2. Functii de mai multe variabile reale

2.1. Elemente de topologie in R^n

Fie un spatiu liniar (X,K).

Definitia 1. Se numeste produs scalar aplicatia $<\cdot,\cdot>; XxX \to K$ cu axiomele:

$$\begin{aligned}
&i) <x,y> = \overline{<y,x>}, (\forall)x,y \in X \\
&ii) <\lambda x, y> = \lambda <x,y>, (\forall)x,y \in X, (\forall)\lambda \in K \\
&iii) <x_1 + x_2, y> = <x_1, y> + <x_2, y>, (\forall)x_1, x_2, y \in X \\
&iv) <x,x> \geq 0, (\forall)x \in X si <x,x> = 0; daca-si-numai-daca: x = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Observatie: Relatia i) se refera la intervalul numarului (scalarului) <x,y> cand K=C. Pentru K=R, produsul scalar este o functionala biliniara simetrica, pozitiv definita.

Definitia 2. Un spatiu liniar pe care s-a definit un produs scalar se numeste spatiu euclidian.

Exemplu: (R^n,R) este un spatiu euclidian, definind produsul scalar standard astfel:

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n \text{ si } y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n. \tag{2.2}$$

Definitia 3. Aplicatia $\| \cdot \|: X \to R^+ \cup \{0\}$ se numeste norma daca indeplineste axiomele:

$$\begin{aligned}
&i) \|x\| \geq 0, (\forall)x \in X, si \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
&ii) \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, (\forall)\alpha \in K, (\forall)x \in X \\
&iii) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, (\forall)x,y \in X
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Definitia 4. Un spatiu liniar peste care s-a definit o norma se numeste spatiu liniar normat.

Exemplu. (R^n,R) este spatiu normat, definind norma prin:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, (\forall) = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n \tag{2.4}$$

Observatie. Este evident ca, daca (X,K) este spatiu euclidian, el se poate norma luand:

$$\|x\| = \sqrt{<x;x>}, (\forall)x \in X \tag{2.5}$$

Definitia 5. O aplicatie d:XxX→K se numeste distanta daca satisface axiomele:

$$\begin{aligned}
&i) d(x,y) \geq 0, (\forall)x,y \in X, si: d(x,y) = 0 \text{ daca si numai daca x=y} \\
&ii) d(x,y) = d(y,x), (\forall)x,y \in X \text{ (simetrie)} \\
&iii) d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), (\forall)x,y,z \in X \text{ (inegalitatea triunghiului)}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Definitia 6. Un spatiu liniar pe care s-a definit o distanta se numeste spatiu metric.

Exemplu: (R^n,R) este spatiu metric daca se defineste o distanta prin:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, (\forall)x,y \in R^n \tag{2.7}$$

Observatie. Orice spatiu normat devine spatiu metric luand:

$$d(x,y) = \|x-y\|, (\forall)x,y \in X \tag{2.8}$$

Cazuri particulare:

$1°(R,R)$ cu distanta: $d(x,y) = |x-y|, (\forall)x,y \in R$ (2.9)

$2°(R^2,R)$ cu distanta: $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, (\forall)x,y \in R^2$ (2.10)

$3°\left(R^3, R\right)$ cu distanta: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}, (\forall) x, y, z \in R^3$ (2.11)

Vom introduce in spatiul liniar (R^n,R) topologia generala de norma. Fie (X,R) un spatiu liniar normat si fie $x_0 \in X$ un vector arbitrar.

<u>Definitia 7.</u> Se numeste <u>sfera (deschisa)</u> cu centrul x_0 si raza r multimea:

$$S_r(x_0) = \{x \in X \mid \; | x - x_0 | \; | < r\} \tag{2.12}$$

unde r>0 este un numar real (pozitiv).

In particular avem:

$1°)(R, R)$: sfera deschisa este un interval deschis simetric fata de x_0:

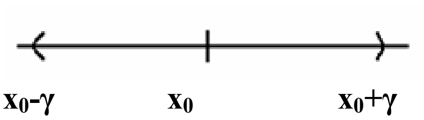


Fig. 1

$2°)(R^2, R)$: sfera deschisa este interiorul unui cerc cu central in x_0 si raza r:

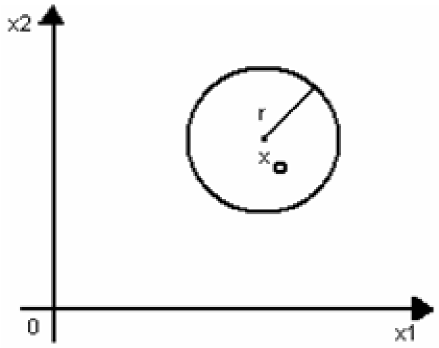


Fig. 2

$3°)(R^3, R)$: sfera deschisa reprezinta interiorul unei sfere cu central in x_0 si raza r:

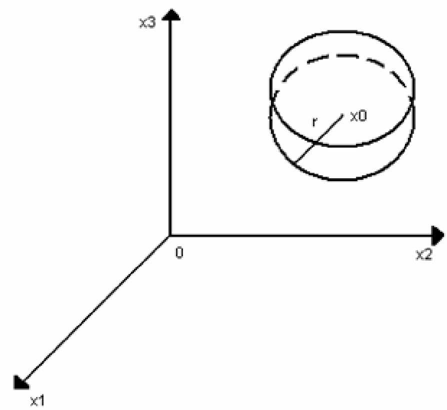


Fig. 3

<u>Definitia 8.</u> Produsul cartezian al intervalelor $I_k=(a_k,b_k)$, k=1,2,…,n se numeste interval <u>n-dimensional</u>, adica:

$$I^n = I_1 \times I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mid x_k \in I_k, k = 1,2,\ldots,n\} \tag{2.13}$$

<u>Definitia 9.</u> O multime $V \subset R^n$ este o vecinatate a punctului $x_0 \in R^n$ daca exista un interval n-dimensional I^n care contine x_0, inclus in multimea V, adica $x_0 \in I^n \subset V$. Rezulta ca:

i) orice interval n-dimensional care-l contine pe x_0 este o vecinatate a lui x_0.
ii) sfera cu centrul x_0 si raza r este o vecinatate a lui x_0.
iii) pe dreapta orice interval (a,b) care contine pe x_0 este o vecinatate a lui x_0.

