3. LEGI DE STARE ALE CÂMPULUI ELECTRIC. ECUAȚII

La § 1.5 s-a făcut o prezentare generală asupra legilor şi teoremelor stabilite în cadrul teoriei macroscopice clasice asupra electromagnetismului. In cele ce urmează prezentăm trei legi de stare ale câmpului şi crpurilor în care intervin exclusiv mărimi fizice de natură electrică. Relațiile ce exprimă legi şi/sau teoreme formează ecuațiile sistemului fizic considerat. Acestea constituie obiectivele prezentului capitol.

3.1. Legea polarizației electrice temporare

Această lege exprimă relația de legătură dintre polarizația electrică temporară $\overline{P_t}$ şi intensitatea câmpului electric dintr-un punct ce aparține unui mediu dielectric. Relația prin care se exprimă această lege este.

$$\overline{P_t} = e_0 \, c_e \overline{E} \,, \qquad (3.1)$$

Enunțul legii este următorul::

Polarizația electrică temporară dintr-un punct al unui mediu dielectric izotrop şi liniar este proporțională cu intensitatea câmpului electric din acelaşi punct, factorul de proporționalitate fiind produsul dintre permitivitatea ε_0 a vidului şi susceptivitatea electrică χ_e a mediului - o constantă de material adimensională, pozitivă.

Deci, legea polarizației electrice temporare este o *lege de material*.

Din relația (3.1) ce exprimă legea menționată, rezultă că în mediile dielectrice izotrope vectorii $\overline{E}$ şi $\overline{P_t}$ sunt coliniari.

Dacă mediul dielectric este fără polarizare electrică permanentă, atunci $\overline{P_p} = 0$ şi $\overline{P_t} = \overline{P}$ (v. rel. 2.78), iar legea se scrie astfel:

$$\overline{P} = e_0 \, c_e \overline{E} \,. \qquad (3.2)$$

În situația că mediul prezintă şi polarizare electrică permanentă, atunci

$$\overline{P} = e_0 \, c_e \overline{E} + \overline{P_p} \,. \qquad (3.3)$$

La mediile dielectrice *neliniare* susceptivitatea electrică într-un punct depinde de valoarea intensității câmpului electric în acel punct, $\chi_e(E)$.

In cazul mediilor dielectrice *anizotrope*, cum este, de exemplu, mediul unui cristal, susceptivitatea electrică este un *tensor simetric de ordinul doi*, notat $\overline{\overline{\chi}}_e$, în care caz legea polarizației electrice temporare se scrie în forma de produs contractat între tensorul $\varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}_e$ şi vectorul $\overline{E}$:

$$\overline{P_t} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}_e \cdot \overline{E} \qquad (3.4)$$

In această situație, vectorii $\overline{E}$ şi $\overline{P}_t$ nu sunt coliniari. Există totuşi la mediile anizotrope trei direcții reciproc ortogonale, 1, 2 şi 3, denumite *direcțiile (axele) principale*, în lungul cărora cei doi vectori sunt coliniari, astfel că:

$$\overline{P}_{t1} = \varepsilon_0 \chi_{e1} \overline{E}_1 \ , \quad \overline{P}_{t2} = \varepsilon_0 \chi_{e2} \overline{E}_2 \ , \quad \overline{P}_{t3} = \varepsilon_0 \chi_{e3} \overline{E}_3 \ , \qquad (3.5)$$

unde χ_{e1}, χ_{e2} şi χ_{e3} sunt susceptivitățile electrice corespunzătoare celor trei direcții

3.2. Legea legăturii dintre $\overline{D}$, $\overline{E}$ şi $\overline{P}$.

Intre mărimile vectoriale de stare locală $\overline{D}$, $\overline{E}$ şi $\overline{P}$ s-a stabilit o relație de legătură, cu caracter de lege, în forma:

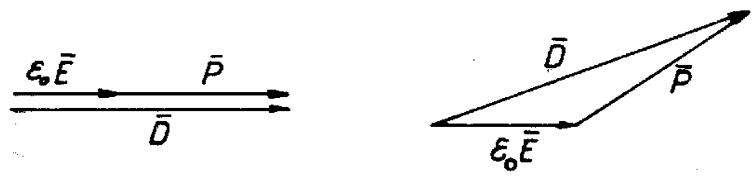
$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P} \ . \qquad (3.6)$$

Aceasta este o *lege se stare generală*, find valabilă în orice punct, la orice moment şi în orice regim al câmpului electromagnetic.

In vid, în aer şi în medii conductoare nu apare fenomenul de polarizare electrică, sau este neglijabil, deci $\overline{P} = 0$ şi legea legăturii se exprimă prin relația:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} \ . \qquad (3.7)$$

In mediile dielectrice izotrope vectorii $\overline{D}$, $\overline{E}$ *şi* $\overline{P}$ sunt coliniari (Fig. 3.1, a), iar în mediile anizotrope nu sunt coliniari (Fig. 3.1, b).



a) ***b)***

Fig. 3.1. Pozițiile vectorilor $\overline{D}, \overline{E}$ şi $\overline{P}$ în medii izotrope (a), respectiv în medii anizotrope (b).

Referindu-ne la mediile *izotrope, liniare şi fără polarizare electrică permanentă*, avem $\overline{P}_p = 0$ şi $\overline{P}_t = \overline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \overline{E}$, iar relația ce exprimă legea se scrie astfel:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \varepsilon_0 \chi_e \overline{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \overline{E} \ ,$$

sau

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \ , \qquad (3.8)$$

în care $$1 + \chi_e = \varepsilon_r \qquad (3.9)$$

este *permitivitatea electrică relativă* şi $\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_r$ este *permitivitatea electrică absolută a mediului*.

Din relaţiile (3.6) şi (3.8) se obţine:

$$\overline{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\overline{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\overline{E} \,. \qquad (3.10)$$

Dacă mediul dielectric izotrop este polarizat electric, atât temporar cât şi permanent, atunci legea legăturii devine:

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} + \overline{P}_p \,. \qquad (3.11)$$

La *mediile neliniare* permitivitatea electrică relativă depinde de valoarea intensităţii câmpului electric în punctul considerat, ε_r (E).

In cazul *mediilor anizotrope*, permitivitatea electrică relativă este un *tensor simetric de ordinul al doilea,* notat $\overline{\overline{\varepsilon}}_r$, iar legea legăturii se exprimă prin produsul contractat dintre tensorul $\varepsilon_0\, \overline{\overline{\varepsilon}}_r$ şi vectorul $\overline{E}$:

$$\overline{D} = e_0\, \overline{\overline{e}}_r \times \overline{E} \,. \qquad (3.12)$$

Având în vedere forma relaţiei (3.9), se poate scrie:

$$\overline{\overline{e}}_r = \overline{\overline{1}} + \overline{\overline{c}}_e \,, \qquad (3.13)$$

în care $\overline{\overline{1}}$ este tensorul unitar de ordinul al doilea.

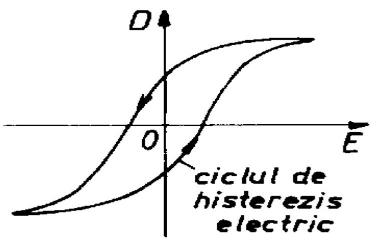


Fig. 3.2. Fenomenul de histerezis electric.

