Liceul de Informatică „ *Spiru-Haret* ” Suceava

REFERAT LA MATEMATICĂ

Elev : Alexevici Cătălin

Profesor coordonator: **Oanea Călin**

CUPRINS

Adresă de e-mail: alexey@mail2grandpa.com

MATRICI ŞI DETERMINANŢI

1. MATRICI

1.1. Despre matrici

Acest concept l-am întalnit înca din primul an de liceu, atunci când s-a pus problema rexolvarii unui sistem de două ecuații cu două necunoscute x, y, de forma $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Acestui sistem i-am asociat un teblou pătratic, care conține coeficienții necunoscutelor (în prima linie sunt coeficienții lui x, y din prima ecuație, iar in a doua linie figurează coeficienții lui x, y din ecuația a doua): $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$.

Am numit acest tablou matrice pătratică (sau matricea sistemului). Pe cele două coloane ale matricei figurează coeficienții lui x (pe prima coloană a, a') şi respectiv coeficienții lui y (pe a doua coloană b, b').

Definiție. Se numeşte **matrice cu** m **linii şi** n **coloane** (sau de tip $m \times n$) un tablou cu m linii şi n coloane

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ale cărui elemente a_{ij} sunt numere complexe.

Uneori această matrice se notează şi $A = (a_{ij})$ unde $i = \overline{1,m}$ şi $j = \overline{1,n}$. Pentru elementul a_{ij}, indicele i arată linia pe care se află elementul, iar al doilea indice j indică pe ce coloană este situat.

Mulțimea matricilor de tip $m \times n$ cu elemente numere reale se notează prin $\mathrm{M}_{m,n}(R)$. Aceleaşi semnificații au şi mulțimile $\mathrm{M}_{m,n}(Z), \mathrm{M}_{m,n}(Q), \mathrm{M}_{m,n}(C)$.

Cazuri particulare

1) O matrice de tipul $1 \times n$ (deci cu o linie şi n coloane) se numeşte **matrice linie** şi are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

2) O matrice de tipul $m \times 1$ (cu m linii şi o coloană) se numeşte **matrice coloană** şi are forma

$$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

3) O matrice de tip $m \times n$ se numeşte **nulă** (**zero**) dacă toate elementele ei sunt zero. Se notează cu O

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Dacă numărul de linii este egal cu numărul de coloane, atunci matricea se numeşte **pătratică**.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sistemul de elemente $(a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn})$ reprezintă **diagonala principală** a matricii A, iar suma acestor elemente $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ se numeşte **urma matricii** A notată $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Sistemul de elemente $(a_{1n} \ a_{2\,n-1} \ \dots \ a_{n1})$ reprezintă **diagonala secundară** a matricii A.

Mulţimea acestor matrici se notează $\mathrm{M}_n(C)$. Printre aceste matrici una este foarte importantă aceasta fiind

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

şi se numeşte **matricea unitate** (pe diagonala principală are toate elementele egale cu 1, iar în rest sunt egale cu 0).

1.2. Operații cu matrici

1.2.1. *Egalitatea a două matrici*

<u>Definiție</u>. Fie $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$. Spunem că matricile A, B **sunt egale** şi scriem $A = B$ dacă $a_{ij}=b_{ij}$, $(\forall)\ i=\overline{1,m}$, $(\forall)\ j=\overline{1,n}$.

Exemplu: Să se determine numerele reale x, y astfel încât să avem egalitatea de matrici

$$\begin{pmatrix} x+1 & x+y \\ 0 & x-2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -x-1 \\ 0 & 9-2x \end{pmatrix}.$$

R. Matricile sunt egale dacă elementele corespunzătoare sunt egale, adică:

$$\begin{cases} x+1=2 \\ x+y=-x-1 \\ 0=0 \\ x-2y=9-2x. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem găsim soluția $x = 1$, $y = -3$.

1.2.2. *Adunarea matricilor*

Definiție. Fie $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij})\in \mathrm{M}_{m,n}(C)$. Matricea C se numeşte **suma** matricilor A, B dacă: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ (\forall)\ i=\overline{1,m},\ (\forall)\ j=\overline{1,n}$.

Observații

1) Două matrici se pot aduna dacă **sunt de acelaşi tip**, adică dacă au acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane, deci $A, B\in \mathrm{M}_{m,n}(C)$.

