Cinematica fluidelor

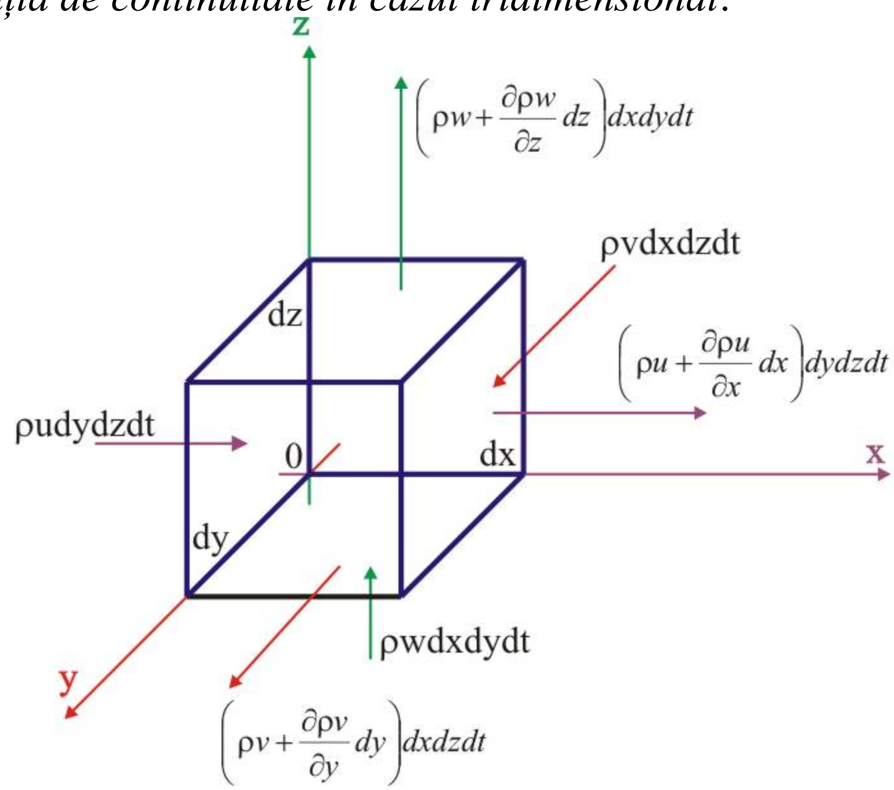
Ecuația de continuitate

Ecuația de continuitate reprezintă principiul conservării cantității de fluid aflată în curgere. Prin cantitate se poate înțelege volum, masă, greutate.

Ecuația de continuitate se obține făcând un bilanț al maselor.

Diferența dintre masa de fluid intrată şi cea ieşită dintr-un volum de fluid este egală cu variația de masă din interior datorată variației de densitate în timp.

Ecuația de continuitate în cazul tridimensional:



Această particulă, de dimensiuni dx,dy şi dz este infinitezimală, astfel încât ρ si v pot fi considerate constante în raport cu dy de exemplu.

Se face bilanțul maselor:

Variația de masă după direcția axei Ox este:

$$dm_x = \rho_u dxdydt - \left(\rho_u + \frac{\partial \rho_u}{\partial x}dx\right)dydzdt$$

Se deduc:

$$\Rightarrow \begin{cases} dm_x = -\dfrac{\partial \rho_u}{\partial x} dxdydzdt \\ dm_y = -\dfrac{\partial \rho_v}{\partial y} dxdydzdt \\ dm_z = -\dfrac{\partial \rho_w}{\partial z} dxdydzdt \end{cases}$$

Se deduce variația totală de masă:

$$\Rightarrow \quad dm = dm_x + dm_y + dm_z = -\left(\frac{\partial \rho_u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_v}{\partial y} + \frac{\partial \rho_w}{\partial z} \right) dxdydzdt$$

Masa inițială din particulă este:

$$dm_i = \rho dxdydz$$

iar masa finală:

$$dm_f = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dxdydz$$

Se deduce a doua expresie a variației de masă:

$$\Rightarrow \quad dm = dm_f - dm_i = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dxdydz - \rho dxdydz$$

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydzdt$$

Prin egalarea celor două forme ale variației de masă şi simplificare se obține ecuația de continuitate sub forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \qquad \text{sau:}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \rho \overline{v} = 0$$

În cazul unei mişcări permanente $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \; div \rho \overline{v} = 0$$

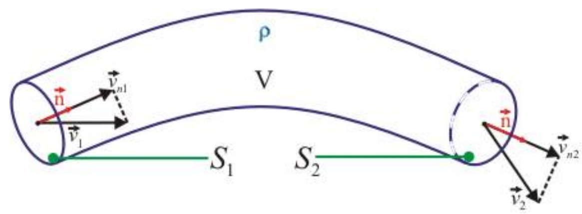
Pentru un fluid incompresibil $\rho = ct$ $\quad \Rightarrow div \overline{v} = 0$ sau:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

ce reprezintă forma extinsă a ecuației ce conține variațiile de viteză.