Observaţie. La mediile feroelectrice (neliniare) situate într-un câmp electric alternativ se manifestă fenomenul denumit *histerezis electric*, care constă în rămânerea în urmă a variaţiilor valorilor lui D în raport cu variaţiile valorilor lui E (Fig. 3.2).

3.3. Legea fluxului electric

Legea fluxului electric este o *lege de stare, generală* din cadrul teoriei clasice (Maxwell - Hertz) asupra electromagnetismului. Se exprimă în formele integrală şi diferenţială (locală).

a. Forma integrală a legii se referă la fluxul electric printr-o suprafaţă închisă S , situată în câmpul electric (Fig. 3.3), având următorul enunţ:

Fluxul electric prin orice suprafață închisă Σ, așezată în câmpul electromagnetic, având orice formă și orice poziție, în oricare moment este egal cu suma algebrică a sarcinilor electrice adevărate ce aparțin corpurilor din interiorul suprafeței:

$$\oint_{\Sigma} \overline{D}\, d\overline{s} = Q \,, \qquad (.3.14)$$

unde $Q = \sum_k Q_k$.

Sarcinile electrice din exteriorul suprafeței închise nu modifică fluxul electric prin suprafața S . Dacă $Q = 0$, atunci legea devine:

$$\int_{\Sigma} \overline{D}\, d\overline{s} = 0 \,. \qquad (3.15)$$

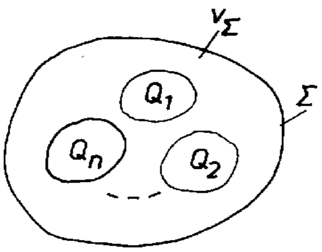


Fig. 3.3. Schiță explicativă pentru legea fluxului electric.

b. Forma diferențială (locală) a legii fluxului electric se poate obține din forma integrală (3.14). În acest sens, admitem că volumul v_Σ delimitat de Σ este un domeniu de continuitate pentru câmpul de vectori $\overline{D}$, deci că nu există suprafețe, linii sau puncte unde s-ar găsi sarcini electrice adevărate, care ar cauza discontinuități pentru $\overline{D}$. Intr-un astfel de domeniu pot exista numai sarcini electrice volumetrice cu densitatea ρ_v, încât

$$Q = \oint_{v_\Sigma} \rho_v \, dv \,. \qquad (3.16)$$

In aceste condițiuni se poate realiza transformarea de integrală de tip Gauss-Ostrogradski::

$$\int_{\Sigma} \overline{D}\, d\overline{s} = \int_{v_\Sigma} div\, \overline{D}\, dv \,. \qquad (3.17)$$

Inlocuind relațiile (3.16) și (3.17) în (3.14) și renunțând la operația de integrare, rezultă forma diferențială (locală) a legii:

$$div\, \overline{D} = \rho_v \,, \qquad (3.18)$$

cu următorul enunț:

Divergența volumetrică a vectorului câmp $\overline{D}$, calculată în oricare punct al unui domeniu de continuitate, este egală cu densitatea volumetrică a sarcinii electrice adevărate din acel punct.

Dacă în domeniul de volum v_{Σ}, există suprafețe încărcate cu sarcini electrice de densitate ρ_s (Fig. 3.4), în puncte ale unei astfel de suprafețe $div\,\overline{D} = \infty$ şi, în consecință, se operează cu divergența superficială:(v. § A3.3.2)

$$div_s\,\overline{D} = \rho_s\ . \tag{3.19}$$

Considerând că $\overline{D}_1$ şi $\overline{D}_2$ sunt inducțiile electrice în puncte foarte apropiate, situate de o parte şi de alta a suprafeței S_{12} (Fig. 3.4), atunci:

$$div_s\,\overline{D} = \overline{n}_{12}\cdot(\overline{D}_2 - \overline{D}_1) = -D_{1n} + D_{2n}\ , \tag{3.20}$$

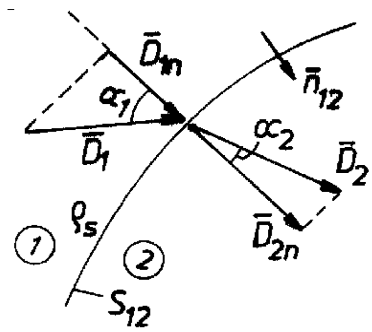


Fig. 3.4. Suprafață încărcată cu sarcini electrice adevărate.

unde $\overline{n}_{12}$ este versorul normal la suprafață, iar $D_{1n} = \overline{n}_{12}\,\overline{D}_1$ şi $D_{2n} = \overline{n}_{12}\,\overline{D}_2$ sunt valorile componentelor normale la aceeaşi suprafață ale inducției electrice.

Rezultă:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s, \tag{3.21}$$

sau

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 - \varepsilon_2\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 = \rho_s\ , \tag{3.22}$$

unde $\dfrac{\partial V}{\partial n} = E_n$ şi $D_n = \varepsilon E_n$.

Aşadar, pentru $\rho_s \neq 0$, componentele inducției electrice, normale la suprafața S_{12}, sunt discontinui, $D_{1n} \neq D_{2n}$ (nu se conservă), iar pentru $\rho_s = 0$ aceste componente sunt continui, $D_{1n} = D_{2n}$ (se conservă).

4. Teorema lui Gauss

a. Forma integrală a teoremei lui Gauss se referă la fluxul vectorului intensității câmpului electric $\overline{E}$ printr-o suprafață închisă Σ:

$$\Psi_E = \int_{\Sigma} \overline{E}\,d\overline{s} \tag{3.23}$$

şi se deduce din legea fluxului electric în forma integrală (rel. 3.14) şi din legea legăturii (rel.3.6). Se obține:

$$\oint_{\Sigma} (\varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P})\, d\overline{s} = Q\ .$$

Având în vedere şi relația (2.81), rezultă:

$$\oint_{\Sigma} \overline{E}\, d\overline{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q + Q')\ , \tag{3.24}$$

adică:

Fluxul vectorului intensității câmpului electric $\overline{E}$, calculat pe o suprafață închisă Σ, situată în câmpul electromagnetic în orice poziție, la orice moment este proporțional cu suma algebrică a sarcinilor electrice adevărate şi de polarizare ce aparțin corpurilor din interiorul suprafeței, factorul de proporționalitate fiind $1/\varepsilon_0$.

b. Forma diferențială (locală) a teoremei lui Gauss se obține din forma integrală (3.24), în care se face înlocuirea

$$Q + Q' = \int_{v_\Sigma} (\rho_v + \rho_v')\, dv \tag{3.25}$$

şi , în condițiuni de continuitate, efectuând transformarea de integrale G-O. rezultă:

$$div\, \overline{E} = \frac{\rho_v + \rho_v'}{\varepsilon_0}\ . \tag{3.26}$$

In puncte ale unei suprafețe de discontinuitate, încărcată cu sarcini electrice adevărate, având densitatea ρ_s , şi cu sarcini electrice de polarizare, având densitatea ρ_s', teorema lui Gauss se scrie astfel:

$$div_s\, \overline{E} = \frac{\rho_s + \rho_s'}{\varepsilon_0}\ . \tag{3.27}$$

Aplicația 3.1. *Un mediu dielectric izotrop, liniar şi fără polarizare electrică permanentă, având permitivitatea relativă $\varepsilon_r = ct.$, este încărcat în volum cu sarcini electrice adevărate, cu densitatea ρ_v. Câmpul electric din mediu determină polarizarea temporară a lui şi apar sarcini electrice de polarizare cu densitatea ρ_v'. Să se stabilească legătura dintre ρ_v şi ρ_v'.*

