1.Serii

1.1 Limita inferioara si superioara a unui sir. Sir Cauchy.

Fie (a_n) $n \geq 0 \subset R$ un sir de numere reale si $A_n = \{a_n, a_{n+1}, ...\} (\forall) n \in \mathrm{N}$.
Notam:
$x_n = \inf A_n = \inf\limits_{k \geq n} a_k \in \overline{R}$, si
$v_n = \sup A_n = \sup\limits_{k \geq n} a_k \in \overline{R}$.
Avem, in mod evident $x_n \leq y_n, (\forall) n \in \mathrm{N}$; deoarece $A_{n+1} \subset A_n, (\forall) n \in \mathrm{N}$, rezulta ca $x_n \leq x_{n+1}$ si $y_{n+1} \leq y_n, (\forall) n \in \mathrm{N}$, adica sirul $(x_n)_n \geq 0$ este crescator, iar sirul $(y_n)_n \geq 0$ este descrescator.
Cum orice sir monoton are limita in $\overline{R}$, fie:
$l = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sup\limits_{n \in \mathrm{N}} x_n \in \overline{R}$, si
$L = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \inf\limits_{n \in \mathrm{N}} y_n \in \overline{R}$.

Definitia 1. Elementul $1 \in \overline{R}$, (respectiv $L \in \overline{R}$ definit mai sus se numeste limita inferioara (respectiv limita superioara) a sirului $(a_n)_n \geq 0$ si se noteaza:

$\underline{\lim} a_n$ sau lim inf a_n (respectiv $\overline{\lim} a_n$ sau lim sup a_n).

Observatia 1. Din definitia 1 rezulta imediat egalitatile:

$\underline{\lim} a_n = \sup\limits_{n \in N} \inf\limits_{k \geq n} a_k = \sup\limits_{n \in N} \inf\limits_{k \geq n_0 + n} a_k$

$\overline{\lim} a_n = \inf\limits_{n \in N} \sup\limits_{k \geq n} a_k = \inf\limits_{n \in N} \sup\limits_{k \geq n_0 + n} a_k$

pentru orice $n_0 \in N$.
De asemenea, din urmatorul sir de inegalitati evidente:
$x_n \leq x_{n+m} \leq y_{n+m} \leq y_m$, $(\forall) m, n \in N$, obtinem $\underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n$.

Exemplul 1. Pentru $(a_n)_n \geq 0$, unde $a_n = (-1)^{n+1}$ avem:

$\inf\limits_{k \geq n} (-1)^{k+1} = -1$ si $\sup\limits_{k \geq n} (-1)^{k+1} = 1$

$\underline{\lim} a_n = \sup\limits_{n \in N} \inf\limits_{k \geq n} (-1)^{k+1} = -1$ si $\lim a_n = \inf\limits_{n \in N} \sup\limits_{k \geq n} (-1)^{k+1} = 1$

Definitia 2. Sirul $(a_n)_n \geq 0 \subset R$ se numeste Cauchy (sau fundamental) daca $(\forall) n \in N, n \geq n_\varepsilon si (\forall) p \in N^*$ sa avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

Teorema 1. (Criteriul general a lui Cauchy).
Un sir $(a_n)_n \geq 0$ de numere reale este convergent daca si numai daca este sir Cauchy.

Demonstratie: Presupunem ca exista $a \in R$ astfel incat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ si fie $\varepsilon > 0$. Pentru $\frac{\varepsilon}{2} > 0 (\exists) n_\varepsilon^{'} \in N$ astfel incat $(\forall) n \in N, n \geq n_\varepsilon^{'}$ sa avem:

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luam $n_\varepsilon = n_\varepsilon^{'}$ si fie $n \geq n_\varepsilon$ si $p \in N^*$; deoarece

$n + p \geq n_\varepsilon$ avem $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|a_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Folosind inegalittea:

$|a_{n+p} - a| = |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| \leq |a_{n+p} - a| + |a_n - a|$, obtinem $|a_{n+p} - a| < \varepsilon$, deci sirul $(a_n)_n \geq 0$ este Cauchy.

Reciproc, presupunem ca sirul $(a_n)_n \geq 0$ este Cauchy si fie $\varepsilon > 0$; datorita ipotezei $(\exists) n_\varepsilon^{'} \in N$ astfel incat $(\forall) n \in N, n \geq n_\varepsilon^{'}$ si $(\forall) p \in N^*$ sa avem:

$|a_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, deci $a_n - \frac{\varepsilon}{2} < a_{n+p} < a_n + \frac{\varepsilon}{2}, (\forall) n \geq n_\varepsilon^{'} (\forall) p \in N$.

Luam $n_\varepsilon = n_\varepsilon^{'}$ si fie $n, k \in N, n \geq n_\varepsilon$; deoarece $k + p \in N, (\forall) p \in N$, avem de asemenea:

$a_n - \frac{\varepsilon}{2} < a_{n+k+p} < a_n + \frac{\varepsilon}{2}, (\forall) p \in N$, de unde:

$a_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf_{j \geq k+k} a_j < a_n + \frac{\varepsilon}{2}$, deci

$a_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_{n+k} < a_n + \frac{\varepsilon}{2}, (\forall) k \in N$, de unde obtinem:

$a_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim a_k < a_n + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |a_n - \underline{\lim} a_k| < \varepsilon$.

In mod similar se poate obtine $|a_n - \overline{\lim} a_k| < \varepsilon$, si datorita unicitatii limitei unui sir, obtinem: $\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n \in R$, adica sirul $(a_n)_n \geq 0$ este convergent.

Teorema 2. Un sir de numere reale $(a_n)_n \geq 0$ este convergent daca si numai daca limita sa inferioara si limita sa superioara sunt reale egale, si, in plus, avem:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$

Demonstratie. Daca $(a_n)_n \geq 0$ este convergent, atunci, din teorema 1, rezulta ca $(a_n)_n \geq 0$ este sir Cauchy si, din demonstratia aceleiasi teoreme, obtinem concluzia implicatiei de la stanga la dreapta.

Reciproc, presupunem ca $l = L = a \in R$ si fie $\varepsilon > 0$;

avem $1 - \varepsilon > \sup x_n$, deci $1 - \varepsilon$ nu este un mejorant pentru sirul $(x_n)_n \geq 0$, prin urmare exista $n_\varepsilon^{'} \in N$ astfel incat:

$1 - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}^{'} \leq a_n, (\forall) n \in N, n \geq n_\varepsilon^{'}$ (1)

In mod analog, avem $L + \varepsilon > \inf_{n \in N} y_n$, deci $L + \varepsilon$ nu este un minorant pentru sirul $(y_n)_n \geq 0$ prin urmare exista un $n_\varepsilon^{''} \in N$, astfel incat:

$L + \varepsilon > y_{n_\varepsilon}^{''} \geq a_n, (\forall) n \in N, n \geq n_\varepsilon^{''}$ (2)

Luam $n = \max\{n_\varepsilon^{'}, n_\varepsilon^{''}\}$ si fie $n \in N, n \geq n_\varepsilon$; din (1), (2) si $l = L = a$ obtinem:

$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon, deci \lim_{n\to\infty} a_n = a,$ adica sirul $(a_n)_n \geq 0$ este convergent.

