

Anexa I

Conice date prin ecuații reduse

Fie E_2 spațiul punctual euclidian bidimensional și $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ (xOy) un reper cartezian ortonormat.

Definiția A1. Elipsa este locul geometric al punctelor din planul euclidian a căror sumă a distanțelor la două puncte fixe distincte F_1 și F_2 este constantă.

Fie $a, c \in \mathbf{R}_+$ și punctele $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0) \in E_2$. Coordonatele oricărui punct $M(x, y) \in E_2$ cu proprietatea $\|MF_1\| + \|MF_2\| = 2a$ satisfac ecuația:

$$(A1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ecuația (A1) este ecuația carteziană a elipsei. Este ușor de văzut că avem și următoarele ecuații parametrice: $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Elementele principale ale elipsei sunt: punctele F_1 și F_2 - *focarele* elipsei; $\delta(F_1, F_2) = 2c$ - *distanța focală*; numărul real a - *semi-axa mare*, numărul real b - *semi-axa mică*; punctele $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(b,0)$, $B'(-b,0)$ - *vârful elipsei*, drepte $x = \pm \frac{a^2}{c}$ - *drepte directoare* ale elipsei și $e = \frac{c}{a} < 1$ - *excentricitatea* elipsei.

Facem observația că axele Ox și Oy ale reperului cartezian sunt axe de simetrie ale elipsei și originea O a reperului este centrul elipsei. Din acest motiv, reperul ortonormat xOy se numește *canonic* iar ecuația (A1) se numește *reducă*.

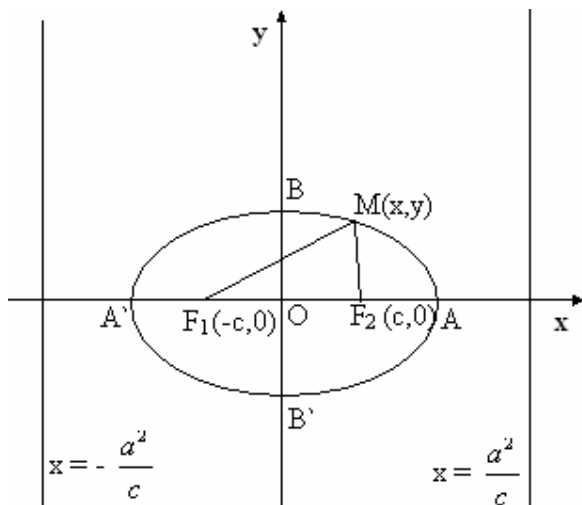


Fig. A1

Se cunoaște faptul că elipsa, caracterizată de ecuația (A1), reprezintă locul geometric al punctelor $M(x,y)$ care satisfac una din relațiile: $\frac{\|MF_1\|}{\delta(M,d_1)} = e$ sau $\frac{\|MF_2\|}{\delta(M,d_2)} = e$.

De asemenea se poate arăta ușor că perpendiculara pe tangenta într-un punct oarecare al elipsei este bisectoare a unghiului razelor focale în acest punct (proprietatea optică a elipsei).

Definiția A2. Hiperbola este locul geometric al punctelor din planul euclidian E_2 pentru care valoarea absolută a diferenței distanțelor la două puncte fixe, distincte F_1 și F_2 este constantă.

Fie $a, c \in \mathbf{R}_+$ și punctele $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0) \in E_2$. Coordonatele oricărui punct $M(x,y) \in E_2$ cu proprietatea $|MF_1 - MF_2| = 2a$, cerută de definiția hiperbolei, satisfac ecuația:

$$(A2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ecuația (A2) este ecuația redusă (carteziană) a hiperbolei. Ca și în cazul elipsei avem următoarele ecuații parametrice: $x = \pm a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbf{R}$

Elementele principale ale unei hiperbole sunt: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – focarele hiperbolei; $A'(-a,0)$, $A(a,0)$ – vârfurile hiperbolei; a, b – semiaxele hiperbolei;

dreptele $y = \pm \frac{b}{a} x$ – asimptotele hiperbolei; dreptele $x = \pm \frac{a^2}{c}$ – directoarele

hiperbolei și $e = \frac{c}{a} > 1$ – excentricitatea hiperbolei. Axele Ox și Oy ale reperului

xOy sunt axe de simetrie ale hiperbolei iar originea reperului este centru de simetrie al hiperbolei.