2) Explicit adunarea matricilor A, B înseamnă:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplu: Să se calculeze $A + B$ pentru:

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

R. 1. Avem

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 10 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & -1+5 & 2-3 \\ 3+10 & 0+1 & 1+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 13 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Avem

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.=\begin{pmatrix} 1+0 & 1+1 \\ -1+1 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proprietăți ale adunării matricilor

$\mathbf{A_1}$ **(Asociativitatea adunării).** Adunarea matricilor este **asociativă**, adică:

$$(A+B)+C=A+(B+C),\ (\forall)A, B, C\in \mathrm{M}_{m,n}(C).$$

$\mathbf{A_2}$ **(Comutativitatea adunării).** Adunarea matricilor este **comutativă**, adică:

$$A+B=B+A,\ (\forall)A, B\in \mathrm{M}_{m,n}(C).$$

$\mathbf{A_3}$ **(Element neutru).** Adunarea matricilor admite matricea nulă ca **element neutru**, adică $\exists\ O_{m,n}\in \mathrm{M}_{m,n}(C)$ astfel încât $A+O_{m,n}=A,\ (\forall)A\in \mathrm{M}_{m,n}(C)$.

$\mathbf{A_4}$ **(Elemente opuse).** Orice matrice $A\in \mathrm{M}_{m,n}(C)$ are un opus, notat $-A$, astfel încât

$$A+(-A)=O_{m,n}.$$

1.2.3. *Înmulțirea cu scalari a matricilor*

Definiție. Fie $\lambda\in C$ şi $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_{m,n}(C)$. Se numeşte **produsul dintre scalarul** $\lambda\in C$ **şi matricea** A, matricea notată $\lambda A\in \mathrm{M}_{m,n}(C)$ definită prin $\lambda A=(\lambda a_{ij})$.

Obs.: A înmulți o matrice cu un scalar revine la a înmulți toate elementele matricii cu acest scalar.

Deci $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$.

Exemplu Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 5 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $6A = \begin{pmatrix} 3 & -18 & 30 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Proprietăţi ale înmulţirii matricilor cu scalari

S$_1$ $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $(\forall)\ \lambda, \mu \in C, (\forall)\ A \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$;

S$_2$ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\forall)\ \lambda \in C, (\forall)\ A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$;

S$_3$ $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $(\forall)\ \lambda, \mu \in C, (\forall)\ A \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$;

S$_4$ $1 \cdot A = A, 1 \in C, (\forall)\ A \in \mathrm{M}_{m,n}(C)$;

1.2.4. *Înmulţirea matricilor*

<u>Definiţie</u>. Fie $A = (a_{ki}) \in \mathrm{M}_{m,n}(R)$, $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{n,p}(R)$. **Produsul dintre matricile** *A* şi *B* (**în aceasta ordine**), notat *AB* este matricea $C = (c_{kj}) \in \mathrm{M}_{m,p}(R)$ definită prin

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij},\ (\forall)\ k = \overline{1,m}, (\forall)\ j = \overline{1,n}.$$

Observaţii

1) Produsul *AB* a două matrici nu se poate efectua întotdeauna decât dacă $A \in \mathrm{M}_{m,n}(R)$, $B \in \mathrm{M}_{n,p}(R)$, adică **numărul de coloane ale lui** *A* **este egal cu numărul de linii ale lui** *B*, când se obţine o matrice $C = AB \in \mathrm{M}_{m,p}(R)$.

2) Dacă matricile sunt pătratice $A, B \in \mathrm{M}_n(R)$ atunci are sens întotdeauna atât *AB* cât şi *BA*, iar, în general, $AB \neq BA$ adică înmulţirea matricilor **nu este comutativă**.

Proprietăţi ale înmulţirii matricilor

I$_1$ (Asociativitatea înmulţirii). Înmulţirea matricilor este asociativă, adică

$$(AB)C = A(BC), (\forall) A \in \mathrm{M}_{m,n}(C), (\forall) B \in \mathrm{M}_{n,p}(C), (\forall) C \in \mathrm{M}_{p,s}(C).$$

I$_2$ (Distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea). Înmulţirea matricilor este distributivă în raport cu adunarea matricilor, adică

$(A + B)C = AC + BC,\ C(A + B) = CA + CB,\ (\forall) A, B, C$ matrici pentru care au sens operaţiile de adunare şi înmulţire.

I$_3$ Dacă $I_n \in \mathrm{M}_n(C)$ este matricea unitate, atunci

$$I_n A = AI_n = A,\ (\forall) A \in \mathrm{M}_n(C).$$

Se spune că I_n este **element neutru** în raport cu operaţia de înmulţire a matricilor.

1.2.5. *Puterile unei matrici*

<u>Definiție</u>. Fie $A \in \mathrm{M}_n(C)$. Atunci $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, …, $A^n = A^{n-1} \cdot A, (\forall)$ $n \in N^*$. (Convenim $A^0 = I_2$).