1.2. Serii numerice. Convergente. Proprietati.

Definitia 3. Se numeste serie de numere reale de termen general u_n perechea de siruri $((u_n)_{u\geq 0}, (s_n)_{n\geq 0}), unde (s_n)_{n\geq 0}$, cu $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ se numeste sirul sumelor partiale ale seriei. Aceasta serie se noteaza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \sum_{n\in N} u_n, \sum_{n\geq 0} u_n \text{ sau } u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$$

Se defineste in mod similar seria $\sum_{n=k}^{\infty} u_n = u_k + u_{k+1} + ...,$ unde $k \in N^*$.

Definitia 4. O serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ se numeste convergenta daca sirul $(s_n)_{n\geq 0}$ al sumelor ei partiale este convergent; in acest caz numarul $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ se numeste suma seriei si scriem $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$.

O serie care nu este convergenta se numeste divergenta.

Observatia 2. Suma seriei, asa dupa cum s-a vazut in definitia 4, se noteaza cel mai adesea prin aceeasi configuratie de simboluri, ca si seria insasi, deoarece aceasta nu duce la eventuale confuzii cand tinem seama de context. Problema principala legata de studiul unei serii este stabilirea naturii ei, adica a decide daca aceasta este convergenta sau divergenta si, in caz de convergenta, evaluarea exacta sau macar aproximativa a sumei ei se impune adesea.

Exemplul 2. Fie $a, q \in R, a \neq 0.$ seria geometrica:

$a + aq + ... + aq^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ (cu conventia $q^0 = 1$ pentru $q \in R$ este convergenta daca si numai daca $a \in R \setminus \{0\}$ si $q \in (-1,1),$ iar suma ei este in acest caz $\frac{a}{1-q}$, adica putem scrie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Intr-adevar, avem $s_n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pentru $a \in R \setminus \{0\}, q \in R \setminus \{1\}$ si

$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq}{1-q}; \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a}{1-q}$, daca si numai daca $a \in R \setminus \{0\}$ si $q \in (-1,1)$.

Propozitia 1. (Criteriul general al lui Cauchy pentru serii).

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergenta daca si numai daca pentru $(\forall) p \in N^*$ sa avem $|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon.$

Demonstratie: Seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ sirul $(s_n)_{n\geq 0}$ converge $\Leftrightarrow$ $(s_n)_{n\geq 0}$ este sir Cauchy $\Leftrightarrow$ $(\forall)\varepsilon \in N (\exists) n_\varepsilon \in N,$ astfel incat $(\forall) n \in N, n \geq n_\varepsilon$ si $(\forall) p \in N$ sa avem:

$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon$ si afirmatia este demonstrata.

Exemplul 3. Seria armonica $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergenta, deoarece nu verifica criteriul lui Cauchy.

Intr-adevar, exista $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$ astfel incat $(\forall)n\in N^{*}(\exists)k_{n}=n$ si $p=n$ pentru care avem $\left|u_{k_n+1}+u_{k_n+2}+...+u_{k_n+p}\right|\geq\frac{1}{2}$, deoarece:

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}(\forall)n\in N^{*}$.

Propozitia 2. (Criteriul necesar de convergenta).

Daca seria $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este convergenta, atunci $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Demonstratie. Daca seria $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este convergenta, din propozitia 1, pentru $(\forall)\varepsilon>0,(\exists)n_{\varepsilon}\in N,$ astfel incat $(\forall)n\in N, n\geq n_{\varepsilon}$ sa avem, in particular, pentru p=1 inegalitatea $\left|u_{n+1}\right|<\varepsilon$ echivalenta cu $\left|u_{n+1}-0\right|<\varepsilon$ deci sirul $\left(u_{n+1}\right)_{n\geq 0}$ un termen in plus, rezulta ca $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Corolarul 1. Daca sirul $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ are limita diferita de zero sau nu are limita, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este divergenta.

Demonstratie. Intr-adevar, daca seria ar fi convergenta, atunci sirul $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ ar avea limita zero, asa dupa cum rezulta din propozitia 2, ceea ce ar fi contradictoriu.

Observatia 2. Deoarece pentru seria armonica (vezi exemplul 3) avem $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, si mai stim ca ea este divergenta, rezulta ca proprietatea din propozitia 2 este numai o conditie necesara, dar nu si suficienta pentru convergenta seriilor.

Definitia 5. Numim rest de ordinul $k\in N$ al seriei $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ urmatoarea serie: $r_k=\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n$.

Din proprietatile sirurilor rezulta urmatoarele proprietati ale seriilor pe care nu le vom justifica, datorita simplitatii lor.

Propozitia 3. Daca seria $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ converge, atunci pentru orice $k\in N$, r_k converge; daca exista $k\in N$ astfel incat r_k converge, atunci seria initiala converge.

Observatia 3. Propozitia 3 se poate reformula mai general in felul urmator: prin inlaturarea unui numar finit de termeni de la inceputul unei serii (respectiv prin adaugarea unui numar finit de termeni de la inceputul ei) natura seriei se schimba. In caz de convergenta, suma noii serii astfel obtinuta se diminueaza cu suma termenilor inlaturati (respectiv se mareste cu suma termenilor adaugati).

Propozitia 4. Daca $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ converge, atunci $\lim_{k\to\infty}r_k=0$.

Propozitia 5. Daca seriile $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ si $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ sunt convergente, atunci seria suma $\sum_{n=0}^{\infty}\left(u_n+v_n\right)$ este convergenta si are suma $\sum_{n=0}^{\infty}u_n+\sum_{n=0}^{\infty}v_n$.

Propozitia 6. Daca seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, atunci $(\forall)\alpha \in R$ seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha u_n$ a scalarului α cu seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergenta si are suma $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Definitia 6. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ se numeste absolut convergenta, daca seria $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ este convergenta. Daca o serie este convergenta, fara a fi absolut convergenta, vom spune ca ea este semiconvergenta.

Propozitia 7. Daca seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este absolut convergenta, atunci ea este convergenta.

Demonstratie: Fie $\varepsilon > 0$; datorita ipotezei $(\exists)n_\varepsilon^{'} \in N$ astfel incat

$(\forall)n \in N, n \geq n_\varepsilon^{'} si (\forall) p \in N$ sa avem:

$$\left| |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon \qquad (1)$$

Luam $n_\varepsilon = n_\varepsilon^{'}$ si fie $n \in N, n \geq n_\varepsilon, p \in N^*$; din urmatoarea proprietate a valorii absolute:

$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}|$ si inegalitatea (1) obtinem:

$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon$, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergenta datorita propozitiei 1.

1.3. Serii cu termeni pozitivi.

Definitia 7. Despre o serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ se spune ca este cu termeni pozitivi daca $u_n \geq 0, (\forall)n \in N$.

Observatia 4. O serie cu termeni pozitivi are intotdeauna o suma, datorita faptului ca sirul sumelor ei partiale este crescator; aceasta suma va fi finita daca sirul sumelor partiale este marginit superior, sau egala cu $+\infty$ in caz contrar.