Rezolvare. *Se folosesc formele diferențiale ale legii fluxului electric (rel.3.18) şi teoremei lui Gauss (rel.3.26), precum şi relația $\overline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \overline{E}$. Rezultă:*

$$\varepsilon_r = \frac{\rho_v}{\rho_v + \rho_v'} = 1 + \chi_e \tag{3.28}$$

de unde se obține

$$\rho_v' = -\frac{\rho_v}{1 + 1/\chi_e}\ , \tag{3.29}$$

In care χ_e este susceptivitatea electrică a mediului dielectric.

Deci, sarcinile ρ_v' şi ρ_v au semne opuse. Pentru $\chi_e = 0$ rezultă $\rho_v' = 0$.

Aplicaţia 3.2. *Se consideră un corp metalic încărcat cu sarcini electrice supeficiale cu densitatea* ρ_s*, înconjurat de un mediu dielectric omogen, izotrop şi fără polarizare electrică permanentă, având permitivitatea electrică* $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$*. La suprafaţa dielectricului în contact cu metalul apar sarcini electrice de polarizare cu densitatea* ρ_s'*. Să se stabilească legatura dintre densităţile sarcinilor* ρ_s *şi* ρ_s'*.*

Rezolvare. *Recurgem la acelaşi raţionament ca la aplicaţia 3.1, cu menţiunea că în metal* $\overline{E}_{metal} = 0$ *şi* $\varepsilon_{metal} = \varepsilon_0$.

Se obţin relaţiile:

$$div_s \overline{D} = \varepsilon\, div_s \overline{E}\,, \text{ adică } \rho_s = \varepsilon \frac{\rho_s + \rho_s'}{\varepsilon_0}\,, \text{ din care rezultă}$$

:
$$\frac{\rho_s}{\varepsilon} = \frac{\rho_s + \rho_s'}{\varepsilon_o} \tag{3.30}$$

respectiv
$$\rho_s' = \frac{\rho_s}{1 + 1/\chi_e}\,. \tag{3.31}$$

Precizare. Relaţii de forma (3.29) şi (3.31) nu pot fi stabilite la suprafaţa de separaţie dintre doi dielectrici.

Aplicaţia 3.3. *Un corp dielectric izotrop, fără polarizare electrică permanentă şi neâncărcat cu sarcini electrice adevărate (*$\rho_v = 0$*) este situat într-un câmp electric. Să se stabilească în ce situaţii apar în volumul corpului sarcini electrice de polarizare.*

Rezolvare. Se folosesc relaţiile (3.8), (3.18) şi (3.26), astfel că:

$$0 = \overline{E}\, grad\, \varepsilon + \varepsilon\, div \overline{E}\,, \qquad \rho_v' = \varepsilon_0\, div \overline{E}\,.$$

Se disting următoarele situaţii:

1. Dielectricul este omogen *şi* liniar*:* $grad\, \varepsilon = 0$, $div \overline{E} = 0$ *şi* $\rho_v' = 0$ *atât în câmp uniform cât şi neuniform.*

2. Dielectricul este neomogen *şi* liniar*:* $grad\, \varepsilon \neq 0$, $div \overline{E} \neq 0$ *şi* $\rho_{v'} \neq 0$ *atât în câmp uniform cât şi neuniform.*

3. Dielectricul este omogen *şi* neliniar, $\varepsilon(E)$*:* $grad\, \varepsilon = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial E}\, grad\, E$ *este egal cu zero în câmp uniform (* $E = ct.$*) şi este diferit de zero în câmp neuniform. Deci* $\rho_{v'} \neq 0$ *numai în câmp neuniform.*

Aplicaţia 3.4. *O sferă dielectrică de rază a, având* $\varepsilon_r = ct$*, este încărcată uniform cu sarcini electrice adevărate cu densitatea* ρ_v*. Sfera este înconjurată de o coajă metalică sferică de raze* a *şi* b*, (*$a < b$*) neâncărcată cu sarcini electrice. In exterior este vid (sau aer). Se cer:*

a. $\overline{E}$, $\overline{D}$ *şi* $\overline{P}$ *în puncte din cele trei zone (1-sfera dielectrică, 2-coaja metalică, 3-aer) şi potenţialul electric al cojii metalice.*

b. *Densităţile sarcinilor de polarizare pentru sfera dielectrică.*

c. *Să se verifice legea fluxului electric în puncte din zonele 1 şi 3.*

Rezolvare: a. *Câmpul prezintă simetrie sferică. Intrucât în teorema lui Gauss intervin şi sarcinile electrice de polarizare (necunoscute), se calculează mai întâi D cu legea fluxului electric.*

<u>Zona 1</u>. Se consideră suprafața sferică Σ_1 de rază $r \in [0, a]$ pentru care

$$\int_{\Sigma_1} \overline{D}_1 \, d\overline{s} = \int_{v_{\Sigma_1}} \rho_v \, dv$$

Vectorii $\overline{D}_1$ şi $d\overline{s}$ sunt coliniari şi $D_1 = ct.|_{P \in \Sigma_1}$. Rezultă:

$$D_1 4\pi r^2 = \rho_v \frac{4\pi r^3}{3}, \qquad \overline{D}_1 = \frac{\rho_v}{3}\overline{r}$$

$$\overline{E}_1 = \frac{\overline{D}_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho_v}{3\varepsilon}\overline{r}, \qquad \overline{P}_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\overline{E}_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\rho_v}{3\varepsilon}\overline{r} .$$

<u>Zona 2</u> fiind ocupată de metal se obțin $\overline{E}_2 = 0$, $\overline{D}_2 = 0$ şi $\overline{P}_2 = 0$. Deoarece $\int_{\Sigma_2} \overline{D}_2 \, d\overline{s} = 0$, înseamnează că pe suprafața interioară a cojii metalice se separă sarcina

$$Q_{sa} = -\rho_v \frac{4\pi a^3}{3}, \quad \rho_{sa} = -\frac{\rho_v}{3} a, \text{ iar pe cea exterioară } Q_{sb} = -Q_{sa}, \quad \rho_{sb} = \frac{\rho_v a^3}{3 b^2} .$$

In <u>zona 3</u>, $r \in [b, \infty]$ şi

$$\int_{\Sigma_3} \overline{D}_3 \, d\overline{s} = \rho_v \frac{4\pi a^3}{3}, \quad D_3 4\pi r^2 = \rho_v \frac{4\pi a^3}{3}, \quad \overline{D}_3 = \frac{\rho_v a^3}{3} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3},$$

$$\overline{E}_3 = \frac{\overline{D}_3}{\varepsilon_0}, \quad \overline{P}_3 = 0 .$$