<u>TEOREMA Cayley – Hamilton</u>. Orice matrice $A \in \mathrm{M}_n(C)$ îşi verifică polinomul caracteristic $\det(A - \lambda I) = 0$.

Pentru $n = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\det A - \lambda I = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0 \Rightarrow ad - (a+d)\lambda + \lambda^2 - bc = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

polinom caracteristic

Generalizat.

$$A^n - (\mathrm{Tr}A) \cdot A^{n-1} + (\det A) \cdot I_n = 0$$

2. DETERMINANȚI

2.1. Definiția determinantului de ordin $n \le 4$

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(C)$ o matrice pătratică. Vom asocia acestei matrici un număr notat det(A) numit **determinantul matricii** A.

<u>Definiție</u>. Dacă $A = (a_{11}) \in \mathrm{M}_n(C)$ este o matrice pătratică de ordinul întâi, atunci

$$\det(A) = a_{11}.$$

<u>Definiție</u>. Determinantul matricii $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ este numărul

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

şi se numeşte **determinant de ordin** 2. Termenii $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$ se numesc termenii dezvoltării determinantului de ordin 2.

<u>Definiție</u>. Determinantul matricii

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{este numărul}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

şi se numeşte **determinant de ordin** 3. Termenii care apar în formulă se numesc termenii dezvoltării determinantului.

Pentru calculul determinantului de ordin trei se utilizează trei tehnici simple:

Regula lui Sarrus

Fie determinantul de ordin 3, $d = \left|a_{ij}\right|_{i,j=\overline{1,3}}$. Pentru a calcula un astfel de determinant se utilizează tabelul de mai jos.

$$\begin{array}{ccc} \left|a_{11}\right. & a_{12} & \left.a_{13}\right| \\ \left|a_{21}\right. & a_{22} & \left.a_{23}\right| \\ \left|a_{31}\right. & a_{32} & \left.a_{33}\right| \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

(am scris sub determinant primele două linii)

Se face produsul elementelor de pe diagonale. Produsul elementelor de pe o diagonală descendentă este cu semnul plus. Avem trei astfel de produse: $a_{11}a_{22}a_{33}, a_{13}a_{21}a_{32}, a_{12}a_{23}a_{31}$.
Produsul elementelor de pe o diagonală ascendentă este cu semnul minus. Avem trei astfel de produse: $-a_{13}a_{22}a_{31}, -a_{12}a_{21}a_{33}, -a_{11}a_{23}a_{32}$.

Suma celor şase produse dă valoarea determinantului *d* de ordin 3. Acest procedeu de calcul se numeşte „regula lui Sarrus”.

Regula triunghiului

Am văzut că determinantul de ordin trei are în dezvoltarea sa şase termeni, trei cu semnul plus şi alţi trei cu semnul minus.

Primul termen cu plus se găseşte înmulţind elementele de pe diagonala principală, iar ceilalţi doi, înmulţind elementele situate în vârfurile celor două triunghiuri care au o latură paralelă cu cu diagonala principală. După aceeaşi regulă, referitoare la diagonala secundară, se obţin termenii cu minus.

Obs.: Atât „regula lui Sarrus” cât şi „regula triunghiului” se aplică **numai determinanţilor de ordin 3**.

Exemplu. Să se calculeze prin cele două metode de mai sus determinantul

$$d = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

R. Regula lui Sarrus.

$$d = -3\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot(-1) - \left[3\cdot 2\cdot 1 + (-3)\cdot 1\cdot(-1) + 0\cdot 0\cdot 0\right] = 0+0+0-(6+3+0) = -9$$

Regula triunghiului

$$d = -3\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot(-1)\cdot 3 + 0\cdot 1\cdot 1 - \left[3\cdot 2\cdot 1 + (-3)\cdot 1\cdot(-1) + 0\cdot 0\cdot 0\right] = 0+0+0-(6+3+0) = -9$$

Recurent (sau dezvoltare după o linie sau o coloană)

Determinantul de ordin 3 are 6 (= 3!) termeni dintre care trei sunt cu semnul plus, iar ceilalţi cu semnul minus.

Are loc următoarea proprietate:

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Observaţii

1) Egalitatea (1) se mai numeşte **dezvoltarea determinantului după elementele liniei întâi**, iar egalitatea (2) se numeşte **dezvoltarea determinantului după elementele coloanei întâi**.

2) Formulele (1) şi (2) sunt relaţii de **recurenţă**, deoarece determinantul de ordin 3 se exprimă cu ajutorul unor deteminanţi de ordin inferior (2).

2.2. Definiţia determinantului de ordin *n*

Voi defini în continuare determinantul de ordin n prin recurenţă cu ajutorul determinanţilor de ordin $n-1$. Pentru aceasta sunt necesare unele precizări.