Hiperbola caracterizată de ecuația (A2) reprezintă și

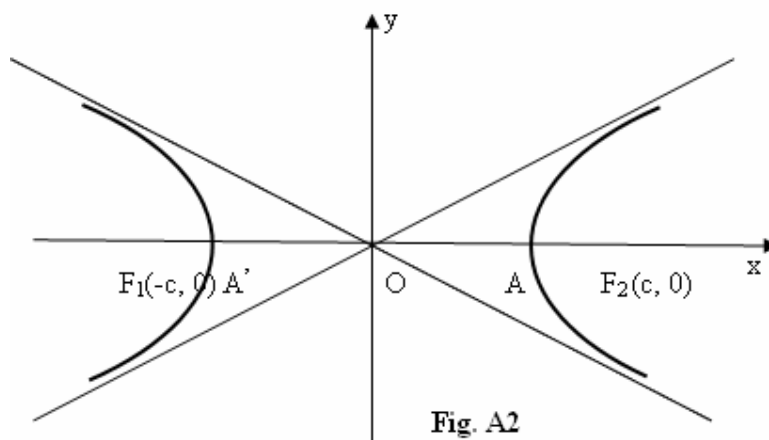


Fig. A2

locul geometric al punctelor $M(x,y) \in E_2$, care satisfac una din relațiile :

$$\frac{\|MF_1\|}{\delta(M,d_1)} = e \text{ sau } \frac{\|MF_2\|}{\delta(M,d_2)} = e,$$

unde dreptele d_1 și d_2 sunt directoarele hiperbolei. Tangenta la hiperbolă, într-un punct al ei, este bisectoarea unghiului razelor focale (proprietatea optică a hiperbolei).

Definiția A3. Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix F (focar) și o dreaptă fixă Δ (directoare).

Fie $p \in \mathbf{R}_+$. Considerăm punctul $F(\frac{p}{2}, 0)$ și dreapta $(\Delta): x = -\frac{p}{2}$. Atunci

coordonatele punctelor $M(x,y) \in E_2$ cu proprietatea $\delta(M,F) = \delta(M, \Delta)$ satisfac ecuația:

$$(A3) \quad y^2 = 2px, \quad (p > 0).$$

Elementele parabolei sunt: $F(\frac{p}{2}, 0)$

– focarul parabolei; numărul real $\frac{p}{2}$

- distanța focală; $O(0,0)$ - vârful parabolei; Ox - axa transversală a parabolei (Ox este axa de simetrie pentru parabolă); Oy - axa

tangentă la parabolă și dreapta $\Delta: x$

$= -\frac{p}{2}$ care este directoarea

parabolei. Excentricitatea parabolei este $e = 1$.

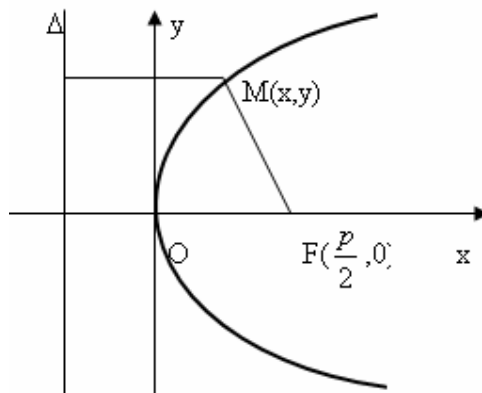


Fig. A3