Potențialul cojii metalice se calculează cu o relație de forma (2.20, b), în care: $V_0 = V_\infty = 0$. Se obține:

$$V_2 = \int_b^\infty \overline{E}_3 \, d\overline{l} = \int_b^\infty \frac{\rho_v a^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho_v a^3}{3\varepsilon_0 b} .$$

b. *Calculul densităților sarcinilor de polarizare se face cu relațiile (2.84), respectiv (2.85), adică:*

$$\rho'_v = -\operatorname{div}\overline{P}_1 = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\rho_v}{3\varepsilon}\nabla\overline{r} = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r}\rho_v$$

$$\rho'_v = |P_{1n} - P_{2n}|_{r=a} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\rho_v}{3\varepsilon} a = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \cdot \frac{\rho_v}{3} a .$$

Sarcinile totale de polarizare sunt

$$Q' = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \frac{4\pi a^3}{3}\rho_v, \qquad Q'_s = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \cdot \frac{4\pi a^3}{3}\rho'_s .$$

Se observă că $Q' + Q'_s = 0$.

c. *Se calculează $\operatorname{div}\overline{D}_1$ şi $\operatorname{div}\overline{D}_3$, unde $\overline{D}_1$ şi $\overline{D}_3$ au valorile calculate mai sus.*

3.5. Ecuațiile câmpului electric

In general, ecuațiile unui vector câmp derivă din legile / teoremele specifice câmpului, fiind cele care conduc la determinarea univocă a vectorului în toate punctele domeniului considerat. Dacă în domeniul de studiu al câmpului există suprafețe, linii şi / sau puncte de discontinuitate (singularități), acestea trebuie excluse, prin considerarea lor în afara domeniului.

Menționăm aici cele specificate la Anexa A4 referitoare la clasificarea câmpurilor şi anume: Un câmp vectorial este de natură *potențială* dacă în toate punctele lui rotorul vectorului ce îl caracterizează este nul (câmp *nerotațional*). Câmpul este de natură *solenoidală (rotațională)* dacă în toate punctele lui divergența vecorului ce îl caracterizează este nulă. În cazul general, câmpul vecorial poate avea atât o componentă potențială, cât şi o componentă solenoidală.

3.5.1. Teorema de unicitate a soluției ecuațiilor unui câmp vectorial.

Ne referim aici la unicitatea soluției ecuațiilor unui câmp vectorial în regim staționar, caracterizat în fiecare punct prin vectorul $\overline{F}$. Mediul în care are loc câmpul este liniar şi izotrop. Într-un caz particular, acest câmp poate fi câmpul electric, caracterizat în fiecare punct al domeniului.prin vectoriul $\overline{E}$, respectiv prin vectorul $\overline{D}$. Enunțul teoreme este:

Vectorul $\overline{F}$ ce caracterizează un câmp staționar dintr-un mediu liniar şi izotrop este univoc determinat în domeniul de volum v_{Σ}, mărginit de suprafața închisă Σ (suprafața de frontieră), dacă se cunosc, în fiecare punct al domeniului:

- divergența volumetrică: $div\,\overline{F} = f(\overline{r})$;

- rotorul volumetric: $rot\,\overline{F} = g(\overline{r})$,

iar în punctele suprafeței de frontieră Σ sunt prescrise:

- fie componentele normele F_n,

- fie componentele tangențiale F_t.

S-a notat cu $\bar{r}$ vectorul de poziție al punctului, iar funcțiile $f(\bar{r})$ şi $g(\bar{r})$ sunt considerate ca fiind continui.

Demonstrația teoremei o facem numai pentru cazul când în toate punctele frontierei Σ. sunt prescrise valorile componentelor normale F_n.

Prin absurd, fie $\overline{F}'$ şi $\overline{F}''$ două soluții distincte ale problemei, care satisfac, fiecare, ecuațiile din domeniu şi condiția pe frontieră. Vectorul câmp diferență $\overline{F}_D = \overline{F}' - \overline{F}''$ va satisface următoarele condițiuni:

$$div\,\overline{F}_D = 0,\quad rot\,\overline{F}_D = 0 \text{ şi } F_{Dn} = 0\,. \tag{3.32}$$

Deoarece $rot\,\overline{F}_D = 0$, înseamnează că $\overline{F}_D$ derivă dintr-un potențial scalar φ, $\overline{F}_D = -\nabla\varphi$, care satisface ecuația Laplace $\nabla^2\varphi = 0$, iar în punctele frontierei Σ $F_{Dn} = 0$, adică $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. In aceste condițiuni, recurgând la formula întâia a lui Green pentru funcții scalare (rel. A3.11), se obține $\int_{v_\Sigma} (\nabla\varphi)^2 dv = 0$, adică $\nabla\varphi = 0$ şi $\overline{F}_D = 0$.

Deci $\overline{F}' = \overline{F}'''$, ceea ce înseamnă soluție unică a ecuațiilor câmpului de vectori $\overline{F}$.

3.5.2. Ecuațiile câmpului electrostatic

Ne referim la câmpul electrostatic dintr-un mediu liniar, izotrop şi fără polarizare electrică permanentă, pentru care redăm ecuațiile care conduc la o soluție unică. Domeniul de existență al câmpului se consideră extins la infinit, unde câmpul este nul.

Ecuațiile intensității câmpului electrostatic $\overline{E}$. Acestea sunt cele corespunzătoare formelor diferențiale (locale) ale legilor/teoremelor, valabile în câmpul electrostatic, adică:

$$div\,\overline{E} = \frac{\rho_v + \rho_v'}{\varepsilon_0}, \qquad rot\,\overline{E} = 0\,, \qquad \overline{E}_{n\infty} = 0\,. \tag{3.33}$$

Prima dintre aceste ecuații reprezintă forma diferențială a teoremei lui Gauss (rel.3.26), cea de adoua ecuație reprezintă forma diferențială a legii inducției electromagnetice, particularizată pentru câmpul electrostatic (teorema potențialului electrostatic) (rel. 2.23), iar a treia ecuație evidențiază că la infinit câmpul este nul.

Dacă în volumul v_Z al domeniului există singularități în punctele unor suprafețe de limită (de separație dintre medii diferite), în punctele unor curbe sau în puncte propriu zise, atunci, la ecuațiile (3.33) se adaugă *ecuațiile condițiilor de limită*

$$div_s\overline{E} = \frac{\rho_s + \rho_s'}{\varepsilon_0}, \quad div_l\overline{E} = \frac{\rho_l}{\varepsilon_0}, \quad div_p\overline{E} = \frac{Q_p}{\varepsilon_0}; \quad rot_s\overline{E} = 0\,. \tag{3.34}$$

Aceste ecuații sunt folosite la excluderea singularităților din domeniul în care se studiază câmpul (§ 3.6.3).

Întrucât divergența vectorului $\overline{E}$ este nulă în toate puncele câmpului electrostatic, acest câmp este de natură eminamente potențială. Ca urmare, vectorul intesității acestui câmp derivă din funcția scalară de spațiu V, numită *potențialul electrostatic*, prin relația $\overline{E} = -\,grad\,V$.