Fie $A=\left(a_{ij}\right)\in \mathrm{M}_n(C)$.

<u>Definiţie1</u>. Se numeşte **minor** asociat elementului a_{ij} determinantul matricii pătratice A_{ij} de ordin $n-1$ obţinut prin suprimarea liniei i şi coloanei j din matricea A. Se notează acest minor prin $\det\left(A_{ij}\right)$ sau D_{ij}.

<u>Definiţie2</u>. Se numeşte **complement algebric** al elementului a_{ij} numărul $(-1)^{i+j}\det\left(A_{ij}\right)$. Exponentul $i+j$ al lui (-1) este suma dintre numărul liniei i şi coloanei j pe care se află a_{ij}.

<u>Definiţie</u>. Determinantul matricii $A=\left(a_{ij}\right)$de ordin n este suma produselor elementelor din prima linie cu complemenţii lor algebrici adică

$$\det(A)=a_{11}D_{11}-a_{12}D_{12}+a_{13}D_{13}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{1n}D_{1n}.$$

Observaţii

1) Elementelor, liniilor şi coloanelor matricii A le vom spune de asemenea elementele, liniile şi coloanele determinantului

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2) Formula din definiţie spunem că reprezintă **dezvoltarea determinantului de ordin *n* după elementele primei linii**.

3) Definiţia determinantului de mai sus este încă puţin eficientă (o voi ilustra mai jos pentru $n = 4$). De aceea se impune stabilirea unor proprietăţi ale determinanţilor care să fie comode atât din punct de vedere al teoriei şi din punct de vedere calculatoriu. Aceste proprietăţi le prezint în paragraful următor.

4) Continuând cu explicitarea determinanţilor de ordin $n-1$ din definiţie $\left(D_{11},D_{12},\ldots,D_{1n}\right)$ se obţine pentru $\det(A)$ o sumă de produse de elemente din determinant, fiecare produs conţinând elemente situate pe linii şi coloane diferite.

5) Determinantul este o funcţie $\det:\mathrm{M}_n(C)\to C$.

Exemplu Să se calculeze determinantul de ordin 4:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

R. Aplicăm definiţia dată mai sus pentru $n = 4$ şi dezvoltăm determinantul după elementele liniei întâi. Avem:

$$d=1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$=0-0-1+2=1$,
unde determinanții de ordin 3 i-am calculat prin una din metodele prezentate la determinanții de ordin 3.

2.3. Proprietățile determinanților

P$_1$. Determinantul unei matrici coincide cu determinantul matricii transpuse, adică dacă $A \in \mathrm{M}_n(C)$, atunci $\det(A)=\det({}^tA)$.

Demonstrație. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi ${}^tA=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Atunci $\det(A)=ad-bc$, iar $\det({}^tA)=ad-bc$. Prin urmare $\det(A)=\det({}^tA)$.

P$_2$. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricii este nul.

Demonstrație. Avem $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}=0\cdot d-0\cdot c=0$ şi $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}=0\cdot d-0\cdot b=0$.

P$_3$. Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau două coloane) între ele obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricii inițiale.

Demonstrație. Prin schimbarea liniilor să arăt că avem egalitatea $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Avem evident $bc-ad=-(ad-bc)$.

P$_4$. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.

Demonstrație. Verific pentru linii (şi tot odată pentru coloane). Avem:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}=a\cdot b-a\cdot b=0.$$

P$_5$. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrici sunt înmulțite cu un număr α, obținem o matrice al cărei determinant este egal cu α înmulțit cu determinantul matricii inițiale.

Demonstrație. Verificăm pentru linii proprietatea.

$$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a & \alpha\cdot b \\ c & d \end{vmatrix}=\alpha\cdot a\cdot d-\alpha\cdot b\cdot c=\alpha(ad-bc)=\alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

P$_6$. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrici sunt proporționale, atunci determinantul este nul.

Demonstrație. Verificăm pentru linii.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}=\lambda(ab-ab)=0.$$

P$_7$. Dacă linia *i* a unei matrici *A* este suma a doi vectori, atunci determinantul ei este egal cu suma a doi determinanți corespunzători matricelor care au aceleaşi linii ca *A*, cu excepția liniei *i* unde au câte unul din cei doi vectori.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demonstrație. Am de arătat că:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Într-adevăr membrul stâng este egal cu $(a+a')d - c(b+b') = ad + a'd - bc - b'c$. Membrul drept este $ad - bc + a'd - b'c$ și egalitatea se verifică.

Obs.: O proprietate analogă are loc şi pentru coloane.

