

INEGALITATEA MEDIILOR

Se poate arăta cum poate fi folosită inegalitatea mediilor pentru stabilirea unor inegalități interesante. **Inegalitatea mediilor** se scrie sub forma:

$$\frac{1}{\frac{x+y}{xy}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, x, y > 0, \text{ unde}$$

$$m_h = \frac{2}{\frac{x+y}{xy}} = \text{media armonică}$$

$$m_g = \sqrt{xy} = \text{media geometrică}$$

$$m_a = \frac{x+y}{2} = \text{media aritmetică}$$

$$m_p = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \text{media pătratică}$$

Egalitate în inegalitatea mediilor are loc numai dacă $x=y$.

Problema 1. a). Demonstrați că $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$

b). Demonstrați că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0$

Soluție. a). Cu inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

b). Putem lua $x = \frac{a}{b}$ în a). Sau procedăm ca înainte:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

Problema 2. Demonstrați că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, avem

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Soluție Folosim inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică :

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = |ab| \geq ab \quad \text{și relațiile analoage}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab, \quad \frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc, \quad \frac{c^2 + a^2}{2} \geq ca.$$

Prin adunare se obține:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} \geq ab + bc + ca.$$

Problema 3. Arătați că pentru orice numere reale strict pozitive x, y, z , avem

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$$

Soluție . În inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \text{ luăm}$$

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x} \quad \text{și obținem}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \geq \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} + \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} + \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} \quad \text{sau}$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}.$$

Problema 4. Arătați că pentru orice numere reale strict pozitive a, b, c , avem

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$$

Soluție Folosim inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{c}{a} + 1\right) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot 1} = 2\sqrt{\frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a}} = 2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\right) \geq 2 \cdot 2 = 4$$

Problema 5. Arătați că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ avem

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Soluție. Cu inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică,

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc$$

Problema 6. Arătați că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ avem

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

Soluție Prin înmulțirea parantezelor, obținem

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2 + 2 = 4$$

Altfel, din inegalitatea dintre media armonică și cea aritmetică

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$$

Rezultă imediat că $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$.