Grupurile de ecuații (3.33) şi (3.34) constituie *condițiile de existență* ale vectorului intensității câmpului electrostatic $\overline{E}$ din domeniul considerat.

Ecuațiile inducției electrice $\overline{D}$ sunt:

$$div\,\overline{D} = \rho_v\,, \qquad rot\,\overline{D} \neq 0\,, \qquad \overline{D}_{n\infty} = 0\,. \tag{3.35}$$

Prima dintre aceste ecuații reprezintă forma diferenâială (locală) a legii fluxului lectric, cea de a doua este o inegalitate deoarece în mediul neomogen luat în considerare $\varepsilon \neq ct.$, şi $rot\,\overline{D} = rot(\varepsilon\overline{E}) = grad\,\varepsilon \times \overline{E} + \varepsilon \times rot\,\overline{E} = \overline{E}\,grd\,\varepsilon \neq 0$, unde s-a înlocuit $rot\,\overline{E} = 0$. Deci, vectorul inducției electrice $\overline{D}$ al câmpului electrostatic dintr-un mediu neomogen are atât o componentă potențială, cât şi ocomponentă solenoidală. Dacă mediul este omogen, atunci componenta solenoidală a lui $\overline{D}$ este nulă.

Ecuațiile corespunzătoare condițiilor de limită pentru câmpul de vectori $\overline{D}$ sunt:

$$div_s\,\overline{D} = \rho_s\,,\quad div_l\,\overline{D} = \rho_l\,,\quad div_p\,\overline{D} = Q_p\,;\quad rot_s\,\overline{D} \neq 0\,. \quad (3.36)$$

În cazul suprafețelor corpurilor nepolarizate electric, situate într-un mediu, nepolarizabil, corpurile fiind încărcate numai cu sarcini volumetrice, ecuațiile:sunt

$$div_s\,\overline{E} = 0\,,\quad rot_s\,\overline{E} = 0\,; \qquad (3.37,\text{ a})$$

$$div_s\,\overline{D} = 0\,,\quad rot_s\,\overline{D} = 0\,. \qquad (3.37,\text{ b})$$

Însemnează că suprafețele respective nu constituie discontinuități pentru componentele normale şi / sau tangente ale lui $\overline{E}$, respectiv ale lui $\overline{D}$.

Aplicația 3.5. *Să se scrie ecuațiile câmpului electrostatic neuniform, existent într-un mediu dielectric omogen, dar neliniar, cu permitivitatea* $\varepsilon(E)$, *produs de sarcini electrice exstene într-un domeniu finit.*

Rezolvare : *În situația dată, în interiorul mediului se acumulează sarcini electrice de polarizare cu densitatea* ρ'_v .

Ecuațiile inducției electrice sunt independente de natura mediului şi au forma:

$$div\overline{D} = 0\,,\qquad rot\overline{D} = 0\,,\qquad \overline{D}_{n\infty} = 0\,.$$

Din aceste ecuații se deduc cele ale intesității câmpului electric, având în vedere că $\overline{D} = \varepsilon(E)\overline{E}$. *Forma ecuațiilor este:*

$$div\overline{E} = -\frac{1}{\varepsilon(E)}\cdot\overline{E}\,grad\,\varepsilon(E)\,,\quad rot\overline{E} = \frac{1}{\varepsilon(E)}\cdot\overline{E}\times grd\,\varepsilon(E)\,,\quad E_{n\infty} = 0\,.$$

3.6. Ecuațiile Poisson şi Laplace ale potențialului electrostatic
3.6.1. Forma ecuațiilor.

Câmpul electrostatic fiind de natură potențială, intensitatea acestui câmp se exprimă prin gradientul cu semn schimbat al potențialului electrostatic: $\overline{E} = -grad\,V$. Având în vedere şi teorema lui Gauss (rel. 3.26), adică $div\,\overline{E} = (\rho_v + \rho'_v)/\varepsilon_0$, se obține *ecuația lui Poisson* a potențialului electrostatic:

$$-\,div\,grad\,V = (\rho_v + \rho'_v)/\varepsilon_0\,,$$

sau

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v + \rho'_v}{\varepsilon_0}\,, \qquad (3.38)$$

în care $$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (3.39)$$

este operatorul liniar a lui Laplace (coordonate carteziene).

In punctele din câmpul electrostatic unde nu există sarcini electrice $(\rho_v = \rho'_v = 0)$, ecuația (3.38) devine

$$\nabla^2 V = 0, \quad sau \quad \Delta V = 0 , \qquad (3.40)$$

fiind denumită *ecuația lui Laplace* a potențialului electrostatic.Câmpurile potențiale care satisfac ecuația lui Laplace se numesc, adeseori, *câmpuri laplacene*.

3.6.2. Teorema unicității soluției ecuației lui Poisson

Se consideră câmpul electrostatic din domeniul de volum v_Σ, mărginit de suprafața închisă Σ, caracterizat prin potențialul electrostatic $V(r)$.Teorema unicității soluției ecuației lui Poisson a potențialului electrostatic (rel. 3.38) se enunță astfel:

Dacă în toate punctele din domeniul v_Σ funcția $V(r)$ satisface ecuația lui Poisson şi dacă în punctele frontierei Σ sunt prescrise:

- fie valorile $V(P \in \Sigma)$, reprezentând condițiile pe frontieră de tip Dirichlet,

- fie valorile $\{\bar{n}\, grad\, V\}_{P\in\Sigma}$, reprezentând condițiile pe frontieră de tip Neumann, atunci soluția ecuației lui Poisson este unică. S-a notat cu $\bar{n}$ versorul normal la Σ, având sensul spre interiorul domeniului.

Demonstrație. Se presupune, prin absurd, că există două funcțiuni $V'(\bar{r})$ şi $V''(\bar{r})$ care satisfac aceeaşi ecuație Poisson şi aceleaşi condițiuni pe frontieră. Apoi, se introduce funcțiunea diferență $V_D(\bar{r}) = V'(\bar{r}) - V''(\bar{r})$ care, evident, satisface ecuația Laplace $\nabla^2 V_D = 0$ şi condițiunile pe frontieră:

$$V_{D(P\in\Sigma)} = 0 \ \ (Dirichlet), \ \ sau \ \ \{\bar{n}\nabla V_D\}_{P\in\Sigma} = \frac{\partial V_D}{\partial n}\Big|_{P\in\Sigma} = 0 \quad (Neuman).$$

In continuare, se recurge la formula întâia a lui Green pentru funcții scalare (rel.A4.11), scrisă pentru funcția V_D. Rezultă:

- în condițiuni pe frontieră de tip Dirichlet:

$$\int_{v_\Sigma} (\Delta V_D)^2\, dv = 0, \ \ \Delta V_D = 0, \ \ V_D = ct = 0 \ \ deoarece \ \ V_{D(P\in\Sigma)} = 0 \ \text{şi}$$

$V'(\bar{r}) = V''(\bar{r})$ (soluție unică);

- în condițiuni pe frontieră de tip Neumann:

$$\int_{v} (\nabla V_D)^2\, dv = 0, \ \ \Delta V_D = 0, \ \ V_D = ct., \ \ deoarece \ \ \frac{\partial V_D}{\partial n}\Big|_{P\in\Sigma} = 0$$

şi $V'(\bar{r}) = V''(\bar{r}) + ct$. Soluția este unică, cu aproximația unei constante.

