

## Centrul de masă al unui sistem format din două particule

Numim punctul care divide distanța dintre cele două corpuri în segmente invers proporționale cu masele lor **centrul de masă al sistemului**.

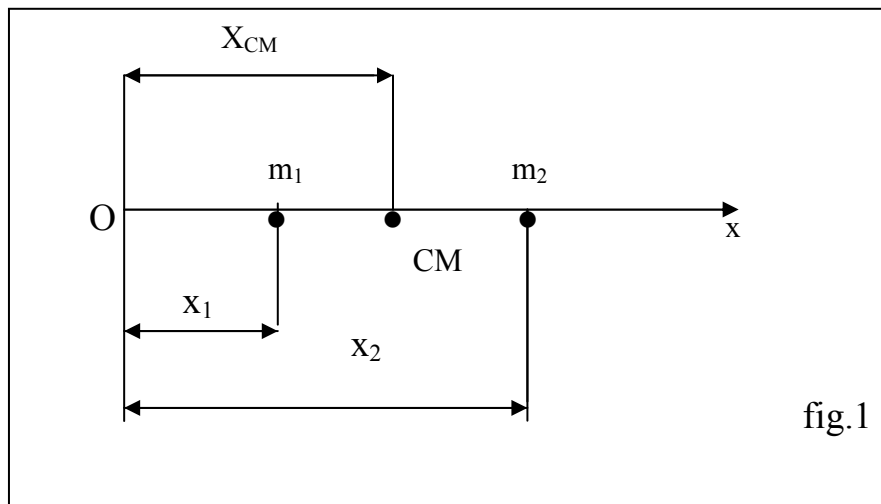
Mai general, centrul de masă este acel punct în care este concentrată toată masa unui sistem și, din punct de vedere dinamic, descrie comportarea întregului sistem de puncte materiale.

Pentru două puncte materiale aflate pe axa Ox, având masele  $m_1$  și  $m_2$  (fig.1), poziția centrului de masă se calculează cu ajutorul relației :

$$X_{CM} = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$$

Dacă pozițiile celor două puncte materiale sunt caracterizate față de un sistem de referință prin vectorii de poziție  $r_1$  și  $r_2$ , respectiv  $r_2$  (fig.2), atunci :

$$R_{CM} = (m_1r_1 + m_2r_2)/(m_1 + m_2)$$



## Proprietățile centrului de masă al unui sistem format din două puncte materiale

Dacă punctele materiale  $m_1$  și  $m_2$  își modifică pozițiile față de sistemul de referință, atunci, într-un mic interval de timp,  $\Delta t$ , variația vectorului de poziție al centrului de masă va fi :

$$\Delta r_{CM} = (m_1\Delta r_1 + m_2\Delta r_2) / (m_1 + m_2)$$

iar dacă împărțim această variație la intervalul de timp în care ea s-a petrecut, obținem:

$$v_{CM} = (m_1v_1 + m_2v_2) / (m_1 + m_2)$$

Dacă notăm cu  $M = m_1 + m_2$  masa totală a sistemului format din cele două puncte materiale observăm că :

$$Mv_{CM} = m_1v_1 + m_2v_2 = p_1 + p_2 = p$$

Tragem concluzia că impulsul total al sistemului de puncte materiale este identic cu impulsul centrului de masă,  $M \cdot v_{CM}$ .

Dacă impulsul unui sistem format din două puncte materiale se conservă, atunci viteza centrului de masă al aceluși sistem rămâne constantă și putem spune că centrul de masă se deplasează rectiliniu uniform.

Pentru a ne explica acest fenomen, să pornim de la următorul experiment :

Doi patinatori de mase diferite,  $m_1$ , respectiv  $m_2$ , stau pe gheață față în față. La un moment dat, unul dintre ei îl împinge pe cel de-al doilea. Considerand frecările neglijabile, cei doi parteneri se vor deplasa cu impulsuri egale, în sensuri opuse, cu vitezele  $v_1$ , respectiv  $v_2$ .

$$m_1v_1 = -m_2v_2$$

Deci raportul vitezelor este invers proporțional cu raportul maselor:

$$m_2/m_1 = v_1/v_2$$

Presupunând că timpul de interacțiune a fost foarte scurt și cei doi, după un interval de timp  $\Delta t$ , se mișcă tot cu vitezele de la pornire, distanțele parcurse de la locul de despărțire sunt :

$x_1 = v_1\Delta t$  și  $x_2 = v_2\Delta t$ . Aceste două distanțe sunt direct proporționale cu vitezele și deci invers proporționale cu masele celor două corpuri:

$$x_1/x_2 = v_1/v_2 = m_1/m_2$$

În exemplul dat aici, centrul de masă al sistemului format din cei doi patinatori este locul deplasării lor rectilinii uniforme.