Definitia 10. Spunem ca $x_0 \in R^n$ este punct interior multimii A daca exista o vecinatate V a lui x_0, inclusa in multimea A, adica:
$x_0 \in V \subset A$.

Definitia 11. Multimea punctelor interioare unei multimi A se noteaza $\overset{0}{A}$ si se numeste interiorul multimii A. Evident ca: $\overset{0}{A} \subset A$.

Definitia 12. O multime A care contine numai puncte interioare (adica $\overset{0}{A} = A$) se numeste multime deschisa.

Exemple:
1°. In (**R,R**), intervalul (a,b) este multime deschisa.
2°. In ($\mathbf{R}^2$,**R**), intervalul bidimensional $I^2 = I_1 \times I_2 = \{(x_1, x_2) | a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$ si cercul $S_r(x_0) = \left\{(x_1, x_2) \middle| (x_1 - x_1^0) + (y_1 - y_1^0)^2 < r^2\right\}$ sunt multimi deschise.

Definitia 13. Un punct x_0 (nu neaparat din A) este punct de acumulare a multimii A daca orice vecinatate V a lui x_0 contine cel putin un punct al multimii A diferit de x_0, adica: $V \cap A - \{x_0\} \neq \varnothing$.

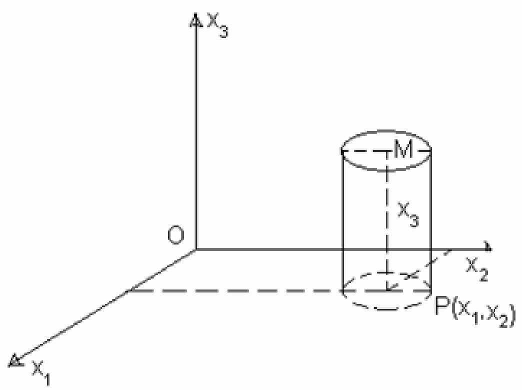
Observatie. Daca multimea A are un punct de acumulare x_0, in orice vecinatate a lui x_0 se afla o infinitate de puncte din multimea A. De multimile care au puncte de acumulare sunt multimi infinite (adica cu o infinitate de elemente).

2.2 Limitele functiilor de mai multe variabile.

Functia reala de n variabile sau functia de o variabila vectoriala este: $f : E \to R$, unde $E \subset R^n$.
Pentru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ corespunde numarul real $y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
In cazul particular n+1 se obtine functia d osingura variabila reala. Graficul functiei de n variabile este multimea de puncte:

$$G_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))\} \subset R^{n+1} \qquad (2.14)$$

Exemplu: Pentru $n = 2, y = f(x_1, x_2)$, rezulta
$G_f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2))\} \subset R^3$, conform figurii: $M(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$



Definitia 14. Functia $f : E \to R, E \subset R^n$ este marginita inferior pe multimea $A \subset E$ daca exista numarul real a astfel incat $f(x) > a, (\forall) x \in A$. Functia este marginita superior pe

$A \subset E$ daca exista numarul real b astfel incat $f(x) < b, (\forall) x \in A$. Functia este marginita pe A daca este marginita inferior si superior pe A, adica daca exista numarul real M>0 astfel incat $|f(x)| < M, (\forall) k \in A$.

<u>Definitia 15.</u> Fie $f: E \to R, E \subset R^n$ si fie x_0 punct de acumulare pentru E. Se spune ca $1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ daca pentru orice vecinatate U a lui 1 exista vecinatatea V a lui x_0 astfel incat: $f(x) \in U, (\forall) x \in V \cap E, x \neq x_0$.

<u>Teorema 1.</u> O conditie necesara si suficienta ca $f: E \to R$ sa aiba limita 1 in punctul de acumulare x_0 este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ sa existe $\eta^{(\varepsilon)} > 0$ astfel incat oricare ar fi $x \in E, x \neq x_0$ sa avem:

$|f(x) - 1| < \varepsilon$ daca $\| x - x_0 \| < \eta^{(\varepsilon)}$ (2.15)

<u>Demonstratie</u>

<u>Necesitatea.</u> Fie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$. Se considera $U = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

Rezulta ca exista V, vecinatate a lui x_0, depinzand de ε, astfel incat $f(x) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), (\forall) x \neq x_0, x \in E \cap V$.

Dar V, fiind vecinatate a lui x_0, va contine o sfera cu centrul in x_0 si raza r, adica: $S_{\eta(\varepsilon)}(x_0) \subset V$. Deci $|f(x) - 1| < \varepsilon, (\forall) \varepsilon > 0$, daca $x \in S_{\eta(\varepsilon)}(x_0) \cap E, x \neq x_0$, deci daca $\| x - x_0 \| < \eta^{(\varepsilon)}, x \in E, x \neq x_0$.

<u>Suficienta</u>. Presupunem relatia adevarata, adica pentru orice $\varepsilon > 0$, $f(x) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ daca $x \in S_{\eta(\varepsilon)}(x_0) \cap E, x \neq x_0$.

Dar orice vecinatate U a lui 1 contine un interval deschis, adica $(\exists) \varepsilon > 0$ astfel incat $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \subset U$. Rezulta ca $f(x) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, oricare ar fi U, vecinatate a lui 1,daca $x \in V \cap E$ si functia f are limita 1 in x_0.