3.6.3. Soluția ecuației Poisson a potențialului electrostatic

Se consideră câmpul electrostatic existent într-un mediu omogen pe domenii, liniar, izotrop şi fără polarizare electrică permanentă. Ecuația Poisson a potențialului electrostatic V într-un punct dintr-un astfel de domeniu a fost stabilită la § 3.6.1 şi are forma:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{3.41}$$

Integrarea acestei ecuații în condiții de limită şi de frontieră date şi cunoscând distribuția sarcinilor electrice în întreg domeniul considerat, se face folosind formula a II-a a lui Green (A4.13), având forma:

$$\int_{\Sigma}(U\nabla V - V\nabla U)\,d\bar{s} = \int_{v_\Sigma}(U\nabla^2 V - V\nabla^2 U)\,dv \tag{3.42}$$

în care U şi V sunt funcții scalare de spațiu, ultima reprezentând potențialul electrostatic.

Pentru funcția U se pun următoarele condiții:

- să fie o funcție numai de distanța r de la punctul P în care se determină potențialul, la elementele de volum dv şi de suprafață ds; $U = U(r)$ (Fig. 3.5)
- să aibă laplacianul nul în orice punct al domeniului: $\nabla^2 U = 0$.

Forma funcției $U(r)$ se determină egalând cu zero laplacianul ei. Rezultă următoarea formă a acestei funcții:

$$U = \frac{1}{r}. \tag{3.43}$$

Înlocuind relația (3.43) şi condiția impusă $\nabla^2 U = 0$ în (3.42) se obține:

$$\oint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\frac{1}{r}\right)d\bar{s} = -\int_{v_\Sigma}\frac{\rho_v\,dv}{\varepsilon r} \tag{3.44}$$

Concret, în cele ce urmează, ne referim la integrarea ecuației (3.41) în raport cu potențialul electrostatic V din punctul P al câmpului dintr-un domeniu delimitat de suprafața de frontieră Σ, produs de corpul dielectric omogen C_1 încărcat cu sarcini electrice adevărate, volumetrice şi superficiale, având densitățile ρ_{v1}, respectiv ρ_{s13} şi de corpul metalic C_2 încărcat
cu sarcini electrice adevărate superficiale cu densitatea ρ_{s23}, unde apar şi sarcini electrice de polarizare superficiale (Fig. 3.5).

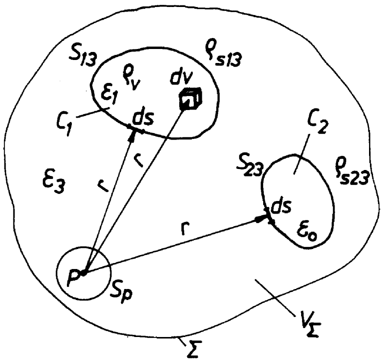


Fig. 3.5. Domeniul de existență al câmpului electrostatic.

Formula a II-a a lui Green pretinde continuitatea celor două funcții U și V și a derivatelor lor. Dar, se constată că în domeniul de volum v_Σ, funcția $U = \frac{1}{r}$ devine infinită în punctul P (unde $r = 0$), ceea ce necesită izolarea acestui punct cu o sferă mică, cu centrul în P și de suprafață S_p (Fig. 3.6, a). De asemenea, funcția V are derivatele discontinue în punctele suprafețelor S_{13} și S_{14} unde există sarcini electrice superficiale. Este necesar ca aceste suprafețe să fie eliminate din domeniu, adică să fie considerate ca suprafețe de limită.

Deci, integrala suprafață din membrul stând al relației (3.44) se efectuează pentru suprafețele Σ, S_p, S_{13}, S_{23} cu observația că pentru ultimele două suprafețe integrala se efectuează de două ori, adică pentru două suprafețe infinit apropiate, de o parte și de alta a fiecăreia, cu scopul de a fi excluse din domeniu (Fig. 3.6, b, c). Calculăm, în continuare, aceste integrale.

Pentru *suprafața* S , ce delimitează domeniul, avem:

$$\int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\frac{1}{r}\right)d\bar{s} = \int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\bar{n}\cdot\nabla V - V\bar{n}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)ds = \int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right)ds \qquad (3.45)$$

Dacă suprafața Σ este extinsă la infinit, rezultă:

$$\int_{\Sigma_\infty} \left(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\frac{1}{r}\right)ds = 0 \qquad (3.46)$$

deoarece corpurile încărcate cu sarcini electrice ocupă un domeniu finit și, când $r \to \infty$, V tinde la zero ca $\frac{1}{r}$, $\frac{\partial V}{\partial n}$ și $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$ ca $\frac{1}{r^2}$, iar ds crește ca r^2. Deci, mărimea de integrat tinde la zero ca $\frac{1}{r}$. Versorul $\bar{n}$ este normal la suprafața Σ, orientat spre exteriorul ei.

Pentru *suprafața* S_P (Fig. 3.6, a) se obține:

$$\oint_{Sp} \left(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\frac{1}{r}\right)d\bar{s} = \oint_{Sp} \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}ds - \oint_{Sp} V\frac{1}{r^2}ds = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{med} 4\pi r - V_{med}4\pi \qquad (3.47)$$

unde $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{med}$ și V_{med} reprezintă valorile medii ale lui $\frac{\partial V}{\partial n}$, respectiv V pe suprafața S_P. Am avut în vedere și următoarele relații:

$$\bar{n}\cdot\nabla V = \frac{\partial V}{\partial n}, \quad \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\bar{u}_r}{r^2}, \qquad \oint_{Sp}\frac{ds}{r^2} = \oint d\Omega = 4\pi$$

La limită, când $r \to 0$, funcțiile $(\frac{\partial V}{\partial n})_{med}$ şi V_{med} tind spre valorile lor finite din punctul P, aşa că

$$\lim_{r\to 0}\oint_{S_P}(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\frac{1}{r})\,d\bar{s} = -4\pi V . \qquad (3.48)$$

Pentru *suprafața* S_{13} (Fig. 9.6, b) rezultă:

$$\int_{S_{13}}(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\frac{1}{r})\,d\bar{s} = \int_{S_{13}}[\frac{1}{r}(\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_3}) + V\frac{\bar{u}_r}{r^2}(\bar{n}_1 + \bar{n}_3)]\,ds =$$

$$= \int_{S_{13}}\frac{div_s\bar{E}}{r}ds = \int_{S_{13}}\frac{\rho_s + \rho_s'}{\varepsilon_0 r}ds ,$$

unde am avut în vedere că $\bar{n}_1 + \bar{n}_3 = 0$ şi

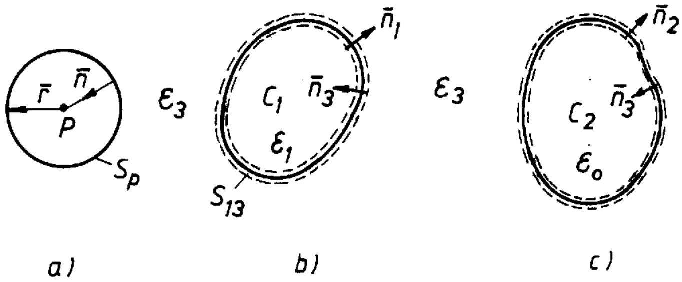


Fig. 3.6. Suprafețe de limită.