P_8. Dacă o linie (o coloană) a unei matrici pătratice este o combinație liniară de celelalte linii (coloane), atunci determinantul matricii este zero.

P_9. Dacă la o linie (o coloană) a matricii A adunăm elementele altei linii (coloane) înmulțite cu acelaşi număr, atunci această matrice are acelaşi determinant ca şi matricea A.

Demonstrație. Voi aduna la linia întâi L_1 linia a doua înmulțită cu λ. Vom nota acest fapt prin $L_1 + \lambda L_2$. Avem:

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & b+\lambda b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{P_7}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{P_6}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

P_{10}. $\det(I_n) = 1$

P_{11}. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A),\ A \in M_n(C)$.

P_{12}. Dacă $A = (a_{ij})$ este o matrice triunghiulară (sau diagonală), atunci $\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$. (Valoarea determinantului este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală).

P_{13}. Dacă $A, B \in M_n(C)$, atunci $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ (Determinantul produsului a două matrici pătratice este egal cu produsul determinanților acelor matrici).

În particular $\det(A^n) = (\det(A))^n,\ n \in N^*$.

Teoremă. Determinantul unei matrici $A \in M_n(C)$ este egal cu suma produselor dintre elementele unei linii L_i $(i = \overline{1,n})$ și complemenții lor algebrici, adică

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}D_{i1} - a_{i2}(-1)^{i+2}D_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}D_{i3} + ... + a_{in}(-1)^{i+n}D_{in}.$$

(Formula lui $\det(A)$ dă dezvoltarea determinantului după elementele liniei *i*).

Această teoremă permite să calculăm determinantul unei matrici după oricare linie. Se va alege acea linie care are mai multe zerouri sau pe care se pot realiza (cât mai uşor) mai multe zerouri.

Observație: Ținând seama de proprietatea **P_1** teorema precedentă are loc şi pentru coloane sub forma:

$$\det(A) = a_{1j}(-1)^{1+j}D_{1j} - a_{2j}(-1)^{2+j}D_{2j} + a_{3j}(-1)^{3+j}D_{3j} + ... + a_{nj}(-1)^{n+j}D_{nj}.$$

2.4. Calculul inversei unei matrici

Definiție. Fie $A \in \mathrm{M}_n(C)$. Matricea A se numeşte **inversabilă** dacă există matricea $B \in \mathrm{M}_n(C)$ cu proprietatea că $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, I_n fiind matricea unitate.

Matricea B din definiție se numeşte **inversa** matricii A şi se notează $B = A^{-1}$. Deci

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n .$$

Teoremă. Matricea $A \in \mathrm{M}_n(C)$ este **inversabilă** dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$. O astfel de matrice se numeşte **nesingulară**.

Construcția lui A^{-1} presupune următorii paşi:

Pasul 1. (**Construcția transpusei**)

Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

atunci construim transpusa lui A ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Pasul 2. (**Construcția adjunctei**)

Matricea $A^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} D_{11} & (-1)^{1+2} D_{12} & \dots & (-1)^{1+n} D_{1n} \\ (-1)^{2+1} D_{21} & (-1)^{2+2} D_{22} & \dots & (-1)^{2+n} D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} D_{n1} & (-1)^{n+2} D_{n2} & \dots & (-1)^{n+n} D_{nn} \end{pmatrix}$

obținută din ${}^tA$, inlocuin fiecare element cu complementul său algebric se numeşte **adjuncta** matricii A.

Pasul 3. (**Construcția inversei**) Se ține cont de teorema precedentă şi se găseşte că:

$A^* \cdot A = A \cdot A^* = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}$, iar de aici $\left(\frac{1}{d} A^*\right) A = A\left(\frac{1}{d} A^*\right) = I_n$.

Ultimele egalități arată că $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*}$

2.5. Ecuații matriciale

Voi prezenta în continuare o tehnică de rezolvare a unor ecuații de forma $AX = C$, $XA = C$, $AXB = C$, unde A, B, C sunt matrici cunoscute, iar X este matricea de aflat. Astfel de ecuații se numesc **ecuații matriciale**.

Astfel de ecuații se pot rezolva numai atunci când A, B sunt **matrici pătratice inversabile**.

Pentru rezolvarea ecuației $AX = C$ înmulțim la stânga egalitatea cu A^{-1} şi avem:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}C \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}C \Leftrightarrow IX = A^{-1}C \Leftrightarrow X = A^{-1}C.$$

Deci soluția ecuației date este $X = A^{-1}C$.

Pentru determinarea soluției ecuației $XA = C$ vom înmulți la dreapta cu A^{-1} şi analog vom găsi $X = CA^{-1}$, soluția ecuației matriciale.