Prezentam fara demonstratie urmatoarea teorema:

<u>Teorema 2.</u> O conditie necesara si suficienta ca $f: E \to R$ sa aiba limita 1 in punctul de acumulare $x_0 = \left(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0}\right)$ al multimii E este pentru orice $\varepsilon > 0$ sa existe un numar $\eta^{(\varepsilon)} > 0$ astfel incat pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E, x \neq x_0$ sa avem $|f(x_1, x_2, ..., x_n) - 1| < \varepsilon$

Daca: $\left|x_1 - x_1^{\ 0}\right| < \eta^{(\varepsilon)}, \left|x_2 - x_2^{\ 0}\right| < \eta^{(\varepsilon)}, ..., \left|x_n - x_n^{\ 0}\right| < \eta^{(\varepsilon)}$

vom scrie: $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^{\ 0} \\ x_2 \to x_2^{\ 0} \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n^{\ 0}}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ (2.16)

vom spune ca f ater in x_0 limita in raport cu ansamblul variabilelor.

2.3. Continuitatea functiilor de mai multe variabile.

<u>Definitia 16.</u> Functia $f: E \to R, E \subset R^n$ este <u>continua</u> in punctul $x_0 \in E$ daca pentru orice vecinatate U a lui $f(x_0)$ exista o vecinatate V a lui x_0 astfel incat pentru orice $x \in V \cap E$ sa avem $f(x) \in U$.

Intr.-un rationament analog cu cel facut in cazul limitei unei functii, inlocuind peste tot 1 cu “$f(x_0)$” se demonstreaza:

Teorema 3. O conditie necesara si suficienta pentru ca functia f sa fie continua in $x_0 \in E$, punct de acumulare a multimii E, este ca sa aiba limita in x_0, egala cu $f(x_0)$, adica:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{2.17}$$

Teorema 4. O conditie necesara si suficienta pentru ca functia f sa fie continua in $x_0 = (x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0}) \in E$ este ca, pentru orice $\varepsilon > 0$ sa existe $\eta^{(\varepsilon)} > 0$ astfel incat, pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ sa avem:

$$\left| f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ n}) \right| < \varepsilon \tag{2.18}$$

$$\left| x_1 - x_1^{\ 0} \right| < \eta^{(\varepsilon)}, \left| x_2 - x_2^{\ 0} \right| < \eta^{(\varepsilon)}, ..., \left| x_n - x_n^{\ 0} \right| < \eta^{(\varepsilon)}$$

Daca $x_0 \in E$ este un punct de acumulare al multimii E, conform cu conditia de continuitate din teorema (4), vom scrie:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^{\ 0} \\ x_2 \to x_2^{\ 0} \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n^{\ 0}}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0}) \tag{2.19}$$

Daca o functie este continua intr-un punct, vom spune ca ea este continua in raport cu ansamblul variabilelor.
Daca functia de o singura variabila x_i, notata:
$y_i = f_i(x_i) = f(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_{i-1}^{\ 0}, x_i, x_{i+1}^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0})$ si numita functia partiala f_i a functiei f este continua in x_i^0, spunem ca $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este continua in raport cu variabila x_i in punctul $x_0 = (x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0})$.

Propozitia 1. Daca functia $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este continua intr-un punct $(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0})$ in raport cu ansamblul variabilelor, atunci ea este continua in acest punct in raport cu fiecare variabila.

Demonstratie:
Fie f_i continua in $(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0})$ si fie functia partiala $y_i = f_i(x_i)$ corespunzatoare.
Din teorema 2, luand $x_1 = x_1^{\ 0}, x_2 = x_2^{\ 0}, ..., x_{i-1} = x_{i-1}^{\ 0}, x_i = x_i^{\ 0}, x_{i+1} = x_{i+1}^{\ 0}, ..., x_n = x_n^{\ 0}$, rezulta ca:
$\left| f(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_{i-1}^{\ 0}, x_i, x_{i+1}^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0}) - f(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0}) \right| < \varepsilon$, pentru orice $\eta^{(\varepsilon)} > 0$, daca $\left| x_i - x_i \right| < \eta^{(\varepsilon)}$. De aici rezulta ca:
$\left| f_i(x_i) - f_i(x_i^{\ 0}) \right| < \varepsilon$ daca $\left| x_i - x_i^{\ 0} \right| < \eta^{(\varepsilon)}$. Deci $f_i(x_i)$ este continua in raport cu x_i^0. Rezulta apoi ca $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ este continua in $(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0})$ in raport cu x_i.

Observatie. Reciproca nu este adevarata; daca o functie este continua intr-un punct in raport cu toate variabilele, nu rezulta ca este continua in acel punct in raport cu ansamblul variabilelor.

Exemplu. Fie functia:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^3 + 3x^2 y}, dc.(x, y) \in R^2 - \{(0,0)\} \\ 0, dc.(x, y) = (0,0) \end{cases}$$

definita pe $E=R^2$ cu valori in R.
In punctul de acumulare $(0,0) \in E$ construim functiile partiale y_1 si y_2 astfel:

$y_1 = f_1(x) = f(x,0) = 0$
$y_2 = f_2(y) = f(0,y) = 0.$

Deoarece:
$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$
$\lim_{y\to 0} f_2(y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$
rezulta ca f este continua in (0,0) in raport cu fiecare variabila. Insa aceasta functie nu este continua in raport cu ansamblul variabilelor. Intr-adevar, luand dreapta care trece prin origine y=mx, pe care vom calcula limita in origine, obtinem:
$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{2m^2x^3}{(1+3m)x^3} = \frac{2m^2}{1+3m}$, care depinde de parametrul m, panta dreptei pe care se afla punctul P((x,y)=(x,mx)) cand tinde spre (0,0). Astfel, functia f nu are limita in (0,0), deci nu este continua in origine.

