $x_n = 3.25$ să fie negativă.

| $x_k$ | $y_k$ | $x_k$ | $y_k$ |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 1.2914 |
| 0.25 | 0 | 2.25 | 1.145864 |
| 0.5 | 0.125 | 2.5 | 1.759889 |
| 0.75 | 0.242188 | 2.75 | 0.847244 |
| 1 | 0.470673 | 3 | 2.775987 |
| 1.25 | 0.631421 | 3.25 | -1.505808 |
| 1.5 | 0.896326 | 3.5 | 3.267258 |
| 1.75 | 0.979721 | 3.75 | -5.093296 |

***Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întâi în MATLAB***

În MATLAB funcțiile *ode*23(*fxy*,*x*0,*x*,*y*0) şi *ode*45(*fxy*,*x*0,*x*,*y*0) sau *ode*23(*fxy*,*x*0,*x*,*y*0,*err*,*urma*) şi *ode*45(*fxy*,*x*0,*x*,*y*0,*err*,*urma*) rezolvă ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$y' = f(x,y),$$
$$y(x_0) = y_0,$$

prin metoda Runge-Kutta de ordinul doi, respectiv patru, parametrii având următoarele semnificații:

*fxy* este numele fişierului de tip *m* care conține funcția *f(x,y)* ,
(*x0,y0*) sunt coordonatele punctului inițial, iar
*x* este punctul în care se cere valoarea aproximativă a soluției *y* ,
*err* este precizia soluției, implicit $10^{-3}$, respectiv $10^{-6}$ ,
*urma* atunci când are valoare diferită de zero se tipăresc rezultatele intermediare.

***Exemplu.*** Să se determine valoarea aproximativă a soluției următoarei probleme Cauchy

$$y' = xy^2+x^3+1,$$
$$y(0) = 1 ,$$

în punctul $x = 2$ , pasul fiind stabilit în mod automat de funcția ode23 (ode45) .

Se creează fişierul de tip *m* numit *fxy* care conține *f*(*x*,*y*) cu secvența

```
% Fisierul cu functia f(x,y) este de tip m
function f=fxy(x,y)
f=x*y^2+x^3+1;
```

după care se apelează funcția ode45 astfel

```
[x,y]=ode45('fxy',0,2,1,0.0001,1) ;
disp('Solutia aproximativa intre x0 si x');
disp(x);
disp(y);
```

## *Exerciții*

Folosind metoda Taylor de ordinul 3 să se găsească soluția aproximativă a următoarelor probleme Cauchy în punctele menționate.

1. $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \quad \text{în} \quad x = 1 \end{cases}$ în 4 paşi.

R. $h = 0.25$

| $x$ | $x_0$=1 | $x_1$=1.25 | $x_2$=1.5 | $x_3$=1.75 | $x_4$=2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | 0 | 0.25781 | 0.56772 | 1.00432 | |
| $y''$ | 1 | 1.16106 | 1.70316 | 2.84558 | |
| $y'''$ | 0 | 1.3374 | 3.26439 | 6.7164 | |
| $y$ | 1 | 1.03125 | 1.13544 | 1.3391 | 1.69659 |

2. $\begin{cases} y' = \dfrac{4x}{y} \\ y(1) = 2 \quad \text{în} \quad x = 2 \end{cases}$ în 4 paşi.

R. $h = 0.25$

| $x$ | $x_0$=1 | $x_1$=1.25 | $x_2$=1.5 | $x_3$=1.75 | $x_4$=2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | 2 | 2.05128 | 2.07279 | 1.00432 | |
| $y''$ | -2 | -1.81149 | -1.5867 | 2.84558 | |
| $y'''$ | 0 | 0.335864 | 0.3667 | 6.7164 | |
| $y$ | 2 | 2.4375 | 2.89465 | 3.36421 | 3.84191 |

Să se determine soluția aproximativă a ecuațiilor diferențiale următoare folosind metoda Euler şi Euler îmbunătățită.

3. $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \quad \text{în} \quad x = 1 \quad \text{cu pasul} \quad h = 0.2 \end{cases}$.

R. Cu metoda Euler pentru

$x_i = x_0+ih$ , $y_{i+1} = y_i+hf(x_i,y_i)$ , $i$=0, 1, ... $n$ , $n$=5 ,

obținem:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $f(x_i,y_i)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0.2 | 1.2 | 0.8667 |
| 2 | 0.4 | 1.3733 | 0.7805 |
| 3 | 0.6 | 1.5294 | 0.7458 |
| 4 | 0.8 | 1.6786 | 0.7254 |
| 5 | 1 | 1.8237 | |

Cu metoda Euler îmbunătățită

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-1} + h, y_{i-1}\, h\, f(x_{i-1}, y_{i-1}))\right]$$

obținem:

| $x_i$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 1.1867 | 1.3484 | 1.4938 | 1.6272 | 1.7542 |

4. $$\begin{cases} y' = -y \ \ -\dfrac{2}{x^2} \\ y(1.5) = \dfrac{2}{3} \ \text{ în } \ x = 2.5 \quad \text{cu pasul} \quad h = 0.2 \ . \end{cases}$$