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_3} = -(E_{n_1} + E_{n_3}) = div_s\bar{E} = \frac{\rho_s + \rho_s'}{\varepsilon_0} .$$

Pentru *suprafața* S_{23}, reprezentată in figura 3.6, c, se obține, în mod analog:

$$\oint_{S_{23}}(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\frac{1}{r})\,d\bar{s} = \oint_{S_{23}}\frac{\rho_s + \rho_s'}{\varepsilon_0 r}ds . \qquad (3.49)$$

Introducând rezultatele de mai sus în relația (3.47) şi explicitând funcția V, se ajunge la următoarea formă a soluției ecuației lui Poisson:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v_\Sigma}\frac{\rho_v + \rho_v'}{r}dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v_\Sigma}\frac{\rho_s + \rho_s'}{\varepsilon_0}ds \qquad (3.50$$

Această relație a soluției ecuației lui Poisson am scris-o având în vedere că pentru un mediu dielectric omogen, izotrop şi fără polarizare permanentă, cu permitivitatea ε, avem $\frac{\rho_v + \rho'_v}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$, iar la suprafața de separație dintre un corp metalic şi un astfel de mediu se poate scrie $\frac{\rho_s + \rho'_s}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}$ (Aplic. 3.2).

Din relația (3.50) se obține:

$$\overline{E} = -\nabla V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v_\Sigma}\frac{(\rho_v + \rho'_v)\,dv}{r^2}\,\overline{u}_r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S}\frac{(\rho_s + \rho'_s)\,ds}{\varepsilon_0}\,\overline{u}_r \qquad (3.51)$$

Menționăm că integrala de volum din relațiile (3.50), respectiv (3.51) se efectuează pentru acele domenii unde există sarcini electrice volumetrice, iar integrala de suprafață se efectuează pentru toate acele suprafețe unde există sarcini electrice superficiale.

Dacă originea pentru vectorii de poziție se alege ca în figura 3.7, atunci soluția ecuației Poisson are următoare formă:

$$V(\overline{r}) = \int_{v_\Sigma}\frac{\rho_v(\overline{r}') + \rho'_v(\overline{r}')}{4\pi\varepsilon_0 R}\,dv + \int_{S}\frac{\rho_s(\overline{r}') + \rho'_s(\overline{r}')}{4\pi\varepsilon_0 R}\,ds \qquad (3.52)$$

unde $\overline{R} = \overline{r} - \overline{r}'$

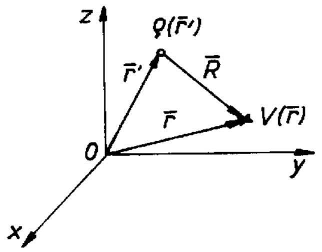


Fig. 3.7. Originea vectorilor de poziție.

3.7. Ecuația de ordinul doi a intensității câmpului electrostatic.

Se considera ecuatia lui Poisson a potențialului electrostatic (3.41) şi se calculeaza gradientul acesteia, adică

$$grad(\Delta V) = -\ grad\frac{\rho_v}{\varepsilon}\ .$$

În membrul stâng al acesei ecuații se inversează operațiile de derivare şi se obține: $grad(\Delta V) = \Delta(grad\,V) = -\Delta\,\overline{E}$, unde $\overline{E} = -\,grad\,V$. Rezultă ecuația vectorială de tip Poisson a intensității câmpului electrostatic

$$\Delta\,\overline{E} = grad\frac{\rho_v}{\varepsilon}\ . \qquad (3.53)$$

Pentru $\rho_v = 0$ sau $\rho = ct.$ se obține ecuația vectorială de tip Laplace

$$\Delta \overline{E} = 0 . \qquad (3.54)$$

Evident, fiecare dintre ecuațiile vectoriale (3.53) sau (3.54) se poate transforma în trei ecuații scalare de tip Poisson, respectiv de tip Laplace.. Găsirea soluției $\overline{E}(r)$ a ecuațiilor vectoriale menționate necesită cunoaşterea condițiilor de tip Dirichlet sau de tip Neuman pe frontiera domeniului, care sunt mai puțin obişnuite pentru intensitatea câmpului electrostatic.

3.8. Teorema superpoziției câmpurilor electrostatice

În medii liniare, izotrope şi fără polarizare electrică permanentă este valabilă următoarea teoremă a superpoziției:

Câmpul electrostati produsde două sau mai multe repartiții de sarcini electrice este egal cu suma câmpurilor produse de fiecare repartiție în parte. Însumarea se face geometric pentru intensitățile câmpurilor (mărimi vectoriale) şi se face algebric pentru potențiale (mărimi scalare).

Această teoremă este o consecință a faptului că în medii liniare ecuațiile câmpului sunt liniare.

Pentru justificarea teoremei, se consideră câmpul electrostatic produs într-un mediu omogen/neomogen de către sarcini electrice cu repartiție volumetrică ρ_{v1} şi superficială ρ_{s1}, aparținând unor corpuri dintr-un domeniu finit. Potențialul întru-un punct al câmpului este:

$$V_1 = \int_v \frac{\rho_{v1}}{4\pi\varepsilon r} dv + \int_S \frac{\rho_{s1}}{4\pi\varepsilon r} ds . \qquad (3.55)$$

Pentru o altă repartiție ρ_{v2} *şi* ρ_{s2} a sarcinilor pe aceleaşi corpuri, potențialul în acelaşi punct este:

$$V_2 = \int_v \frac{\rho_{v2}}{4\pi\varepsilon r} dv + \int_S \frac{\rho_{s2}}{4\pi\varepsilon r} ds . \qquad (3.56)$$

Şi acum, suma celor două repartiții ale sarcinilor produce potențialul:

$$V = \int_v \frac{\rho_{v1} + \rho_{v2}}{4\pi\varepsilon r} dv + \int_S \frac{\rho_{s1} + \rho_{s2}}{4\pi\varepsilon r} ds . \qquad (3.57)$$

Se observă că $V = V_1 + V_2$.

3.9. Teorema refracției liniilor câmpului electrostatic.

Fie S_{12} suprafața de separație dintre două medii dielectrice liniare, izotrope şi fără polarizare electrică permanentă, având permitivitățile electrice ε_1, respectiv ε_2, în care există un câmp electric static/staționar creat de surse exterioare. Pe suprafață nu există sarcini electrice adevărate ($\rho_s = 0$). La trecerea prin suprafață liniile câmpului electric suferă o refracție, care se explică după cum urmează.