2.4. Derivate partiale. Diferentiale.

Fie $f : E \to R, E \subset R^n$ si fie
$x_0 = \left(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0}\right) \in E.$
<u>Definitia 17.</u> Functia f este <u>derivabila partial</u> in raport cu variabila x_i in punctul x_0 daca exista:

$$\lim_{x_i\to x_i^0}\frac{f_i(x_i)-f_i\left(x_i^{\ 0}\right)}{x_i - x_i^{\ 0}} = \lim_{x_i\to x_i^0}\frac{f\left(x_1^{\ 0},...,x_{i-1}^{\ 0},x_i,x_{i+1}^{\ 0},...,x_n^{\ 0}\right)-f\left(x_1^{\ 0},...,x_n^{\ 0}\right)}{x_i - x_i^{\ 0}} \qquad (2.20)$$

si este finita.
Limita insasi se numeste <u>derivata partiala a functiei f in raport cu x_i</u> in punctul x_o si se noteaza:

$$f'_{x_i}\left(x_1^{\ 0},...,x_n^{\ 0}\right) = \frac{\partial f\left(x_1^{\ 0},...,x_n^{\ 0}\right)}{\partial x_i} \qquad (2.21)$$

<u>Exemplu:</u> $f(x,y) = x^3 - xy^2$ definita pe R^2. Fie punctul (1,2) in care calculam derivatele partiale:

$$f'_x(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x,2)-f(1,2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x-(-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-3)}{x-1} = -1$$
$$f'_y(1,2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \lim_{y\to 2}\frac{f(1,y)-f(1,2)}{y-2} = \lim_{y\to 2}\frac{1-y^2-(-3)}{y-2} = \lim_{y\to 2}\frac{4-y^2}{y-2} =$$
$$= \lim_{y\to 2}\frac{-(y-2)(y+2)}{y-2} = -4$$

Din definitie rezulta mentinerea constanta a celorlalte variabile (in afara de x_i) deci se efectueaza derivata partiala a unei functii de o singura variabila (adica a unei functii partiale). De aici, cateva observatii utile:
i) pentru a calcula derivata partiala a unei functii in raport cu o variabila, se aplica regulile de derivare ale functiilor de o variabila reala, considerand constante celelalte variabile.

Exemplu: $f(x,y)=x^3-xy^2$

$f'_x(x,y)=3x^2-y^2;\ f'_y(x,y)=-2xy.$

ii) prin efectuarea de operatii algebrice asupra unor functii derivabile partial, se obtin functii derivabile partial.

iii) daca $f(x_1,\ldots,x_n)$ este derivabila partial in raport cu x_i in punctul $x_0=(x_1^{\ 0},x_2^{\ 0},\ldots,x_n^{\ 0})$, atunci f este continua in raport cu x_i in x_0. Daca $f(x_1,\ldots,x_n)$ este derivabila partial in raport cu fiecare variabila x_i in x_0, nu rezulta ca este continua in raport cu ansamblul variabilelor in acest punct. Iata un contra-exemplu:

Fie $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, dc.(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}\\ 0, dc.(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Deoarece $f(x,0)=0;\ f(0,y)=0;\ f(0,0)=0$ se obtin:

$$f'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$$

$$f'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0$$

Deci functia are in origine derivate partiale in raport cu fiecare dintre cele doua variabile x si y. Dar aceasta functie nu este continua in raport cu ansamblul variabilelor, mai exact ea nu este continua in origine, neavand limita in (0,0). Intr-adevar, daca un punct M(x,y) se deplaseaza catre origine pe dreapta y=mx, se obtine:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\dfrac{mx^2}{(1+m^2)x^2}=\dfrac{m}{1+m^2}$, depinzand de panta m a dreptei.

iv) daca $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ are derivate partiale in raport cu fiecare variabila x_i continue sau marginite intr-o vecinatate V a punctului x_0, interior multimii de definitie, atunci se poate demonstra ca f este continua in x_0.

In exemplul anterior se poate constata ca derivatele partiale:

$$f'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}, dc.(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}\\ 0, dc.(x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \text{si}$$

$$f'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}, dc.(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}\\ 0, dc.(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

nu sunt nici continue si nici marginite in nici o vecinatate V a originii.

Definitia 18. Functia $f:E\to R, E\subset R^n$ este <u>derivabila partial in raport cu x_i pe multimea E</u> daca este derivabila partial in raport cu x_i in fiecare punct $x\in E$.

In acest caz se considera o noua functie, numita <u>derivata partiala a functiei f in raport cu x_i</u> notata:

$f'_{x_i}: E\to R, (i=1,2,\ldots,n).$

Daca functiile $f'_{x_i}, (i=1,2,\ldots,n)$ sunt derivabile pe multimea E in raport cu x_j, atunci derivatele lor se numesc <u>derivate partiale de ordinul al doilea</u> in raport cu x_i si x_j. Se noteaza:

$$\left(f'_{x_i}\right)'_{x_j} = f''_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad (2.22)$$

Pentru functiile de n variabile exista n derivate partiale de prdinul intai si n^2 derivate de ordinul al doilea.

Analog se definesc derivate pertiale de ordinul k>2 ale functiei f:

$$\frac{\partial^k f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i^{\alpha_i} \partial x_j^{\alpha_j} ... \partial x_m^{\alpha_m}} \text{ cu } \alpha_i + \alpha_j + ... + \alpha_m = k \qquad (2.23)$$

in raport cu x_m de α_m ori, etc., in raport cu x_j de α_j ori si in raport cu x_i de α_i ori.

<u>Notatii pentru functia de doua variabile f(x,y)</u>

1°. Derivatele partiale de ordinul intai:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y);\ f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad (2.24)$$

2°. Derivatele partiale de ordinul al doilea:

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y);\ f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y);\ f''_{y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y). \end{aligned} \qquad (2.25)$$

In anumite conditii, derivatele partiale de ordinul al doilea mixte (adica f''_{xy} si f''_{yx}) sunt egale.