R. Cu metoda Euler pentru

$x_i = x_0+ih$ , $y_{i+1} = y_i+hf(x_i,y)$ , $i$=0, 1, ... $n$ , $n$=5 ,

obținem:

| $x_i$ | 1.5 | 1.7 | 1.9 | 2.1 | 2.3 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0.66667 | 0.75556 | 0.77979 | 0.76898 | 0.74142 | 0.70709 |

Cu metoda Euler îmbunătățită

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-1} + h, y_{i-1}hf(x_{i-1}, y_{i-1}))\right]$$

obținem:

| $x_i$ | 1.5 | 1.7 | 1.9 | 2.1 | 2.3 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0.66667 | 0.72323 | 0.73822 | 0.72971 | 0.70865 | 0.68148 |

Folosind metoda Runge-Kutta de ordinul patru să se determine soluția aproximativă a următoarelor ecuații diferențiale de ordinul întâi în condițiile precizate în fiecare caz în parte.

5. $$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + y^2 - \dfrac{8}{x^2} \\ y(1) = 2 \ \text{ în } \ x = 2 \end{cases}$$ în 5 paşi.

R. $h = 0.2$

| $x$ | $x_0$=1 | $x_1$=1.2 | $x_2$=1.4 | $x_3$=1.6 | $x_4$=1.8 | $x_5$=2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_1$ | -2 | -1.39534 | -1.03432 | -0.80563 | -0.65645 | |
| $g_2$ | -1.73521 | -1.23279 | -0.92905 | -0.73552 | -0.60971 | |
| $g_3$ | -1.61511 | -1.17043 | -0.89411 | -0.71505 | -0.59759 | |
| $g_4$ | -1.34582 | -1.01161 | -0.7942 | -0.65032 | -0.55593 | |
| $y$ | 2 | 1.66512 | 1.42467 | 1.24218 | 1.09694 | 0.97604 |

6. $$\begin{cases} y' = 0.25y^2 + x^2 \\ y(0) = -1 \ \text{ în } \ x = 1 \end{cases}$$ în 4 paşi.

R. $h = 0.25$

| $x$ | $x_0$=0 | $x_1$=0.25 | $x_2$=0.5 | $x_3$=0.75 | $x_4$=1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_1$ | 0.25 | 0.28158 | 0.43039 | 0.68916 | |
| $g_2$ | 0.25024 | 0.34354 | 0.54889 | 0.86348 | |
| $g_3$ | 0.25023 | 0.34007 | 0.54305 | 0.85678 | |
| $g_4$ | 0.2822 | 0.43109 | 0.68984 | 1.0619 | |
| $y$ | -1 | -0.93612 | -0.84946 | -0.71178 | -0.49547 |

7. Folosind metoda Adams-Bashforth de ordin 3 să se determine soluţia aproximativă a următoarei probleme Cauchy :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{3} - \dfrac{y}{x} - \dfrac{3}{x^2} \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

în punctul $x$=3.5, luând $h$=0.1 şi determinând cu metoda Runge-Kutta de ordin 4 valaorea lui $y$(3.4).

R. Folosind metoda Runge-Kutta de ordin 4 se determină $y$(3.4)=0.88235, şi aplicând formula Adams Bashforth pentru $m$=3 găsim $y$(3.5)=0.85714

8. Folosind metoda Adams-Bashforth de ordin 3 să se determine soluţia aproximativă a următoarei probleme Cauchy :

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} \\ y(2) = 0.5 \end{cases}$$

în punctul $x$=2.5, luând $h$=0.1 şi determinând cu metoda Runge-Kutta de ordin 4 valoarea lui $y$(2.4).

R. Folosind metoda Runge-Kutta de ordin 4 se determină $y$(2.4)=0.41666, şi aplicând formula Adams Bashforth pentru $m$=3 găsim $y$(2.5)=0.40000 .

9. Folosind metoda Adams-Moulton de ordin 2 să se determine soluţia problemei Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 - \dfrac{2y}{x} - \dfrac{2}{x^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$

în punctul $x$=2.25, luând $h$=0.25 şi determinând cu metoda Runge-Kutta de ordin 4 valoarea lui $y$(2.25).

R. Cu metoda Runge-Kutta de ordin 4 se determină valoarea aproximativă $y$(2.25)=0.88717, iar după 3 iteraţii cu metoda Adams-Moulton se obţine rezultatul $y$(2.25)=0.88704.

10. Folosind metoda Adams-Moulton de ordin 2 să se determine soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{3} - \dfrac{y}{x} - \dfrac{3}{x^2} \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

în punctul $x$=3.5, luând $h$=0.1 şi determinând cu metoda Euler îmbunătățită valoarea lui $y(3.4)$.

11. Folosind metoda Adams-Bashforth-Moulton pentru $m_1$=3 şi $m_2$=2 să se determine soluția aproximativă după 3 iterații a problemei Cauchy de la exercițiul 9.