Aceste rezultat se extinde la nivelul întregului volum de fluid, având în vedere proprietățile de omogenitate şi de izotropie ale fluidului.

Ecuația de continuitate în cazul tubului de curent:



Diferența dintre masa intrată şi cea ieşită în tub este:

$$\left(\int_{S_1}\rho_1\overline{v_1}\cdot\overline{n}dS_1-\int_{S_2}\rho_2\overline{v_2}\cdot\overline{n}dS_2\right)dt=\left(\int_{S_1}\rho_1V_{n1}dS_1-\int_{S_2}\rho_2V_{n2}dS_2\right)dt$$

Se determină inițial variația de masă din interiorul particulei de fluid.

În interior avem masa inițială din volumul V:

$$m_i=\int_V\rho dV,$$

iar masa finală este:

$$m_f=\int_V\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right)dV$$

Diferența dintre masa finală şi cea inițială este:

$$m_f-m_i=\int_V\rho dV+\int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right)dV\quad=\left(\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV\right)dt$$

Făcând bilanțul maselor, cu alte cuvinte egalând cele două forme ale variației de masă, rezultă:

$$\Rightarrow\quad\left(\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV\right)dt=\left(\int_{S_1}\rho_1V_{n1}dS_1-\int_{S_2}\rho_2V_{n2}dS_2\right)dt$$

şi prin simplificare rezultă:

$$\Rightarrow \quad \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_{S_1} \rho_1 V_{n1} dS_1 - \int_{S_2} \rho_2 V_{n2} dS_2$$

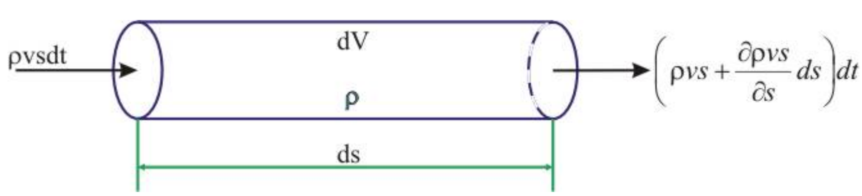
Dacă mişcarea este permanentă:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \quad Q_m = \int_{S_1} \rho_1 V_{n1} dS_1 = \int_{S_2} \rho_2 V_{n2} dS_2 = ct$$

Dacă fluidul este incompresibil:

$$\rho_1 = \rho_2 = ct \;\Rightarrow\quad Q_v = \int_{S_1} V_{n1} dS_1 = \int_{S_2} V_{n2} dS_2 = ct$$

Ecuația de continuitate pentru tubul de curent elementar



Diferența dintre masa intrată şi cea ieşită este:

$$\rho VSdt - \left(\rho VS + \frac{\partial \rho VS}{\partial s} ds\right) dt = -\frac{\partial \rho VS}{\partial s} dsdt$$

Masa inițială şi cea finală din tubul respectiv sunt:

$$\left.\begin{aligned} m_i &= (\rho S ds) \\ m_f &= \left(\rho S + \frac{\partial \rho S}{\partial t} dt\right) ds \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; m = \left(\frac{\partial \rho S}{\partial t} dt\right) ds$$

Din bilanțul maselor, rezultă:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} dsdt = -\frac{\partial \rho VS}{\partial s} dsdt \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho VS}{\partial s} = 0$$ -forma generală

Dacă tubul este nedeformabil:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad S\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho VS}{\partial s} = 0$$

Dacă mişcarea este permanentă: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho V S}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho V S = ct$$

$$\Rightarrow \quad Q_m = \rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2 = ct$$

Dacă fluidul este incompresibil: $\rho = ct$

$$\Rightarrow \quad Q = V_1 S_1 = V_2 S_2 = ct$$

Această formă finală a ecuației de continuitate reprezintă o formulă foarte des utilizată de ingineri la calculul debitului volumic Q, în special în situația când fluidul circulă printr-un circuit închis.

Se poate face observația că, de exemplu, când secțiunea de curgere se micşorează, viteza fluidului trebuie să crească astfel încât să se transporte acelaşi debit.