Prezentam fara demonstratie un astfel de criteriu:

<u>Criteriul lui Schwartz</u>

Daca functia de doua variabile $f : E \to R, E \subset R^2$ are derivate partiale de ordinul al doilea intr-o vecinatate V a punctului $(x_0, y_0) \in E$ si daca $f''_{xy}(x,y)$ si $f''_{yx}(y,x)$ sunt continue in punctul (x_0, y_0), atunci:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(y_0, x_0) \qquad (2.26)$$

<u>Definitia 19.</u> Functia $f : E \to R, E \subset R^2$ este <u>diferentiabila</u> in $(x_0, y_0) \in E$ daca exista numerele $\lambda, \mu \in R$ si o functie $\omega(x,y)$ definita pe E, continua si nula in (x_0, y_0), adica:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \omega(x,y) = \omega(x_0, y_0) = 0 \qquad (2.27)$$

astfel incat, pentru orice $(x,y) \in E$, sa avem egalitatea:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \omega(x,y) \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \qquad (2.28)$$

<u>Proprietati</u>

(P.1) Daca f este diferentiabilala in (x_0, y_0), atunci f are derivate partiale in (x_0, y_0) si $f'_x(x_0, y_0) = \lambda$; $f'_y(x_0, y_0) = \mu$.

(P.2) Daca f este diferentiabila in (x_0, y_0), atunci f este continua in (x_0, y_0).

(P.3) Daca f are derivate partiale $f'_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ intr-o vecinatate V a punctului (x_0, y_0), continue in (x_0, y_0), atunci f este diferentiabila in (x_0, y_0).

Diferentiala de ordinul intai in punctul (x_0, y_0) este:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (2.29)$$

iar diferentiala de ordinul intai se scrie:

$$df(x,y) = f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy \tag{2.30}$$

Se poate utiliza operatorul de diferentiere de ordinul intai, care este

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \tag{2.31}$$

Fie: $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in E \subset R^n$.

Diferentiala de ordinul intai in punctul x_0 pentru o functie de n variabile este:

$$df(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_0)\left(x_1 - x_1^0\right) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^2}\left(x_2 - x_2^0\right) + ... + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\left(x_n - x_n^0\right) \tag{2.32}$$

Notand: $dx_i = x_i - x_i^0, (i = 1,2,...,n)$ se poate scrie operatorul de diferentiere de ordinul intai al unei functii de n variabile:

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x^2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n \tag{2.33}$$

Revenind la cazul n=2 se poate introduce operatorul de diferentiere de ordinul n:

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} \tag{2.34}$$

<u>Exemplu:</u> $f(x,y) = e^{ax+by}$. Se arata ca: $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x,y) = a^k b^{n-k} \cdot e^{ax+by}$.

Deci:

$$d^n f(x,y) = e^{ax+by}\left(a^n dx^n + C_n^1 a^{n-1} b dx^{n-1} dy + ... + C_n^k a^{n-k} b^k dx^{n-k} dy^k + C_n^n b^n dy^n\right)$$

2.5. Formula lui Taylor pentru functii de 2 variabile reale.

Fie $f : E \to R, E \subset R^2$ si fie $(a,b) \in \overset{0}{E}$. Se presupune ca f admite derivate partiale pana la ordinul n+1, continue, in vecinatatea V a punctului (a,b). Atunci:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(a,b) + \frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(a,b) +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)} f(a,b) + R_n \tag{2.35}$$

reprezinta formula lui Taylor, unde restul R_n are expresia:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y+b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)} f\left(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b)\right) \tag{2.36}$$

cu $0<\theta<1$.

<u>Exemplu.</u> Pentru functia $f : E \to R, E = \{(x,y) \in R^2 |\ x > 0, y > 0\}$ definita prin $f(x,y) = x^y$ sa se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea in punctul (1.1), apoi sa se deduca o valoare aproximativa pentru $(1,1)^{1,2}$.

Avem: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1, \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0, \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x \partial y^2} = 0, \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3} = 0.$

Rezulta:

$$T_3(x,y)=1+\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)]+\frac{1}{3!}\left[2(x-1)^2(y-1)\right]=1+(x-1)+(x-1)\cdot(y-1)+$$
Pen
$$+\frac{1}{2}(x-1)^2\cdot(y-1)$$
tru x=1,1 si y=1,2 deducem:

$$(1{,}1)^{1{,}2}\cong 1+0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}2+\frac{1}{2}(0{,}1)^2\cdot 0{,}2=0{,}1021.$$

2.6. Extremele functiilor de mai multe variabile reale.

Fie $f:E\to R, E\subset R^n$ si fie un punct $x_0\in E$.

Definitia 20. Daca exista o vecinatate V a lui x_0 astfel incat: $f(x)\cdot f(x_0)\geq 0,(\forall)x\in V\cap E$, atunci x_0 se numeste punct minim (local) si:

$f(x_0)=\min f(x)$.

Definitia 21. Daca exista o vecinatate V a lui x_0 astfel incat: $f(x)\cdot f(x_0)\leq 0,(\forall)x\in V\cap E$, atunci x_0 se numeste punct de maxim (local) si:

$f(x_0)=\max f(x)$.

Determinarea punctelor de extrem pentru functii de 2 variabile.

Fie $f:E\to R, E\subset R^2$.

Definitia 22. Punctul (a,b) se numeste punct stationar al functiei f daca:

(i) $(a,b)\in \dot{E}$

(ii) exista $f'_x(a,b)$ si $f'_y(a,b)$ si sunt nule:

$$f'_x(a,b)=f'_y(a,b)=0 \tag{2.37}$$

O conditie necesar pentru existenta punctului de extrem este continuta in urmatoarea teorema:

Teorema 5. Daca $f:E\to R, E\subset R^2$ are derivate partiale intr-un punct de extrem (a,b), interior multimii E, atunci acest punct este punct stationar al functiei.