Conform legii fluxului electric s-au obținut relațiile (3.19) şi (3.21), în care se introduce $r_s = 0$. Rezultă că, componentele normale la suprafață ale inducției electrice, în două puncte foarte apropiate, situate de o parte şi de alta a suprafeței, se conservă (sunt continui) (Fig. 3.8, a):

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{3.58}$$

Pe de altă parte, conform cu teorema potențialului electric (rel.2.24), componentele tangențiale ale intensității câmpului electric se conservă (sunt continui) (Fig. 3.8, b):

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad sau \quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \tag{3.59}$$

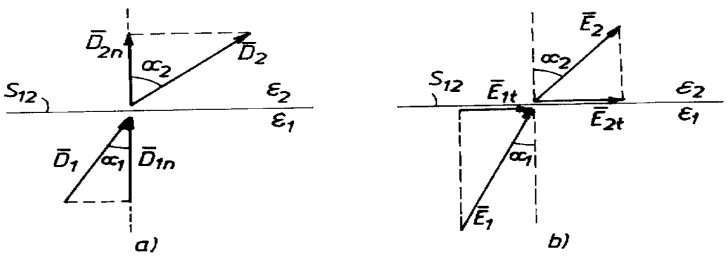


Fig. 3.8. Schiță explicativă pentru teorema refracției liniilor câmpului electric.

Unghiurile dintre normala la suprafață şi direcțiile vectorilor $\overline{D}_1$ $(sau\ \overline{E}_1)$, respectiv $\overline{D}_2$ $(sau\ \overline{E}_2)$ sunt notate cu α_1 şi α_2, pentru care $tg\,\alpha_1 = D_{1t}/D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1t}/D_{1n}$, $tg\,\alpha_2 = D_{2t}/D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2t}/D_{2n}$ şi ținând seama de relațiile (2.113) şi (2.114), rezultă:

$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ . \tag{3.60}$$

Această relație este denumită *teorema refracției liniilor câmpului electrostatic.*

P R O B L E M E (P3)

P3.1. O sferă dielectrică de rază a , aşezată în vid (sau aer), este încărcată uniform în volum cu sarcina electrică adevărată de densitate ρ_v. Ştiind că permitivitatea electrică relativă a materialului sferei este $\varepsilon_r = ct.$, se cer:

a) $\overline{E}, \overline{D}$ şi $\overline{P}$ în puncte din interiorul şi din exteriorul sferei dielectrice;

b) Densităţile sarcinilor electrice de polarizare din volumul sferei, ρ'_v, respectiv de de pe suprafaţa ei, ρ'_s.

R: a) $\overline{E}_{int} = \dfrac{\rho_v}{3\varepsilon_r \varepsilon_0}\overline{r}, \quad \overline{D}_{int} = \dfrac{\rho_v}{3}\overline{r}, \quad \overline{P}_{int} = (\varepsilon_r - 1)\dfrac{\rho_v}{3r^3}\overline{r}.$

$$\overline{E}_{ext} = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}\times\frac{a^3}{r^2}, \quad \overline{D}_{ext} = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}\times\frac{a^3}{r^2}, \quad \overline{P}_{ext} = 0 .$$

b) $\rho'_{v1} = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\rho_v, \quad \rho'_{v2} = 0, \quad \rho'_s = (\varepsilon_r - 1)\dfrac{a\rho_v}{3\varepsilon}$ . .

P3.2. O coajă dielectrică sferică de raze interioară a şi exterioară b, situată în vid, are permitivitatea electrică variabilă în funcţie de rază conform relaţiei $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 b/r$. In centrul cojii este situată sarcina electrică punctiformă Q . .Să se calculeze**:**

a) $\overline{E}$, $\overline{D}$ şi $\overline{P}$ în puncte din cele trei zone;
b) diferenţa de potenţial dintre suprafaţa interioară şi cea exterioară a cojii;
c) densităţile sarcinilor electrice de polarizare.

R: a) $\overline{E}_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overline{r}}{R^3}, \quad \overline{E}_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\dfrac{\overline{r}}{r^2}, \quad \overline{E}_3 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overline{r}}{r^3}; \quad \overline{D}_1 = \overline{E}_1/\varepsilon_0,$

$$\overline{D}_2 = \frac{Q}{4\pi}\frac{\overline{r}}{r^3}, \quad \overline{D}_3 = \frac{Q}{4\pi}\frac{\overline{r}}{r^3}; \quad \overline{P}_1 = \overline{P}_3 = 0, \quad \overline{P}_2 = \varepsilon_0\left(\frac{b}{r} - 1\right)\overline{E}_2;$$

b) $V_1 - V_2 = \dfrac{Qa}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{b}{a}$; c) $\rho'_{sa} = -\left(\dfrac{b}{a} - 1\right)\dfrac{Q}{4\pi a b}, \quad \rho'_{sb} = 0; \quad \rho'_v = \dfrac{Q}{4\pi b r^2}$.

P3.3. Se consideră situată în vid o ţeavă izolantă de raze a şi b (a < b), având permitivitatea electrică relativă $\varepsilon_r = ct.$ şi fiind încărcată uniform, în volum, cu sarcina electrică de densitate ρ_v. Să se calculeze densităţile sarcinilor electrice de polarizare conţinute de ţeavă.

R : $\rho'_{sa} = 0, \quad \rho'_{sb} = (\varepsilon_r - 1)\dfrac{\rho_v(b^2 - a^2)}{b}, \quad \rho'_v = -2(\varepsilon_r - 1)\rho_v$.

P3.4. Armăturile unui condensator electric plan, având suprafaţa S, sunt legate la o sursă cu tensiunea U. Spaţiul dintre armături este ocupat de două straturi dielectrice, cu grosimile d_1 şi d_2, având permitivităţile

$$\varepsilon_1(x) = \varepsilon_0\left(3 - \frac{x}{d_1}\right); \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0,$$

unde x se măsoară de la prima armătură, $x \in (0, d_1)$. Să se calculeze:

a) capacitatea electrică a condensatorului;
b) $\overline{E}$, $\overline{D}$ şi $\overline{P}$ în puncte din cele două straturi dielectrice.

R: $a)\ C = \dfrac{e_0\, S}{d_1\, ln\, {}^2\!/_3 + d_2}\ ;\quad b)\ \bar{E}_1 = \dfrac{C\,U}{e_1\,(x)\, S}\,\bar{i}\ ,\ \ \bar{E}_2 = \dfrac{C\,U}{e_0\, S}\,\bar{i}\ ;$

$\bar{D}_1 = \bar{E}\,/\,e_1\,(x)\ ,\quad \bar{D}_2 = \bar{E}_2\,/\,e_0\ ;\quad \bar{P}_1 = [\,e_1(x) - e_0\,]\,\bar{E}_1\ ,\quad \bar{P}_2 = 0\ .$

P3.5. Să se rezolve cerințele specificate la problema P3.3 considerând că mediul dielectric dintre armăturile condesatorului plan este omogen, dar neliniar: $e(E)$.

R: $a)\ C = \dfrac{e(E)\,S}{d}\ ;\quad b)\ \bar{E} = \dfrac{U}{d}\,\bar{i}\ ,\quad \bar{D} = e(E)\,\bar{E}\ ,\quad \bar{P} = [\,e(E) - e_0\,]\,\bar{E}\ .$

P3.6. Să se stabilească ecuația de ordinal doi a vectorului inducției electrice $\bar{D}$ al câmpului electrostatic dintr-un mediu dielectric omogen și liniar, care conține în volum sarcini electrice adevărate, cu densitatea r_v .

R: $D\,\bar{D} = grad\, r_v\,.$