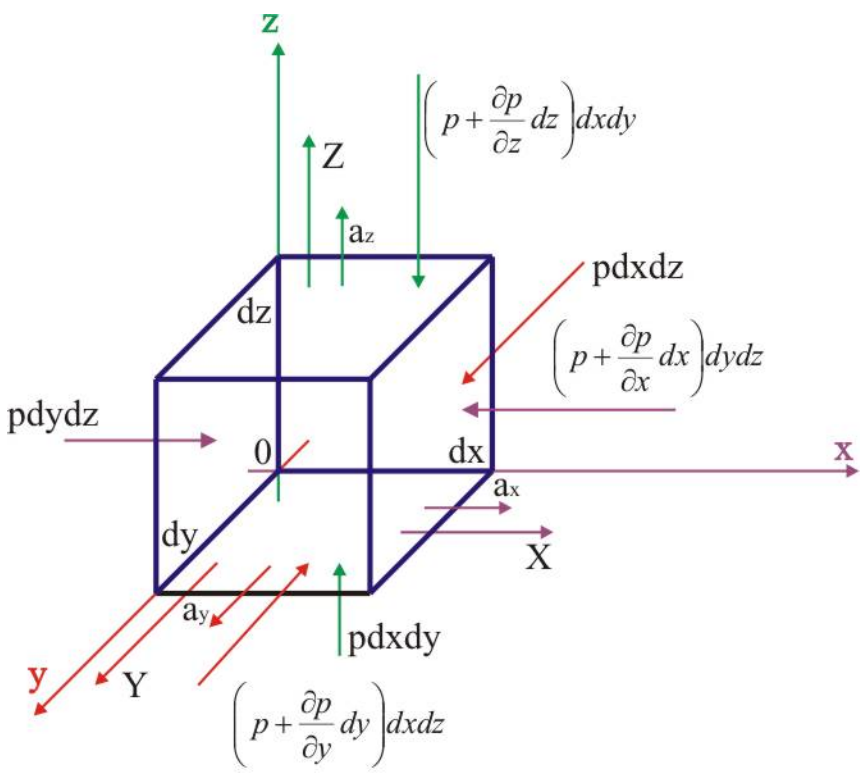
Dinamica fluidelor

Se ocupă cu studiul mişcării fluidelor, ținând cont de forțele şi transformările energetice care apar.

Se analizează inițial mişcarea fluidelor ideale la care există frecări şi pierderi de energie.

Deducerea ecuației de mişcare a fluidelor ideale

Se consideră un volum oarecare de fluid aflat în mişcare uniform variată. Se figurează toate forțele ce apar asupra unui volum delimitat de fluid, de dimensiuni infinitezimale şi se aplică principiul al II-lea al dinamicii.



Ecuația vectorială de mişcare (principiul al II-lea) este:

$$d\overline{F_m} + d\overline{F_p} = dm\overline{a}$$

În mod analog cu calculul efectuat la deducerea ecuațiilor staticii fluidelor se determină expresiile forței masice elementare şi ale forței elementare de presiune şi apoi ale componentelor lor.

$$d\overline{F_m} = \overline{f_m} \cdot dm = \overline{f_m} \cdot \rho dV = \left(X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}\right)\rho dxdydz$$

$$\begin{cases} dF_{mx} = X\rho dxdydz \\ dF_{my} = Y\rho dxdydz \\ dF_{mz} = Z\rho dxdydz \end{cases}$$

$$dF_{px} = pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

$$dm = \rho dV = \rho dxdydz$$

Din calculul efectuat la cinematică se utilizează expresiei componentei de accelerație după axa Ox:

$$a_x = \frac{du}{dt}$$

Făcând înlocuirile în ecuația vectorială de mişcare se obține ecuația corespunzătoare axei Ox:

$$X\rho dxdydz - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz = \rho dxdydz\frac{du}{dt}$$

$$X\rho - \rho\frac{du}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{prin împărțire la } \rho\text{:}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X & \longrightarrow \text{ - ecuația corespunzătoare axei } Ox \\ \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y & \longrightarrow \text{ - ecuația corespunzătoare axei } Oy \\ \dfrac{dw}{dt} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z & \longrightarrow \text{ - ecuația corespunzătoare axei } Oz \end{cases}$$

Primul termen reprezintă forța unitară instantanee de inerție, al doilea forța unitară de presiune, iar membrul drept forța masică unitară.

Aplicând formulele de la cinematică pentru derivatele totale ale componentelor de viteză rezultă sistemul de ecuații de mişcare sub formă extinsă:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=X \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=Y \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=Z \end{cases}$$

Sistemul are 4 necunoscute: u, v, w şi t $\Rightarrow$ se completează sistemul cu ecuația de continuitate.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0$$

Dacă şi densitatea este o necunoscută, atunci se completează sistemul cu ecuația de stare a gazelor: $\rho=\rho(p,T)$ $\Rightarrow$ 5 ecuații cu 5 necunoscute.

Sistemul se rezolvă exact în cazuri particulare de mişcare $\Rightarrow$ formule analitice.

În general, sistemul se rezolvă cu metode numerice, alegând o rețea în care se precizează valorile inițiale şi/sau la limită.

Valorile inițiale u_0, v_0, w_0 si p_0 se precizează în cazul unei mişcări nepermanente.

O condiție la limită pentru fluidele ideale este că viteza tangențială a fluidului la suprafața solidă este diferită de zero, datorită absenței frecărilor.

Componenta normală a vitezei la suprafața solidă este însă nulă.

Ecuația vectorială se obține înmulțind fiecare ecuație cu versorul corespunzător axei respective şi adunând membru cu membru se obține:

$$\frac{du}{dt}\bar{i}+\frac{dv}{dt}\bar{j}+\frac{dw}{dt}\bar{k}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial p}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial p}{\partial z}\bar{k}\right)=X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt}+\frac{1}{\rho}grad p=\overline{f_m} \qquad \longrightarrow$$ ecuația vectorială de mişcare.