Demonstratie. Fie $E_x=\{x|\ (x,b)\in E\}$ si functia $g:E_x\to R$, definita prin g(x)=f(x,b), derivabila in x=a. Dar x=a$\in \overset{0}{E}_x$ este punct de extrem al functiei g(x), deci conform teoremei lui Fermat, $g'(a)=f'_x(a,b)=0$.

Analog, fie $E_y=\{y|\ (a,y)\in E\}$ si functia $h:E_y\to R$, definita prin h(y)=f(a,y). Se deduce, prin teorema lui Fermat, ca: $h'(b)=f'_y(a,b)=0$.

Cum $(a,b)\in\dot{E}$, rezulta ca (a,b) este punct stationar.

Rezulta ca punctele de extrem se afla printre punctele stationare ale functiei. Sunt utile deci teoremele ce dau conditii suficiente.

Teorema 6. Fie (a,b) punct stationar al functiei f. Daca f are derivate partiale de ordinul 3, continue intr-o vecinatate V a punctului (a,b) si daca se noteaza:

$$r=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}, s=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}, t=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \tag{2.38}$$

atunci:

(i) daca $rt-s^2>0$, atunci (a,b) este punct de extrem, si anume:

(a) minim daca r>0

(b) maxim daca r<0

(ii) daca rt-s^2<0, atunci (a,b) nu este punct de extrem (este punct sa).

Demonstratie: In ipotezele facute, se scrie formula lui Taylor de ordinul 2 in (a,b):

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2!}\left[r(x-a)^2 + 2s(x-a)(y-b) + t(y-b)^2\right] + R^2.$$

Notand P=(a,b), X=(x,y), ρ=d(P,X)=$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $\alpha = \prec(PX, OX), x-a = \rho\sin\alpha, y-b = \rho\cos\alpha$, cu $\alpha \in [0,2\pi)$. Presupunem $\alpha \neq 0$ si dam factor comun fortat pe $(y-b)^2$ (in cazul $\alpha = 0$, se da factor comun fortat pe $(x-a)^2$:

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{(y-b)^2}{2!}\left\{\left[r\cdot\left(\frac{x-a}{y-b}\right)^2 + 2s\cdot\frac{x-a}{y-b} + t\right] + R_2\frac{2}{\rho^2\sin^2\alpha}\right\}$$

Avand derivate de ordinul 3 continue, acestea sunt marginite, adica exista M>0, astfel incat: $|R_2| < \frac{\rho^3}{3!}\cdot M$, deci: $0 \leq \lim_{\rho\to 0}\frac{|R_2|}{\rho^2} \leq \frac{\rho\cdot M}{3!} \to 0$

Rezulta ca $\lim_{\rho\to 0}\frac{|R_2|}{\rho^2} = 0$, adica exista o vecinatate a punctului P=(a,b) astfel incat semnul diferentei intre f(x,y) si f(a,b) depinde de semnul trinomului de gradul doi:

$$T(u) = ru^2 + 2su + tm, u = \frac{x-a}{y-b}.$$

Daca $\Delta = s^2 - rt < 0,$ atunci T9u) pastreaza semn constant, semnul lui r. Rezulta ca:

a) $f(x,y) - f(a,b) \geq 0$ cand r>0 si (a,b) este punct de minim.

b) $f(x,y) - f(a,b) \leq 0$ cand r<0 si (a,b) este un punct de maxim.

Daca $s^2 - rt > 0$ sau $rt - s^2 < 0$, atunci trinomul T(u) si deci diferenta $f(x,y) - f(a,b)$ nu are semn constant, deci (a,b) nu este punct de extrem.

Generalizare. Fie $f: E \to R, E \subset R^n$. Daca E este o multime deschisa, atunci punctele stationare ale functiei sunt solutiile sistemului de ecuatii:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

iar punctele de extrem se afla printre punctele stationare.

Teorema 7. Daca $f: E \to R, E \subset R^n$ si $P = (a_1, a_2, ..., a_n)$ punct stationar al functiei f. Daca f admite derivate de ordinul trei, continue intr-o vecinatate a punctului p si daca noteaza:

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f(a_1, a_2, ..., a_n)}{\partial x_i \partial x_j}; i, j = a, s, ..., n \tag{2.40}$$

Atunci:

(i) daca toate numerele:

$$\Delta_1 = |A_{11}|; \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11}A_{12} \\ A_{21}A_{22} \end{vmatrix}; ...; \Delta_n = \begin{vmatrix} A_{11}A_{12}...A_{1n} \\ .... \\ A_{n1}A_{n2}...A_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.41}$$

sunt pozitive, atunci P este punct de minim.

(ii) daca semnele alterneaza: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0; \Delta_3 > 0; ...; \Delta_{2k-1} < 0; \Delta_{2k} > 0 \left(k = 1,2,3,..., \left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right)$,

atunci P este punct de maxim.

Demonstratie: In punctul P, stationar, derivatele partiale de ordinul intai sunt nule: $f'_{x_i}(P) = 0, i = 1,2,...,n.$ Se scrie formula lui Taylor de ordinul al doilea in punctul P:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(a_1, a_2, ..., a_n) + \frac{1}{2!} \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{(2)} f(P) +$$

$$+ R_2$$

Fie $\rho = d(X, P) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$. Rezulta ca:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) =$$

$$= \frac{\rho^2}{2!} \left[\left(\frac{x_1 - a_1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2 - a_2}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \frac{x_n - a_n}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(2)} f(P) + 2\frac{R^2}{\rho^2} \right].$$

Dar $\lim_{\rho \to 0} \frac{|R_2|}{\rho^2} = 0,$ deci rezulta ca exista o vecinatate V a punctului P astfel incat semnul diferentei f(X)-f(P) este dat de semnul expresiei:

$$\left(\frac{x_1 - a_1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2 - a_2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \frac{x_n - a_n}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(2)} f(P) = \frac{1}{\rho^2} \cdot Q(X)$$, unde:

$Q(X) = \sum_{i;j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j)$ este o forma patratica in (x_i-a_i) unde i=1,2,...,n.