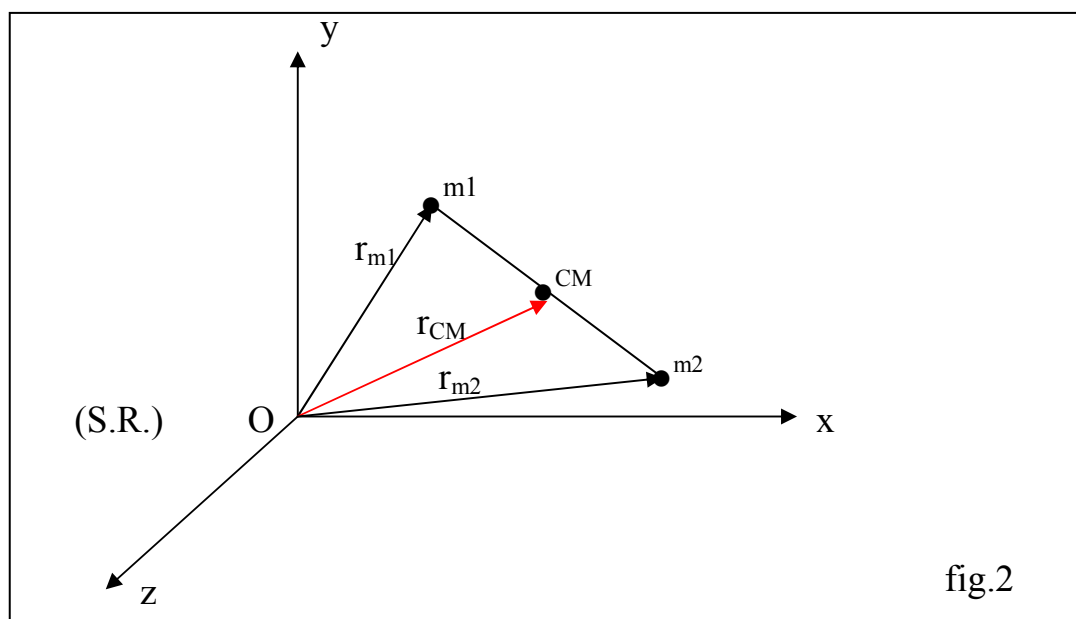


fig.2

În cazul prezentat cei doi patinatori aveau, înainte interacțiunii, un impuls nul. Acest impuls s-a conservat deoarece în timpul interacțiunii forțele externe au fost neglijabile ( frecarea cu gheața și cu aerul este foarte mică ), iar forțele interne de interacțiune dintre patinatori nu modifică impulsul total al sistemului. Cei doi s-au deplasat cu impulsuri egale și de sensuri contrare, astfel ca impulsul total al sistemului să nu se modifice, Centrul de masă, în acest caz, a rămas în repaus, în punctul de unde s-au despărțit cei doi patinatori.

Un alt exemplu s-ar putea da în cazul unei explozii a unei rachete. După producerea exploziei veți vedea fragmentele rezultate mișcându-se în diferite direcții față de traiectoria inițială a rachetei.

Intuiți că există un punct al sistemului format din fragmentele unei rachete care continuă să se miște, și după producerea exploziei, pe traiectoria inițială a rachetei, până când unul dintre fragmente va atinge solul.

Forțele interne dezvoltate în momentul exploziei rachetei sunt mult mai mari decât forțele externe care acționează asupra ei, motiv pentru care putem considera că impulsul ei se conservă. Din acest motiv, centrul ei de masă continuă să se miște pe aceeași traiectorie până când unul dintre fragmente atinge solul, modificând astfel configurația sistemului.

Dacă vitezele celor două puncte materiale se modifică în intervalul mic de timp ( $\Delta t$ ), putem scrie:

$$\Delta v_{CM} = (m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2) / (m_1 + m_2)$$

Împărțind acum la  $\Delta t$  și folosind relația prin care definim accelerația unui punct material,  $a = \Delta v / \Delta t$ , obținem :

$$a_{CM} = (m_1 a_1 + m_2 a_2) / (m_1 + m_2)$$

adică

$$M a_{CM} = (m_1 a_1 + m_2 a_2) = F_1 + F_2 = F$$

Unde am notat cu  $F = F_1 + F_2$  rezultanta forțelor externe care acționează asupra punctelor sistemului .

Relația :

$$M a_{CM} = F$$

ne arată că dacă rezultanta forțelor externe este nulă,  $a_{CM} = 0$ , adică impulsul sistemului format din cele două puncte materiale se conservă.

### Aplicație :

Sirius este o stea dublă, formată din două stele: Sirius A și Sirius B. Traiectoriile lui Sirius A și Sirius B sunt reprezentate în fig.3. Masa lui Sirius A este  $m_A = 4,2 \cdot 10^{30}$  kg, iar masa lui Sirius B este  $m_B = 2,1 \cdot 10^{30}$  kg. Pozițiile ocupate de cele două stele din cinci în cinci ani sunt reprezentate

printr-un punct negru pentru Sirius A si printr-un punct colorat pentru Sirius B(fig.3). Trasați traiectoria centrului de masă al sistemului format din cele două stele . Caracterizați mișcarea centrului lor de masă.Explicati.

$$x_{CM} = (m_1x_1 + m_2x_2) / (m_1 + m_2) \Rightarrow x_{CM} = m_2d/(m_1 + m_2)$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = d$$

	D	X <sub>CM</sub>
1935	0	0
1940	123·10 <sup>7</sup>	2583·10 <sup>36</sup>
1945	615·10 <sup>6</sup>	1845·10 <sup>35</sup>
1950	41·10 <sup>7</sup>	82·10 <sup>36</sup>
1955	123·10 <sup>7</sup>	2583·10 <sup>36</sup>
1960	164·10 <sup>7</sup>	1312·10 <sup>36</sup>
1965	2255·10 <sup>6</sup>	24805·10 <sup>35</sup>
1970	246·10 <sup>7</sup>	2952·10 <sup>36</sup>
1975	2665·10 <sup>6</sup>	3465·10 <sup>35</sup>
1980	164·10 <sup>7</sup>	1312·10 <sup>36</sup>

Mișcarea centrului de masă a celor două stele este o miscare rectilinie uniformă deoarece descrie o dreaptă, iar distanțele dintre centrele de masa la un interval de cinci ani sunt egale.



fig.3