Teorema 3. (Criteriul comparatiei).

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ doua serii cu termeni pozitivi pentru care exista $n_0 \in N$, astfel incat $u_n \leq v_n (\forall) n \in Nn \geq n_0$.

Atunci avem:

1) Daca $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge, rezulta ca $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.
2) Daca $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge, rezulta ca $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge.

Demonstratie:

1) Daca $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge, din observatia 3, rezulta ca $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge, deci sirul $(t_n)_{n\geq 0}$ al sumelor ei partiale este convergent, deci el este si marginit.

Din ipoteza obtinem $s_n \leq t_n (\forall) n \in N$, unde $(s_n)_{n\geq 0}$ este sirul sumelor partiale ale seriei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, inegalitate din care rezulta ca $(s_n)_{n\geq 0}$ este marginit superior, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergenta datorita observatiei 4, si, in final, din observatia 3, obtinem ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergenta.

2) Afirmatia este adevarata datorita echivalentei logice:
$p \Rightarrow q \Leftrightarrow Nonq \Rightarrow Nonp.$

Exemplul 1.4. Sa se studieze convergenta seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$ unde $\alpha \in R,$ numita seria armonica generalizata.

Solutie. Daca $\alpha \in (-\infty;0),$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} = +\infty \neq 0$$

deci seria este divergenta datorita corolarului 1.

Daca $\alpha = 0$ obtinem imediat $\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0,$ si, din acelasi motiv, seria este divergenta.

Daca $\alpha \in (0;1)$ avem $n^{\alpha} \leq n^1, (\forall) n \in N^*$ deci $\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n};$ $(\forall) n \in N^*.$

Avand satisfacute ipotezele teoremei 3 $(n_0 - 1)$ si din faptul ca $\sum_{n=1} \frac{1}{n},$ este divergenta, rezulta ca seria armonica generalizata este divergenta pentru $\alpha \in (0;1).$

Daca $\alpha \in (1;+\infty),$ prin adunarea membru cu membru a urmatoarelor n inegalitati:

$$\frac{1}{1^{\alpha}} \leq 1$$

$$\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} \leq \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} = \frac{1}{2^{\alpha} - 1}$$

$$\frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}} \leq \frac{4}{4^{\alpha}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha} - 1}\right)^2$$

....

$$\frac{1}{(2_{n-1})^{\alpha}} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2^n - 1)} < \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^{\alpha}} = \left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^{\alpha},$$

obtinem:

$$s_{2n-1} < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} (\forall) n \in N^*$$

deoarece $\alpha > 1 \Leftrightarrow 2^0 < 2^{\alpha-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1.$

Deci subsirul $(s_{2n-1})_{n\geq 1}$ al sirului $(s_n)_{n\geq 1}$ al sumelor partiale ale seriei armonice generalizate este convergent, pentru ca este monoton si marginit, de unde rezulta imediat ca sirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este convergent, caci daca prin absurd ar fi divergent, am avea, datorita observatiei 4, $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = +\infty,$ ceea ce ar fi contradictoriu.

In cocluzie, putem spune ca pentru $\alpha \in (-\infty;1]$ seria armonica generalizata este divergenta si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \infty$, iar pentru $(1;+\infty)$ seria armonica generalizata este convergenta si avem:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \in (1, \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}] \subset (1,2)$, daca $\alpha \geq 2$.

Prpozitia 8. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ doua serii cu termeni pozitivi si, in plus, $v_n > 0 (\forall) n \in N$.

1) Daca $\overline{\lim} \frac{u_n}{v_n} < +\infty$, atunci, din convergenta seriei $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ rezulta convergenta seriei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ si din divergenta primei serii, rezulta divergenta celei de-a doua.

2) Daca $\underline{\lim} \frac{u_n}{v_n} > 0$, atunci, din convergenta seriei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, rezulta convergenta seriei $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ si, din divergenta celei de-a doua, rezulta divergenta primei serii.

Demonstratie.

1) Daca presupunem $\inf_{n \in N} \sup_{k \geq n} \frac{u_k}{v_k} < +\infty$ si notam $y_n = \sup_{k \geq n} \frac{u_k}{v_k}$ obtinem: $0 < \inf_{n \in N} y_n < +\infty$.

Fie $M \in R$ astfel incat $M > \inf y_n$; cum M nu este un minorant pentru sirul $(y_n)_{n \geq 0}, (\exists) n_0 \in N$, astfel incat

$\frac{u_n}{v_n} \leq \sup_{k \geq n_0} \frac{u_k}{v_k} = y_{n_0} < M, (\forall) n \in N, n \geq n_0$, deci $u_n \leq M.v_n, (\forall) n \in N, n \geq n_0$.

Acum, daca seria $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge, datorita propozitiei 6, converge si seria $\sum_{n=0}^{\infty} M.v_n$ si, din teorema 3, rezulta ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergenta.

Daca seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge, datorita teoremei 3, este divergenta si seria $\sum_{n=0}^{\infty} M.v_n$, ceea ce implica faptul ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ este divergenta, caci, in caz contrar, propozitia 6 ne-ar furniza o contradictie. Deoarece demonstratia lui 2) se face in mod asemanator, o omitem.

Corolarul 2. Daca $0 < \underline{\lim} \frac{u_n}{v_n} \leq \overline{\lim} \frac{u_n}{v_n} < +\infty$, in ipotezele propozitiei 8, atunci cele doua serii au aceeasi natura.

Observatia 5. Concluziile propozitiei 8 si a corolarului 2 se mentin in particular daca sirul $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq 0}$ are limita si se obtin substituind peste tot unde apar: $\underline{\lim} \frac{u_n}{v_n}$ si $\overline{\lim} \frac{u_n}{v_n}$ cu $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n}$.

Exemplul 5. Sa se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n+2}}$.

Solutie: pentru seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}+2}$ si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ avem $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}+2} = 1 \in (0,+\infty)$,

deci seriile au aceeasi natura, asa dupa cum rezulta din corolarul 2 si, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

este convergenta, fiind seria armonica generalizata pentru $\alpha = \frac{3}{2} \geq 1$, folosind si observatia 3, ne rezulta ca seria initiala este convergenta.

Propozitia 9. (Criteriul lui D'Alembert).

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ o serie cu $u_n > 0, (\forall) n \in N$.

1) Daca $\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergenta.

2) Daca $\underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este divergenta.

Demonstratie.

1) Presupunem ca $L = \underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ si fie $M \in R$, astfel incat $L < M < 1$. Notand $y_n = \sup_{k\geq n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ obtinem $\inf_{n\in N} y_n < M$, de unde rezulta ca M nu este un minorant pentru sirul $(y_n)_{n\geq 0}$, deci exista $n_0 \in N$ astfel incat $y_{n_0} < M$, adica $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \sup_{k\geq n_0} \frac{u_{k+1}}{u_k} = y_{n_0} < M, (\forall) k \in N$ $k \geq n_0$ sau (1) $u_{k+1} \leq M.u_k, (\forall) k \in N, k \geq n_0$. Din (1), folosind inductia, rezulta inegalitatea: $u_n \leq M^{n-n_0}.u_{n_0}, (\forall) n \in N, n \geq n_{0+1,}$ din care, punand $\alpha = \frac{u_{n_0}}{M^{n_0}}$, obtinem:

$u_n \leq \alpha M^n, (\forall) n \in N, n \geq n_0 + 1$.

Deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha M^n$ este convergenta, din teorema 3 rezulta ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergenta.

2) Presupunem ca $\underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, notand $x_n = \inf_{k\geq n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, obtinem $\sup_{n\in N} x_n > 1$, deci 1 un este un majorant pentru sirul $(x_n)_{n\geq 0}$. Prin urmare, exista $n_0 \in N$, astfel incat: $x_n < x_{n_0} = \inf_{k\geq n_0} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}, (\forall) n \in N, n \geq n_0$, deci $0 < u_n < u_{n+1}, (\forall) n \in N, n \geq n_0$.

Sirul $(u_n)_{n\geq 0}$, fiind strict crescator, are limita egala cu $\sup_{n\geq n_0} u_n$ si, din $\sup_{n\geq n_0} u_n \geq u_n > 0, (\forall) n \in N, n \geq n_0$, rezulta ca el un converge la zero si, din corolarul 1, obtinem ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

Propozitia 10. (Criteriul radical al lui Cauchy).

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) Daca $\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n} < 1,$ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

2) Daca $\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n} > 1,$ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

Demonstratie:

1) Presupunem ca $0 \le L = \overline{\lim}\sqrt[n]{u_n} < 1$ si fie $M \in R$ astfel incat $L < M < 1;$ notand $y_n = \sup\limits_{k \ge n} \sqrt[k]{u_k}$, obtinem $\inf\limits_{n \ge 1} y_n < M,$ prin urmare M nu este un minorant pentru $(y_n)_{n \ge 1}$, deci exista $n_0 \in N$ cu $n_0 \ge 1$ astfel incat:
$\sqrt[n]{u_n} \le \sup\limits_{k \ge n_0} \sqrt[k]{u_k} = y_{n_0} < M, (\forall) n \in N, n \ge 0.$

Deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty} M^n$ este convergenta, din teoreema 3, rezulta ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergenta.

2) Presupunem ca $\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n} > 1$ si obtinem:
$1 < \inf\limits_{n \ge 1} y_n \le y_n = \sup\limits_{k \ge n} \sqrt[k]{u_k}, (\forall) n \in N, n \ge 1,$ deci 1 nu este majorant pentru sirul $\left(\sqrt[k]{u_k}\right), k \ge n, (\forall) n \in N, n \ge 1$. Aceasta inseamna ca $(\forall) n \in N, n \ge 1, (\exists) k_n \ge n,$ astfel incat $\sqrt[k_n]{u_{k_n}} > 1$, de unde rezulta ca pentru $\varepsilon = 1, (\forall) n \in N, n \ge 1, (\exists) k_n \ge n,$ astfel incat $\left|u_{k_n} - 0\right| \ge 1$, adica sirul $(u_n)_{n \ge 1}$ un converge la zero, deci nici sirul $(u_n)_{n \ge 0}$ un are limita zero si, din corolarul 1, obtinem ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este divergenta.

Observatia 6. Substituind in ipotezele propozitiei 9 $\overline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ si $\underline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty}\sqrt[n]{u_n}$, iar in ipotezele propozitiei 10 $\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty}\sqrt[n]{u_n}$, atunci cand aceste limite exista, concluziile acestor doua propozitii se mentin, asa dupa cum rezulta in cazul convergentei celor doua siruri din teorema 2.

Exemplul 6. Sa se stabileasca natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n}.$

Solutie. Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n \to \infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$ din propozitia 10, rezulta ca seria este convergenta.

1.4. Serii alternate

Definitia 7. O serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ se numeste alternata daca produsul oricaror doi termeni consecutivi este negativ, adica $(\forall)n \in N,$ avem: $u_n \cdot u_{n+1} < 0.$ O asemenea serie se poate scrie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$ sau $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n,$ unde $u_n > 0(\forall)n \in N.$

Propozitia 11. (Criteriul lui Leibnitz).

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ o serie alternata. Daca sirul modulelor termenilor sai $(|u_n|)_{n\geq 0}$ este descrescator cu $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0,$ atunci seria alternata este convergenta.

Demonstratie. Daca seria alternata este de forma:

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n = u_0 - u_1 + ... + (-1)^n \cdot u_n + ...,$ unde $u_n > 0, (\forall)n \in N$ avem:

$\left|(-1)^n \cdot u_n\right| = u_n, (\forall)n \in N.$ Presupunem deci ca sirul $(u_n)_{n\geq 0}$ este descrescator cu $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ si fie $n \in N.$

Avem $s_{2n+2} = s_{2n} - (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \leq s_{2n}$ deoarece $u_{2n+1} \geq u_{2n+2}$ datorita ipotezei, adica sirul $(s_{2n})_{n\geq 0}$ este descrescator.

Din $s_{2n} = (u_0 - u_1) + ((u_2 - u_3) + ... + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n}) > 0,$ obtinem:

$0 \leq s_{2n} (\forall)n \in N,$ adica sirul $(s_{2n})_{n\geq 0}$ este marginit inferior la zero, deci el este convergent si fie $\lim_{n\to\infty} s_{2m} = s \in R.$ Deoarece avem $s_{2n+1} = s_{2n} - u_{2n+1} (\forall)n \in N,$ sirul $(s_{2n+1})_{n\geq 0}$ are limita si avem $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = s - 0 = s,$ unde am folosit faptul ca $\lim u_n = 0.$ In concluzie, obtinem $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R,$ adica seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$ este convergenta.

Daca seria alternata este de forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n,$ convergenta ei rezulta din egalitatea $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n = (-1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n.$

Exemplul 7. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ numita seria armonica alternata este convergenta, deoarece satisface ipotezele propozitiei 11 si mai putem spune ca ea este numai semiconvergenta.

1.5. Seriide functii. Serii de puteri.

Fie sirul de functii $(f_n)_{n\geq 0},\ f : D \subset R \to R(\forall)n \in N.$ In mod asemanator, ca si pentru seriile numerice adoptam definitia urmatoare:

Definitia 8. Numim serie de functii cu termen general f_n perechea de siruri $((f_n)_n, (s_n)_{n\geq 0}),$ unde $(s_n)_{n\geq 0}$ cu $s_n = f_0 + f_1 + ... + f_n$ se numeste sirul sumelor partiale ale seriei si adoptam notatia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ pentru aceasta serie.