Pentru găsirea soluției ecuației $AXB = C$ înmulțim egalitatea la stanga cu A^{-1} şi la dreapta cu B^{-1} şi obținem $X = A^{-1}CB^{-1}$.

APLICAȚII

1. Manual

pg. 67 Să se determine numerele reale x, y, z astfel încât să aibă loc egalitatea de matrici, în cazurile

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2x-3y \\ -7x+6y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-x-11 \\ 19 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 2x-3y = y-x-11 \Rightarrow 3x = 4y-11 \Rightarrow x = \dfrac{4y-11}{3} \\ -7x+6y=19 \Rightarrow -7\cdot\dfrac{4y-11}{3}+6y=19 \Rightarrow 77-28y+18y=57 \Rightarrow 10y=20 \Rightarrow y=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{4y-11}{3} \\ \text{dar} \quad y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{8-11}{3} \Rightarrow x=-1$$

2) $\begin{pmatrix} 2x & 3x+y \\ x-7y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3 & 8-y \\ -5 & 4y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = y+3 \Rightarrow 2\cdot 2y = y+3 \Rightarrow 3y=3 \Rightarrow y=1 \\ 3x+y=8-y \\ x-7y=-5 \\ 2x=4y \Rightarrow x=2y \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2y \\ \text{dar} \quad y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=2$$

3) $\begin{pmatrix} y+3x & -1 \\ 3 & y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+3x = x^2+1 \Rightarrow 6+x+3x = x^2+1 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \\ -1=-1 \\ 3=3 \\ y-x=6 \Rightarrow y=6+x \end{cases}$$

$$x^2-4x-5=0 \Rightarrow x^2-5x+x-5=0 \Rightarrow x(x-5)+(x-5)=0 \Rightarrow (x-5)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=5$$
$$\Rightarrow x_2=-1$$

I. dacă $x=5$, atunci $y=11$

II. dacă $x=-1$, atunci $y=5$

4) $\begin{pmatrix} xy & 0 \\ yz+yx & zx-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xz-5 & 0 \\ 4 & -zy \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy=-xz-5 \Rightarrow x(y+z)+5=0 \\ 0=0 \\ yz+yx=4 \Rightarrow y(x+z)-4=0 \Rightarrow y\left(x+\dfrac{3}{x+y}\right)=4 \Rightarrow y\left(\dfrac{x^2+xy+3}{x+y}\right)=4 \Rightarrow x^2y+y^2x+3y=4x+4y \\ zx-3=-zy \Rightarrow z(x+y)-3=0 \Rightarrow z=\dfrac{3}{x+y} \end{cases}$$

pg. 71 **1.** Să se calculeze $A+B$ în cazurile:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+2 & -3+4 \\ 0+(-5) & 4+(-3) \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $A=\begin{pmatrix} 1+i & -i & 3i \\ 0 & -1-i & i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1-3i & 2+i & 1 \\ i & 1+i & -i \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+i+(-1-3i) & -i+2+i & 3i+1 \\ 0+i & -1-i+1+i & i+(-i) \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} -2i & 2 & 3i+1 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Se consideră matricile

$$A=\begin{pmatrix} 2 & m & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2m & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} n & m & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 6 & -3 \\ -1 & -5 & 6 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -m & 2 \\ p & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine m, n, p astfel încât $A+B=C$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+n=-1 \Rightarrow n=-3 \\ m+m=-4 \Rightarrow 2m=-4 \Rightarrow m=-2 \\ 2m+6=-m \\ 2-1=p \Rightarrow p=1 \end{cases}.$$

$$\text{Deci } \begin{cases} n=-3 \\ m=-2 \\ p=1 \end{cases}$$

pg. 75 **1.** Se consideră matricile $A, B \in \mathbf{M}_{2,3}(C)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & i & -1\\ 0 & 2 & 3i\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ 1 & i & i+1\end{pmatrix}.$$

Să se calculeze: $3A-2iB$, $iA+2B$.

$$3A-2iB=3\begin{pmatrix}1 & i & -1\\ 0 & 2 & 3i\end{pmatrix}-2i\begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ 1 & i & i+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3i & -3\\ 0 & 6 & 9i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -2i & 0\\ -2i & 2 & 2-2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & i & -3\\ -2i & 8 & 7i+2\end{pmatrix}$$

$$iA+2B=i\begin{pmatrix}1 & i & -1\\ 0 & 2 & 3i\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ 1 & i & i+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & -1 & -i\\ 0 & 2i & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2i & 2 & 0\\ 2 & 2i & 2i+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i & 1 & -i\\ 2 & 4i & 2i-1\end{pmatrix}$$