Daca sunt indeplinite conditiile i), Q(X) este o forma (functionala) pozitiv definita, deci $f(X) - f(P) \geq 0, (\forall) X \in V$ si P este punct de minim. Daca sunt indeplinite conditiile ii), atunci Q(X) este forma patratica negativ definita si $f(X) - f(P) \leq 0, (\forall) X \in V$ adica P este punct de maxim.

Exemplu. Fie o functie $f : E \to R, E = \{(x, y) \in R^2 | \; x \neq 0, y \neq 0\}$ definita prin $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$. Sa determinam extremele acestei functii.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \frac{50}{x^2} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \frac{20}{y^2} = 0.$ Se obtine punctul stationar P=(5,2).

Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

deci: $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5,2) = \frac{4}{5}; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(5,2) = 1; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(5,2) = 5,2.$

Rezulta: rt-s^2=3>0 si $r = \frac{4}{5} > 0$ deci punctul P(5,2) este punct de minim, iar f(5,2)=30=minf(x,y).

2.7. Extreme conditionate (extreme cu legaturi).

Fie functia $f : E \to R, E \subset R^n$ si fie sistemul de ecuatii:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

Fie multimea A a solutiilor sistemului (2.42), adica:

$$A = \{x \in R^n |\ x \in E, F_i(x) = 0, i = 1,2,...,k\} \tag{2.43}$$

<u>Definitia 23.</u> Functia f are in punctul $x_0 \in A$ <u>extrem conditionat</u> de legaturile (2.42) (sau extrem relativ la multimea A), daca restrictia functiei f la submultimea $A \subset E$ are un extrem in x_0.

<u>Definitia 24.</u> Se numeste <u>restrictia</u> functiei $f : E \to R$ la multimea $A \subset E$ functia $f : A \to R$.

Extremele conditionate se mai numesc extreme cu legaturi.

Prezentam fara demonstratie o teorema care fundamenteaza metoda de determinare a extremelor conditionate.

<u>Teorema 8.</u> Fie $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in A$. Daca:

i) functiile f(x), $F_1(x)$,...,$F_2(x)$ definite pe $E \subset R^n$ au derivate partiale continue intr-o vecinatate V a lui x_0.

ii) matricea functionala $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\|_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le n}}$ de ordin kxn are in x_0 rangul k (egal cu numarul legaturilor din (2,42)).

iii) x_0 este punct de extrem conditionat de sistemul (2.42),

atunci exista k numere: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ astfel incat:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \lambda_1 \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_1} + ... + \lambda_k \frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \lambda_1 \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_2} + ... + \lambda_k \frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_2} = 0 \\ .... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) + \lambda_1 \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_n} + ... + \lambda_k \frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

<u>Definitia 25.</u> Un punct x_0 in care matricea functionala $\left\| \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right\| k \times n$ are rangul k si verifica conditiile (2.42) si (2.44) se numeste punct stationar al functiei f, conditionat de sistemul (2.42), iar scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ se numesc multiplicatorii lui Lagrange.

Cu aceasta se poate enunta:

<u>Teorema 9.</u> Orice punct de extrem conditionat este punct stationar conditionat.

Reciproca nu este adevarata.

Daca E este o multime deschisa, determinarea punctelor de extrem conditionat se face astfel:

I. Conditii necesare de extrem

$1°$. Se construieste functia lui Lagrange:

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = f_{(x)} + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_k F_k(x) \qquad (2.45)$$

cu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si multiplicatorii lui Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ nedeterminati.

$2°$. Se formeaza sistemul de n + k necunoscute:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1}(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k}(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

(2.46)

$3°$. Se rezolva sistemul (2.46) determinand solutiile $(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, deci punctele stationare $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ si valorile corespunzatoare ale multiplicatorilor $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0)$. Punctele de extrem se gasesc printre punctele stationare.

II. Conditii suficiente de extrem

Presupunad ca $f(x), F_1(x), \ldots, F_k(x)$ au derivate partiale de ordinul 3, continue intr-o vecinatate a punctului stationar $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, evaluam diferenta $f(x) - f(x_0)$ pentru punctele x care satisfac sistemul (2.42). In aceste puncte obtinem:

$$f(x) - f(x_0) = \phi(x) - \phi(x_0) \qquad (2.47)$$

Pentru functia $\phi(x)$, tinand seama ca $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_0) = 0$ si, inlocuind multiplicatorii cu $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0$ corespunzator punctului stationar x_0 se obtine:

$$\phi(x) = \phi(x_0) + 0 + \frac{1}{2!}\left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)} \phi(x_0) + R_2 \qquad (2.48)$$

Fie $\rho = d(x, x_0)$. Se utilizeaza faptul ca: $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|R_2|}{\rho^2} = 0$

Rezulta deci:

$f(x) - f(x_0) = \phi(x) - \phi(x_0) = \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R_2$ unde:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^{2\phi}}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \qquad (2.49)$$

este o forma patratica in $dx_i = x_i - x_i^0, (i = 1,2,\ldots,n)$. Dar cum variabilele x_i nu sunt independente, ele satisfacand conditiile de legatura (2.42), rezulta ca nici diferentialele $dx_i = x_i - x_i^0$ nu sunt independente.
Rezulta al patrulea pas in determinarea punctelor de extrem:

4°. Se diferentiaza in x_0 conditiile de legatura (2.42), obtinand:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{cases} \tag{2.50}$$

Este vorba de un sistem de ecuatii liniar, omogen in necunoscutele $dx_1,\ldots,dx_n$ al carui determinant este cel din teorema (8) (relatiile (2.44)), nenul, numit iacobin.

$$\frac{D(F_1,F_2,\ldots,F_k)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0)\ldots\ldots\frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0)\ldots\ldots\frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.51}$$

Deci sistemul (2.50) este nedeterminat.