Spunem ca seria de functii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este convergenta (respectiv absolut convergenta) intr.-un punct $x \in D$ daca seria de numere $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este convergenta (respectiv absolut convergenta). Multimea $C \subset D$ formata din toate punctele de convergenta ale seriei de functii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se numeste multimea de convergenta a seriei. Daca $\bullet \neq \emptyset$ exista $f : C \subset D \to R,$ astfel incat $(\forall)x \in C, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$ deci $(\forall)x \in C, (\forall)\varepsilon > 0 (\exists) n_{x,\varepsilon} \in N$ astfel incat $(\forall)n \in N, n \geq n_{x,\varepsilon}$ sa avem $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Definitia 9. Fie $U \subset D$ o multime nevida. Spunem ca seria de functii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergenta pe multimea U daca exista o functie $g : U \subset D \to R$ cu proprietatea ca $(\forall)\varepsilon > 0 (\exists) n_\varepsilon \in N,$ astfel incat $(\forall)n \in N, n \geq n_\varepsilon$ si $(\forall)x \in U$ sa avem $|s_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$

Observatia 7. Se vede ca deosebirea intre convergenta in fiecare punct x din C, numita convergenta simpla sau punctuala si convergenta uniforma pe multimea U, consta in faptul ca n_ε din definitia 9 depinde numai de ε , de functia g si de multimea U, fiind acelasi pentru toti $x \in U$ pe cand, in cazul convergentei simple, $n_{x,\varepsilon}$ depinde in plus de $x \in C.$ Din definitia 9 obtinem $(\forall)x \in U, \lim_{n\to\infty} s_n(x) = g(x),$ adica seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este convergenta si deci $x \in C,$ ceea ce inseamna ca $U \subset C.$

Dar, cum avem si $(\forall)x \in C, \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x),$ din unicitatea limitei rezulta ca $(\forall)x \in U, f(x) = g(x) \Leftrightarrow f|U = g.$

Enuntam fara demonstratii urmatoarele trei teoreme:

Teorema 4. Daca pentru seria de functii $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ exista o serie numerica pozitiva $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ convergenta, astfel incat $(\forall)n \in N, (\forall)x \in U \subset D$ sa avem $|f_n(x)| \leq u_n,$ atunci seria de functii este uniform convergenta pe multimea U.

Teorema 5. Fie o serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de functii, toate derivabile pe un interval $I \subset D.$ Daca:

1) seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergenta pe I si are suma f;

2) seria derivatelor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ este uniform convergenta pe I si are suma g; atunci f este derivabila pe I si avem f'=g.

Teorema 6. Fie o serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de functii, toate integrabile Riemann pe un interval $[a,b] \subset D.$ Daca seria este uniform convergenta pe $[a,b]$ si are suma f, atunci:

1) f este integrabila Riemann pe $[a,b].$

2) seria integralelor $\sum_{n=0} \int_a^b f(x)dx$ este convergenta si avem:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f(x)dx,$ adica seria initiala se poate integra termen cu termen.

Definitia 10. Seria particulara de functii:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = a^0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ...,$ pentru care $(\forall) n \in N$ avem: $f_n(x) = a_n x^n, a_n \in R, x \in R.$

(s-a folosit conventia $x^0 = 1, (\forall) x \in R)$ se numeste serie de puteri. Pentru o serie de puteri ne va preocupa determinarea multimii ei de convergenta C. O prima remarca este ca $C \neq \emptyset$, deoarece pentru x=0 seria devine:

$a_0 + 0 + ... + 0 + ...$ si este, in mod evident, convergenta, suma ei fiind egala cu a_0.

Definitia 11. Numim raza de convergenta a unei serii de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ un numar finit sau infinit $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, astfel incat:

1) R=0 daca si numai daca seria de puteri converge numai pentru x=0, adica multimea ei de convergenta C={0}.

2) R=+∞ daca si numai daca seria de puteri este absolut convergenta pentru orice $x \in R$, deci C=R.

3) 0<R<+∞ daca si numai daca seria de puteri este absolut convergenta pentru orice $x \in (-R, R)$ si divergenta pentru orice $x \in (-\infty, -R) \cup (R, -\infty)$, deci $(-R, R) C \subset C[-R, R]$.

Observatia 8. Este usor de vazut ca conditiile 1), 2), 3) din definitia 1.11 caracterizeaza in mod unic numarul R asociat seriei de puteri.

Teorema 7. (a lui Cauchy – Hadamard).

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ si $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci, pentru raza R de convergenta a seriei avem:

$R = \frac{1}{L}$ daca $0 < L \leq +\infty$ si R=+∞ daca L=0.

Demonstratie: Fie $x \in R$ si sa-i aplicam seriei $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n x^n |$ propozitia 10; in acest stop calculam:

$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot L$

Daca $x \neq 0$ si $L \neq +\infty$ avem $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = +\infty > 1$ si, din demonstratia propozitiei 10 stim ca sirul $\left(|a_n x^n|\right)_{n \geq 0}$ nu are limita zero, deci sirul $\left(a_n x^n\right)_{n \geq 0}$ nu poate avea limita zero, ceea ce inseamna, conform corolarului 2, ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergenta, deci $R = 0 = \frac{1}{L}$.

Daca L=0 avem $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot 0 = 0 < 1$ si datorita aceleiasi propozitii 10, rezulta ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergenta, deci seria initiala este absolut convergenta $(\forall) x \in R$, deci R=+∞.

Daca $0 < L < +\infty$ si daca $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot L < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{L} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ seria initiala este absolut convergenta, datorita propozitiei 10, iar daca $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{L} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{L}$, atunci, din aceeasi propozitie, rezulta ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} |\ a_n x^n\ |$ este divergenta.

Fie $y \in R$ cu $|y| > \frac{1}{L}$; stim ca exista $x \in R$, astfel incat $|y| > x > \frac{1}{L}$, de unde $|x| > \frac{1}{L}$, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} |\ a_n x^n\ |$ este divergenta.

Daca seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ ar fi convergenta, am avea $\lim_{n\to\infty} a_n y^n = 0$, deci sirul $(a_n y^n)_{n\geq 0}$, fiind marginit, exista $M \geq 0$, astfel incat $|a_n y^n| \leq M (\forall) n \in N$, de unde obtinem:

$$|a_n x^n| = \left|a_n y^n \cdot \frac{x_n}{y^n}\right| = |a_n y^n| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|^n \leq M . \left|\frac{x}{y}\right|^n (\forall) n \in N \text{ cu } \left|\frac{x}{y}\right| < 1$$

Cum ipotezele teoremei 3 sunt satisfacute, rezulta ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, ceea ce constituie o contradictie, deci $(\forall) y \in R$ cu $|y| > \frac{1}{L} \Leftrightarrow y \in \left(-\infty, -\frac{1}{L}\right) \cup \left(\frac{1}{L}, +\infty\right)$ seria de puteri este divergenta si apoi, tinand seama de observatia 8, obtinem $R = \frac{1}{L}$.

Observatia 9. Din definitia 11 si teorema 7, rezulta ca o serie de puteri cu raza de convergenta astfel incat sa avem 0<R<+∞, multimea de convergenta C este un interval de forma (-R,R), la care se adauga eventual punctele –R sau/si R. Deoarece nu intotdeauna $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ se calculeaza usor, este foarte utila si propozitia urmatoare, a carei demonstratie este similara cu cea a teoremei 7, cu deosebirea ca se foloseste $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ in loc de $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Propozitia 12. Fie o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pentru care $(\exists) n_0 \in N$, astfel incat $(\forall) n \in N, n \geq n_0$ sa avem $a_n \neq 0$.