pg. 87 **1.** Calculați produsele de matrici $A\cdot B$, unde

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}6+2+1 & 2+1+0\\ 9+0+1 & 3+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 10 & 3\end{pmatrix}$$

b) $A=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ -2i & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}i & -3i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot i+i\cdot 0 & -3i\cdot 1+i\cdot 1\\ -2i\cdot i+0\cdot 0 & -2i\cdot(-3i)+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & -2i\\ 2 & -6\end{pmatrix}$$

d) $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 6\\ 5 & 2 & -7\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 5\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}-5\\ 52\\ -33\end{pmatrix}$$

e) $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 9\\ 5 & -1 & 6\\ 5 & 3 & 5\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 4\\ 8 & 9 & 7\\ -4 & -5 & -3\end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 13 \\ -22 & -27 & -17 \\ 29 & 32 & 26 \end{pmatrix}$$

2. Să se calculeze $f(A)$, dacă:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $f(X) = X^2 - 5X + 7I_2$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in N^*$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inducție matematică $P(k) \to P(k+1)$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(A)}$$

Deci $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

pg. 120 **1.** Calculați determinanții de ordinul doi:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 3 + 2 = 5$

2) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = 2 - 3 = -1$

3) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)-(-3)\cdot 1 = -3+3=0$

2. Calculați determinanții de ordinul trei:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 3+(-1)\cdot 1\cdot 4+6\cdot 5\cdot(-2)-\left[(-2)\cdot(-1)\cdot 4+2\cdot 1\cdot 5+(-1)\cdot 6\cdot 3\right]=$

$=-6-4-60-[8+10-18]=$
$=-70$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6+0\cdot 3\cdot 0+5\cdot 4\cdot(-5)-\left[(-5)\cdot 3\cdot 0+2\cdot 3\cdot 4+0\cdot 5\cdot 6\right]=$

$=36+0-100-[0+24+0]=$
$=-64-24=$
$=-88$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1+2\cdot 2\cdot(-2)+3\cdot 3\cdot(-3)-\left[(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\right]=$

$=-1-8-27-[-6+6+6]=$
$=-36-6=$
$=-42$

3. Calculați determinanții următori:

1) $\begin{vmatrix} a+d & b+d & c+d \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d & d \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0+d\cdot 0=0$

2) $\begin{vmatrix} a+b & b-a & b \\ b+c & c-b & c \\ c+a & a-c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -a & b \\ b & -b & c \\ c & -c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & b \\ c & c & c \\ a & a & a \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} a & a & b \\ b & b & c \\ c & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & b \\ c & c & c \\ a & a & a \end{vmatrix} = -1\cdot 0+0=0$

4. Să se rezolve ecuațiile:

1) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$

$1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + x\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + x\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-x^2-x(x-x^2)+x(x^2-x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2-x^2+x^3+x^3-x^2=0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3-2x^2-x^2+1=0 \Leftrightarrow 2x^2(x-1)-(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 2x^2(x-1)-(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(2x^2-x-1)=0 \Rightarrow (x-1)=0 \Rightarrow x_1=1$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

Deci $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.

5. Să se rezolve ecuațiile:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + x \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 - \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 - [(x\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot x\cdot 1) - (1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x)] + [x\cdot 0\cdot x + 0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 - (1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 1)] -$$

$$- x[(x\cdot x\cdot x + 0\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1) - (1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot x + 1\cdot 0\cdot x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x + 1 - x^2) + (1 - 2x) - x(x^3 + 1 - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 - 2x + 1 - x^4 - x + x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^4 + 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x + 4 = 0$$

6. Fie $A, B \in \mathbf{M}_3(R)$ pentru care $\det(A) = \det(B) = \det(A + B) = \det(A - B) = 0$. Să se arate că $\det(xA + yB) = 0$, $(\forall)\, x, y \in R$.

$$\det(xA + yB) = P(x, y) = \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 y + \lambda_3 x y^2 + \lambda_4 y^4 = 0$$

Pentru $x = 0$ şi $y = 1$

$$P(0,1) = \det(B) = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0$$

Pentru $x = 1$ şi $y = 0$

$$P(1,0) = \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Pentru $x = 1$ şi $y = 1$

$$P(1,1) = \det(A + B) = 0 \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Pentru $x = 1$ şi $y = -1$

$$P(1,-1) = \det(A - B) = 0 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Deci $\det(xA + yB) = 0$