5°. Se determina $dx_1, dx_2, \ldots, dx_k$ in functie de $dx_j (j = k+1, k+2, \ldots, n)$. Rezulta ca, intr-o vecinatate V a lui x_0, avem (cu notatia: $A_{ij} = \frac{\partial^2 \phi(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$):

$$\operatorname{sgn}[f(x) - f(x_0)] = \operatorname{sgn} \sum_{i;j=1}^{n-k} A_{k+i,k+j} dx_{k+i} dx_{k+j} = \operatorname{sgn} \sum_{i;j=1}^{n-k} A'_{ij} dx'_i dx'_j \tag{2.52}$$

$$\text{unde: } \begin{cases} A'_{ij} = A_{k+i;k+j} \_\_ i; j = 1,2,\ldots,n-k \\ dx'_i = dx_{k+i} \_\_ i = 1,2,\ldots,n-k \end{cases} \tag{2.53}$$

Cum A'_{ij} sunt constante, relatia (2.52) contine o forma patratica in diferentialele $dx'_i (i = 1,2,\ldots,n)$ care au valori arbitrare.

6°. Se construiesc determinantii:

$$\begin{vmatrix} A'_{11} A'_{12} \ldots\ldots A'_{1i} \\ A'_{21} A'_{22} \ldots\ldots A'_{2i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A'_{i1} A'_{i2} \ldots\ldots A'_{ii} \end{vmatrix} \tag{2.54}$$

$i = 1,2,\ldots,n$

Se cerceteaza sumele acestora:
a) daca toate numerele $\Delta_i > 0 (i = 1,2,\ldots,n-k)$, atunci forma patratica Q(x) este pozitiv definita si $f(x) - f(x_0) \geq 0$, pentru orice vecinatate V a lui x_0.

b) daca toate numerele $\Delta_i^* = (-1)^i \Delta_i > 0 (i = 1,2,\ldots,n-k)$, atunci forma patratica Q(x) este negativ definita si $f(x) - f(x_0) \le 0$, pentru orice vecinatate V a lui x_0. Deci x_0 este punct de maxim.

Metoda utilizata pentru determinarea punctelor de extrem conditionat se numeste <u>metoda multiplicatorilor lui Lagrange</u>.

<u>Exemplu:</u> Fie $f : R^2 \to R$, definita prin $f(x,y) = 5x^2 + 3xy + y^2$, cu ecuatia: $x^2 + y^2 = 1$. Rezulta ca $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Se aplica metoda multiplicatorilor lui Lagrange:

$F(x,y,\lambda) = 5x^2 + 3xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$F(x,y,\lambda) = 10x + 3y + 2\lambda x = 0$

$F(x,y,\lambda) = 3x + 2y + 2\lambda y = 0$

$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Se obtin solutiile:

$x_1^0 = \frac{1}{\sqrt{10}}; y_1^0 = -\frac{3}{\sqrt{10}}; \lambda_1^0 = -\frac{1}{2}$

$x_2^0 = \frac{-1}{\sqrt{10}}; y_2^0 = \frac{3}{\sqrt{10}}; \lambda_2^0 = -\frac{1}{2}$

$x_3^0 = \frac{3}{\sqrt{10}}; y_3^0 = \frac{1}{\sqrt{10}}; \lambda_3^0 = -\frac{11}{2}$

$x_4^0 = -\frac{3}{\sqrt{10}}; y_4^0 = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \lambda_4^0 = -\frac{11}{2}$

$dF(x,y) = 2xdx + 2ydy = 0$, deci $dy = -\frac{x}{y}dx$

$\phi''_{x^2}(x,y,\lambda_1^0) = \phi''_{x^2}(x,y,\lambda_2^0) = 10 - 1 = 9$

$\phi''_{xy}(x,y,\lambda_1^0) = \phi''_{xy}(x,y,\lambda_2^0) = 3$

$\phi''_{y^2}(x,y,\lambda_1^0) = \phi''_{y^2}(x,y,\lambda_2^0) = 1$

$Q(x,y) = 9dx^2 + 6dxdy + dy^2 = \left(9 - \frac{6x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dx^2$.

Pentru $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}; -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ se obtine $Q(x_1^0, y_1^0) = \frac{100}{9}dx^2 > 0$, iar pentru $P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ se obtine $Q(x_2^0, y_2^0) = \frac{100}{9}dx^2 > 0$, deci P_1 si P_2 sunt puncte de minim conditionat. Analog cazul $\lambda_3^0 = \lambda_4^0 = -\frac{11}{2}$ conduce la:

$$\phi''_{x^2}\left(x, y, \lambda_3^0\right) = \phi''_{x^2}\left(x, y, \lambda_4^0\right) = -1$$
$$\phi''_{xy}\left(x, y, \lambda_3^0\right) = \phi''_{xy}\left(x, y, \lambda_4^0\right) = 3$$
$$\phi''_{y^2}\left(x, y, \lambda_3^0\right) = \phi''_{y^2}\left(x, y, \lambda_4^0\right) = -9$$
$$Q(x, y) = -dx^2 + 6dxdy - 9dy^2 = \left(-1 + \frac{6x}{y} - 9\frac{x^2}{y^2}\right)dx^2.$$

Pentru $P_3 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ si $P_4 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ se obtine:
$Q\left(x_3^0, y_3^0\right) = Q\left(x_4^0, y_4^0\right) = -64dx^2 < 0$, deci P_3 si P_4 sunt puncte de maxim conditionat. Fie $A = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$;

$$\min_{(x,y)\in A} f(x, y) = f(P_1) = f(P_2) = \frac{3}{10} = 0{,}3$$
$$\max_{(x,y)\in A} f(x, y) = f(P_3) = f(P_4) = \frac{55}{10} = 5{,}5$$