Daca exista $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, atunci raza de convergenta este $R = \frac{1}{1'}$ daca 0<1<+∞ daca 1=0 sau $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Exemplul 8. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$ are raza de convergenta R=1, deoarece $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1 > 0$ si, totodata, remarcam ca $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ nu exista pentru ca:

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} daca - n - este - par \\ 0 - daca - n - este - impar \end{cases}$$

Nu suntem nici in ipotezele aplicabilitatii propozitiei 12, dar aici am putea sa ne dispensam de limita superioara, facand substitutia $x^2=y$.

Propozitia 13. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta R, astfel incat $0 < R \leq +\infty$. Atunci $(\forall) r \in R$ cu 0<r<R seria de puteri este uniform convergenta pe intervalul [-r,r].

Demonstratie: Din 0<r<R rezulta ca r este un punct de convergenta absoluta al seriei, adica seria $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n | r^n$ este convergenta.

Fie $n \in N$ si $x \in [-r, r]$; avem:

$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x^n| \leq |a_n| r^n$ si ipotezele teoremei 4, fiind indeplinite, obtinem concluzia propozitiei.

Dam fara demonstratie urmatoarea teorema:

Teorema 8.

Daca $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri cu $R \neq 0$ si $f : C \subset R \to R$ suma sa, atunci:

1) seria derivatelor are aceeasi raza de convergenta ca si seria initiala;

2) functia f este derivabila pe intervalul (-R,R) si derivataf' este egala cu suma seriei derivatelor.

Exemplul 9. Sa consideram seria:

$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$ pentru care seria derivatelor este seria din exemplul 8.

Datorita teoremei 8, ele au aceeasi raza de convergenta R=1 si suma f a seriei initiale este derivabila si datorita egalitatii:

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$ pentru $|x| < 1$ avem $f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$ pentru $|x| < 1$. Dar functia g, cu $g(x) = arctgx$ are aceeasi derivata, deci $f(x) = g(x) + c,$ pentru $|x| < 1$. Cum pentru x=0 avem f(0)=0 si arctg0=0, rezulta ca c=0 si deci:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \text{ pentru } |x| < 1.$$

Corolarul 3. Fie seria de puteri îIîSU(n=0,∞,$a_n x^n$) cu suma f, adica $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, (\forall) x \in C$ si cu raza de convergenta R>0.

Atunci coeficientii a_n, $(\forall) n \in N$ sunt unic determinati si avem egalitatile:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, (\forall) n \in N, \text{ unde } f^{(0)}(0) = f(0).$$

Demonstratie: Intr-adevar, datorita teoremei 8, avem egalitatile:

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots,$ pentru $(\forall) x \in (-r, r)$, deci, in particular, pentru x=0 obtinem $f(0)=a_0$ (datorita ipotezei) si $f'(0)=a_1$, $f''(0)=2a_2$ etc., adica:

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}, a_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!}, a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \text{ etc.}$$

1.6.Formula lui Taylor. Dezvoltari in serie Taylor.

Fie o functie $f: I \to R$ definita pe un interval I, derivabila de n ori intr-un punct $x \in I$ are loc egalitatea:

$f(x) = f(0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + r_n(x)$ numita formula lui Taylor de ordinul n corespunzatoare functiei f in punctul x_0, unde:

$T_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)}{n!} f^{(n)}(x_0)$ se numeste polinomul lui Taylor atasat functiei f in x_0, iar $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ se numeste restul de ordinul n al formulei lui Taylor.

Se mai stie ca avem: $\lim_{x \to x_0} \frac{|R_n(x)|}{(x - x_0)^n} = 0$, deci si $\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Dam fara demonstratie teorema:

Teorema 9. Fie $f: I \to R$, de n+1 ori derivabila pe intervalul I si $x_0 \in I$. Atunci, pentru orice $x \in I, x \neq x_0, (\exists)\xi \in (x_0, x)$ sau $\xi \in (x, x_0)$ dupa cum $x > x_0$ sau $x < x_0$, astfel incat, pentru orice $p \in N^*$, pentru restul de ordinul n al formulei lui Taylor, sa avem:

$$R_n(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_0)^p (x - \xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi), daca: x \neq x_0 \\ 0..., daca: x = x_0 \end{cases}$$

Observatia 10. Punctul ξ din teorema 10 depinde de functia f, de punctele x_0,x, cat si de numerele naturale n si p. Pentru p=1 restul $r_n(x)$ devine:

$R_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - \xi)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$, pentru $x \neq x_0$ si se numeste restul lui Cauchy. Pentru p=n+1,$R_n(x)$ devine:

$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)} f^{(n+1)}(\xi)$ pentru $x \neq x_0$ si se numeste restul lui Lagrange.

Definitia 12. Fie $f: D \subset R \to R$ o functie indefinit derivabila in punctul $x_0 \in D$. Numim serie Taylor atasata functiei f in punctul x_0 seria urmatoare:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)}{n!} f^{(n)}(x_0) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + ...$$

Daca $x_0 = 0 \in D$ si f este indefinit derivabila in zero, seria Taylor corespunzatoare se numeste seria Mac Laurin si ea este o serie de puteri. Problema pe care vrem sa o rezolvam in continuare este in ce conditii suma seriei Taylor atasata functiei f si punctul x_0 este pe multimea ei de convergenta C (C se poate determina cand $x \neq x_0$ folosind substitutia $x-x_0=y$) este egala cu functia f de la care s-a plecat, caz in care, spunem ca f se dezvolta in serie Taylor in jurul punctului x_0.

Motivul pentru care tocmai Taylor a fost aleasa este corolarul 3 care ne spune ca, daca o functie este dezvoltata intr-o serie de functii de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ pe intervalul (x_0-R, x_0+R), unde R>0 este raza de convergenta a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, aceasta este, in mod obligatoriu, seria Taylor.

Propozitia 14. Seria Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)}{n!} f^{(n)}(x_0)$ are intr-un punct $x \in D \cap C$ suma f(x), unde C este multimea ei de convergenta, daca si numai daca $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$ unde $R_n(x)$ este restul de ordinul n al formulei lui Taylor.

Demonstratie: Daca avem pentru $x \in C \cap D,$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ unde $s_n(x)=T_n(x)$, din formula lui Taylor, $f(x)=T_n(x)+F_n(x)$, obtinem $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - s_n(x)) = f(x) - f(x) = 0.$

Reciproc, daca pentru $x \in D \cap C$ avem $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$ folosind din nou formula lui Taylor, obtinem:

$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - R_n(x)) = f(x).$

Exemplul 10. Sa se dezvolte in serie Mac Laurin functia $f : R \to R,$ definita prin $f(x) = e^x, (\forall)x \in R.$

Deoarece avem $f^{(n)}(x) = e^x, (\forall)n \in N, (\forall)x \in R,$ seria Mac Laurin atasata functiei f este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ cu raza de convergenta $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$ deci C=R. Deoarece restul $R_n(x)$ al formulei lui Taylor sub formalui Lagrange este $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi},$ unde $0 < \xi < x$ sau $x < \xi < 0$ si $|R_n(x) - 0| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}(\forall)x \in C \cap D = R,$ iar $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Datorita propozitiei 14 putem scrie:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...(\forall)x \in R,$ deoarece pentru x=0, egalitatea este evidenta.