<u>2.</u> Bacalaureat

pg. 94 **1.** Să se determine matricea X din ecuația

$$3X+\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\\2&-3\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&3\\7&4\\-2&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&6\\-9&3\\3&0\end{pmatrix}$$

$$3X=\begin{pmatrix}2&6\\14&8\\-4&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&6\\-9&3\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$$

$$3X=\begin{pmatrix}-1&12\\5&11\\-1&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\1&-2\\-2&3\end{pmatrix}$$

$$3X=\begin{pmatrix}-3&15\\6&9\\-3&15\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1&5\\2&3\\-1&5\end{pmatrix}$$

2. a) Găsiți matricea $X\in \mathbf{M}_2(R)$ astfel încât

$$X\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$$

b) Să se determine $m\in R$ astfel încât sistemul următor să fie compatibil şi apoi rezolvați-l:

$$\begin{cases}x+y=1\\x-2y=-1\\3x+y=m\end{cases}$$

a) $X\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&1\\3&-3\end{pmatrix}\Rightarrow X\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow X\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix}\\ X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\cdot1+y\cdot0&x\cdot2+y\cdot1\\2\cdot z+t\cdot0&z\cdot2+t\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x&2x+y\\2z&2z+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=3\\2z=0\Rightarrow z=0\\2x+y=1\Rightarrow 6+y=1\Rightarrow y=-5\\2z+t=4\Rightarrow t=4\end{cases}$$

Deci $X=\begin{pmatrix}3&-5\\0&4\end{pmatrix}$.

b) $\begin{cases}x+y=1\\x-2y=-1\\3x+y=m\end{cases}$

$x+y=1\Rightarrow x=1-y$

$$x-2y=-1 \Rightarrow 1-y-2y=-1 \Rightarrow -3y=-2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$$

$$x=1-y=1-\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$3x+y=m \Rightarrow 3\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=m \Rightarrow m=1+\frac{2}{3} \Rightarrow m=\frac{5}{3}$$

3. a) Fie matricea $A \in \mathbf{M}_2(R)$; $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. Să se calculeze A^2 şi A^3 şi apoi să se determine A^n, $n \in N^*$ în funcție de *n*.

b) Să se afle $x, y, u, v,$ numere reale astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+a\cdot 0 & a\cdot 1+a\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2a\cdot 0 & a\cdot 1+2a\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inducție matematică $P(k) \to P(k+1)$

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+na\cdot 0 & a\cdot 1+na\cdot 1 \\ 0\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(A)}$$

Deci $A^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+u & y+v \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+u=1 \Rightarrow x=0 \\ y+v=0 \Rightarrow y=-1 \\ u=1 \\ v=1 \end{cases}$$

Deci $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. a) Să se determine $x, y, u, v,$ astfel încât:

$$\begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Să se detrmine matricea *A* astfel încât:

$$2A+\begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ 12 & 1 & 15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y & -x \\ -3v & 2u-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x-y & y-x \\ u+1-3v & v+2u-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -(x+y) = -3 \Rightarrow x+y=3 \\ y-x=1 \\ u-3v+1=-8 \\ 2u+v-1=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y+y-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ x=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u-3v+1=-8 \\ 2u+v-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3v-9 \\ 2(3v-9)+v=3 \Rightarrow 7v=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3 \\ u=0 \end{cases}$$

b) $2A + \begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ 12 & 1 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 13 \\ 16 & 22 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 13 \\ 16 & 22 & 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 & 5 \\ -6 & -12 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 18 \\ 10 & 10 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

pg. 147 **1.** Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a)\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-a)\left[(x-a)^3 - 0\right] = 0 \Rightarrow (x-a)^4 = 0 \Rightarrow x_{1,2,3,4} = a$$

2. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$ să se calculeze determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2 \\ x_1x_2x_3 = -17 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$

$$x_1^3 - 2x_1^2 + 2x_1 + 17 = 0$$
$$x_2^3 - 2x_2^2 + 2x_2 + 17 = 0$$
$$\underline{x_3^3 - 2x_3^2 + 2x_3 + 17 = 0} \quad (+)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3) - 51 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2(2-2) - 2\cdot 2 - 51 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -55$$

$$d = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 3\cdot(-17) + 55 \Rightarrow \underline{d = 4}$$

BIBLIOGRAFIE

1. **Mircea Ganga,** Manual de Matematică, Elemente de Algebră liniară, şi geometrie analitică, clasa a XI-a, **Editura Mathpress,** 2003
2. **Gh. Andrei, D. Bărbosu, Gh. Boroica,** Admiterea în învățământul superior, **Editura Gil,** 2001
3. **Dan Brânzei, Sorin Ulmeanu,** Matematica în concursurile şcolare, **Editura Paralela 45,** 2000
4. C. Năstăsescu, C. Niță, **Culegere de probleme pentru liceu,** Algebra, Editura Rotech Pro, 1999
5. Caiet de notițe