Aplicatii

1) Sa se arate ca intervalele

$$I_n = \left(0, \frac{a}{n}\right], \ a \in R, a > 0, \ n \in N$$

au intersectia vida.

R: Avem evident

$$\left(0, \frac{a}{1}\right] \supset \left(0, \frac{a}{2}\right] \supset ... \supset \left(0, \frac{a}{n}\right] \supset ...$$

Fie $\xi \in I = \bigcap_k I_k$; trebuie sa avem $\xi > 0$. Insa exista $n_1 \in N$ astfel incat

$$\xi > \frac{a}{n_1}$$

deci si $\xi > \frac{a}{n}$ pentru $n \ge n_1, n \in N$; deci nu exista $\xi > 0, \xi \in I$, deoarece $0 \notin I$ rezulta ca I este o multime vida.

In acelasi mod se arata ca intervalele

$$I_n^* = \left[b - \frac{a}{n}, b\right), \; b>a>0, \text{ n=1,2,…}$$

au intersectia vida.

2) Sa se arate ca oricare ar fi $n, n \in N$ avem inegalitatea

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 ... 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

R: Pentru n=1, neegalitatea este adevarata, deoarece

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ sau } \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

presupunem ca ramane adevarata pana la *n-1*, deci

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 ... (2n-2)} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

si sa aratam ca este adevarata si pentru *n*. Avem

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 ... (2n-2)2n} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

ramane sa aratam ca

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

sau

$$\sqrt{\frac{2n-1}{4n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

sau

$$(2n-1)(2n+1) \leq 4n^2$$

de unde

$$4n^2 - 1 \leq 4n^2$$

ceea ce este evident.

3) Multimea $\mathcal{P}_2$ a perechilor (m, n) de numere naturale este numarabila.

R: Sa consiseram perechea (m, n) cu $m + n =$ constant; pentru $m + n = 2,3,4,5,\ldots,k,\ldots$ obtinem

$(1,1)$,

$(1,2);(2,1)$,

$(1,3);(2,2);(3,1)$,

$(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)$,

…………………………

$(1,k-1);(2,k-2);\ldots;(k-1,1)$,

de unde se vede ca pentru $m + n = k$, avem $k-1$ perechi. Rezulta ca putem realiza o corespondenta biunuvoca intre multimea perechilor (m, n) si multimea numerelor naturale N, deci multimea $(m, n)_{m \in N, n \in N}$ este numarabila.

4) Fie *A* o multime finita; sa notam cu $n(A)$ numarul de elemente din multimea *A*. Sa se arate ca

1° $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

2° Sa se extinda rezultatul la $n(A\cup B\cup C)$ apoi sa se generalizeze la $n\left[\bigcup_{1}^{p} A_i\right]$.

R: 1) $n(A\cup B)$ reprezinta numarul total de elemente din multimile A si B.
$n(A)+n(B)$ reprezinta numarul elementelor din multimile A la care se adauga numarul elementelor din B; astfel elementele ce apartin lui A si B se socotesc de 2 ori, deci trebuie scazute odata.
Pentru 2° avem:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A\cup B)+n(C)-n[(A\cup B)\cap C]=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-$$
$$-n((A\cap C)\cup(B\cap C))=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-[n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)]$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

Pentru cazul general se gaseste

$$n\left[\bigcup_{1}^{p} A_i\right]=\sum_{1}^{p} n(A_1)-\sum_{i<j} n(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{p-1}n(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_p).$$

5) Să se calculeze urmatoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)}{n^2(n+1)^2}$; b) a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{6})...(1-\frac{1}{C_{n+1}^2}), n\geq 2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)...(1+a^{2^n}), |a|<1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+3k+1}{k^2+3k+2})$.

R:a) $\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^3+3\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+2\sum\limits_{k=1}^{n}k=$

$=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2+3\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$. Rezulta apoi ca limita este $\frac{1}{4}$.

b) Deoarece $1-\dfrac{1}{C_{n+1}^2}=1-\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$, deducem ca $x_n=\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\dfrac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=\dfrac{n+2}{3n}$, deci limita este 1/3.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)...(1+a^{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}=\dfrac{1}{1-a}$;

d) Descompunem $\dfrac{k^2+3k+1}{k^2+3k+2}=1-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=1-\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}$, de unde rezulta ca sirul

$x_n=n-\sum\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2})=n-\left[(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+...+(1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})\right]$. Dupa reducerea termenilor, obtinem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

6) Fososind criteriul clestelui, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1^2x]+[2^2x]+...+[n^2x]}{n^3}, x\in R$ fixat.

R:Din definitia partii intregi, $a-1<[a]\le a$, $\forall a\in R$, deducem $k^2x-1<\left[k^2x\right]\le k^2x$, $\forall k=1,...n$. Sumam inegalitatile si rezulta $\frac{x\sum_{k=1}^{n}k^2-n}{n^3}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[k^2x\right]}{n^3}\le\frac{x\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}$.

Tinand apoi seama ca $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, obtinem limita egala cu x/3.

7) Utilizand criteriul general al lui Cauchy pentru şiruri, să se arate ca sirul $a_n=\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{2^3}+...+\frac{\cos nx}{2^n}$, x numar real fixat, este convergent

R: Fie $\varepsilon>0$.

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}}-\frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}}+...+\frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right|\le\frac{\left|\cos(n+1)x\right|}{2^{n+1}}+\frac{\left|\cos(n+2)x\right|}{2^{n+2}}+...+\frac{\left|\cos(n+p)x\right|}{2^{n+p}}$$

$\le\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2}^p}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}$.Rangul se obtine punand condiția

$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$, ceea ce duce la $n>-\log_2\varepsilon$. In concluzie, sirul verifica criteriul lui Cauchy, adica $\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon$, $\forall n\ge n_\varepsilon, p\in N$.

8) Utilizând criteriul lui Cauchy, să se studieze convergența şirurilor $a_n=\frac{\sin 1!}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2!}{2\cdot 3}+...+\frac{\sin n!}{n\cdot(n+1)}, n\ge 1$ si $b_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}, n\ge 1$.

9) Să se calculeze urmatoarele limite:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}\right)$; b) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}, a,b>0$;

10) Sa se studize natura seriilor de termen general

a) $u_n=\sqrt{n^4+2n+1}-n^2$

b) $u_n=\frac{1}{(\ln n)^p}$, $n\ge 2$

c) $u_n=\ln n\cdot\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n\ge 2$

R: a) Scriem termenul general al seriei astfel:

$$u_n=\frac{\left(n^4+2n+1\right)-n^4}{n^2+\sqrt{n^4+2n+1}}=\frac{2n+1}{n^2+\sqrt{n^4+2n+1}}\cong\frac{2n}{2n^2}$$

seria are aceeasi natura cu seria $v_n=\frac{1}{n}$ deci este divergenta.

b) $\ln n<n, \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n};\frac{1}{(\ln n)^p}>\frac{1}{n^p}, p>0$, dar $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ este divergenta pentru $p\le 1$, prin urmare pentru $p\in(0,1]$ seria $\sum_{n=2}^{\infty}u_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p}$ este divergenta.

Pentru $p>1$, $\frac{1}{(\ln n)^p}>\frac{A}{\sqrt{n}}$ deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^p}=+\infty$ deci seria $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ este divergenta.

Pentru p<0, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$; conditia necesara de convergenta nu este indeplinita; seria este divergenta pentru orice p.

c) Seria $u_n = \ln n \cdot \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), n \geq 2$ este o serie alternata. Aplicam criteriul lui Leibniz.

$$(\alpha)\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ln n\left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{(-1)^n}{3n^2}\right] = 0 .$$

Trebuie sa aratam ca $|u_n|, n = 2,3,\ldots,$ este un sir monoton descrescator; din (α) rezulta ca seria $\sum_2^\infty u_n$ si seria $\sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n}\ln n$ au aceeasi natura. Dar functia $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ are $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ daca $\ln x > 1, x > e$; deci functia este monoton descrescatoare si de aici sirul de termen general

$$|u_n| = \frac{\ln n}{n}$$

este monoton descrescator, cu limita zero, prin urmare seria data este convergenta.

11) Sa se studieze natura seriei $(a,b,\in R)$

$$\frac{a+1}{a}\cdot b + \left(\frac{a+2}{a+1}b\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a+n}{a+n-1}\right)^n + \ldots$$

R: Aplicam criteriul radacinii pentru seria modulelor. Avem

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left|\frac{a+n}{a+n-1}b\right| = \left|\frac{a+n}{a+n-1}\right|\cdot|b|$$

si

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u|} = |b|,$$

prin urmare pentru $|b| < 1$ seria data este absolut convergenta.

Pentru $|b| \geq 1$, putem scrie

$$\left|\frac{a+n}{a+n-1}\cdot b\right| = \left|\frac{a+n}{a+n-1}\right|\cdot|b| > |b| \geq 1$$

deci, in acest caz,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+n}{a+n-1}\cdot b\right)^n \neq 0$$

si seria din enunt este divergenta.

12) Sa se arate ca sirul de termen general $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, n \in N$ este convergent.

R: Vom asocia acestui sir seria de numere:

$$a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + \ldots$$

pentru care sirul (a_n) reprezinta sirul numerelor partiale

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)^2}.$$

Acesta este termenul general al unei serii Riemann convergenta, deci sirul sumelor partiale care este sirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent.

13) Să se stabilească natura urmatoarelor serii, utilizând criteriile de convergență pentru serii cu termeni pozitivi:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + n}, a \geq 0;$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n};$ c). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n};$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}};$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^n, a > 0;$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)};$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n;$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n+1};$ i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$

14) Sa se studieze convergenta absoluta si convergenta simpla pentru seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n! n^q}.$$

R: Pentru srudiul convergentei absolute aplicam criteriul lui Raabe si Duhamel seriei

$$|u_n| = \frac{|1+p||2+p|\ldots|n+p|}{n! n^q}$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \frac{(n+1)^{q+1} - n^q(n+p+1)}{n^q(n+p+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{q+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{q+1} - n^{q+1} - n^q p - n^q}{n^{q-1}(n+p+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{q+1}\left(1 + \frac{q+1}{n} + \frac{(q+1)q}{2! n^2} + \ldots\right) - n^{q+1} - pn^q - n^q}{n^{q-1}(n+p+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^q(q-p) + n^{q-1} \frac{q(q+1)}{2!} + \ldots}{n^{q-1}(n+p+1)} = q - p > 1;$$

deci seria este absolut convergenta pentru $q - p > 1$.

Studiem convergenta simpla a seriei pentru $q \leq p + 1$.

Trebuie gasita relatia intre *p* si *q* pentru care

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|1+p||2+p|\ldots|n+p|}{n! n^q} = 0$$

si se vade ca are loc pentru $q < p$.

15) Sa se determine pentru perechea parametrulor (p, x) ai seriei:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p},$ $n \in (0, \pi)$

multimea in care este absolut convergenta sau simplu convergenta.

R: Deoarece $\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \le \frac{1}{n^p}$ si seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ este convergenta pentru $p>1$; rezulta ca seria este absolut convergenta pentru $p>1$ si $x\in R$.

Pentru a studia convergenta simpla, aplicam criteriul lui Abel cu

$$u_n = \cos nx, a_n = \frac{1}{n^p};$$

$$|u_1+\ldots+u_n| = \left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \frac{x}{2}\ne k\pi, x\ne 2k\pi.$$

si pentru $\frac{1}{n^p}\to 0$ pentru $p > 0$. Rezulta ca pentru $p>0$ si $x\in R-\{2k\pi, k\in Z\}$, seria este simplu convergenta.

16) Sa se arate ca seria

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}$$

este convergenta. Sa se exprime o majoreta a erorii pe care o facem daca suma S se aproximeaza cu S_n. Caz particular $n=10$.

R: Criteriul raportului ne da

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1) = \frac{1}{2n+1}$$

si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0;$$

prin urmare seria este convergenta. Avem si

$$R_n = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\left(1+\frac{1}{2n+3}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}+\ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\left(1+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{(2n+3)^2}+\ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2n+3}} = \frac{2n+3}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)(2n+2)}.$$

pentru $n=10$, obtinem

$$R_{10} < \frac{23}{1\cdot 3\cdot 5\ldots 19\cdot 21\cdot 22}$$

17) Sa se arate ca seriile

a) $$1+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 3^{n+1}}+\ldots$$

b) $$1-\frac{1}{1\cdot}\cdot\frac{1}{4\cdot}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{10}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{28}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{3^n+1}+\ldots$$

sunt convergente. Sa se aproximeze sumele cu trei zecimale exacte.

R: Observam ca avem

$$\frac{1}{n3^{n-1}} \le \frac{1}{3^n}, n = 3,4,5,\dots$$

si folosind criteriul comparatiei, deoarece seria

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

este convergenta, rezulta ca seria (a) este convergenta. Daca luam pentru S pe S_n dat de

$$S_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n3^{n-1}}$$

atunci

$$R_n = \frac{1}{(n+1)3^n} + \frac{1}{(n+2)3^{n+1}} + \dots < \frac{1}{n+1}\frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)$$

18) Să se determine mulțimea de convergență a seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n, x \ne \frac{1}{2}$.

R: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$. Pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| < 1 \Rightarrow x \in (-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ si-n aceste cazuri seria este absolut convergentă. Pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| \ge 1 \Rightarrow x \in \left[0,\frac{2}{3}\right]$ si-n aceste puncte seria este divergentă.

19) Să se determine mulțimea de convergență pentru seriile de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ \dots\ (a+n)}{b(b+1)\ \dots\ (b+n)}x^n, 0 < a < b$

20) Să se determine mulțimea de convergență şi suma seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

R: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$, deci raza de convergență este R = 1, iar mulțimea de convergență este (-1, 1). In punctele x = 1 si x = -1, facem o analiza separata.

Pentru x = 1, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, seria armonică alternantă, serie convergentă.

Pentru x = -1, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, care este o serie divergenta, fiind seria armonică înmulțită cu (-1). Asadar, mulțimea de convergență a seriei de puteri este (-1,1].