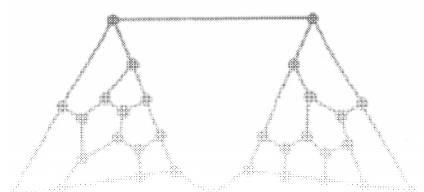
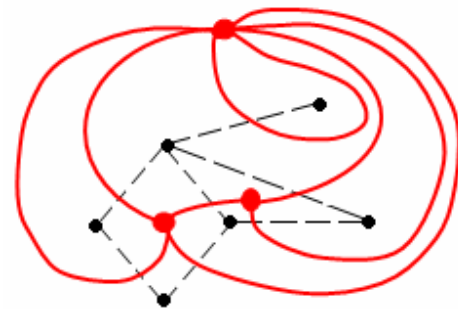
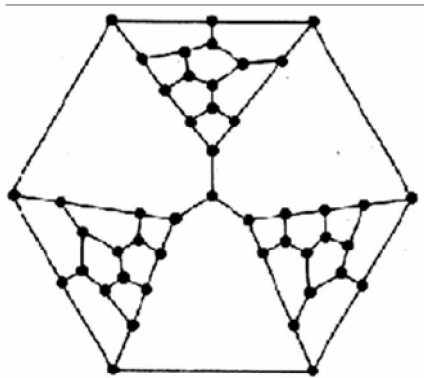


**Prof. Popescu Rozica - Maria**

# **Lecții complementare de teoria grafurilor**



Editura Sfântul Ierarh Nicolae

ISBN 978-606-577-028-7

# CUPRINS

<b>Introducere</b> .....	<b>3</b>
<b>Capitolul I. Grafuri definite prin multiseturi.</b>	
Multisetul gradelor unui graf .....	<b>4</b>
<b>I.1. Multiseturi</b> .....	<b>4</b>
<b>I.2. Grafuri definite prin multiseturi</b> .....	<b>4</b>
<b>I.3. Multisetul gradelor. Teoreme de caracterizare</b> .....	<b>5</b>
<b>Capitolul II. Reprezentarea fără autointersecții a grafurilor simple</b> .....	<b>13</b>
<b>II.1. Grafuri planare</b> .....	<b>13</b>
<b>II.2. Planaritate și hamiltoneitate</b> .....	<b>16</b>
<b>II.3. Reprezentări grafice fără autointersecții ale grafurilor</b> .....	<b>18</b>
<b>Capitolul III. Cuplaje</b> .....	<b>20</b>
<b>III.1. Noțiuni introductive</b> .....	<b>20</b>
<b>III.2. Algoritmul ungar</b> .....	<b>23</b>
<b>III.3. Algoritmul Kuhn - Munkres</b> .....	<b>26</b>
<b>Bibliografie</b> .....	<b>29</b>

# Introducere

Această lucrare de teoria grafurilor are drept scop familiarizarea cititorului cu aspecte mai puțin cunoscute ale acesteia care pot fi abordate pe baza unor cunoștințe solide dobândite începând cu perioada liceului.

Pentru o bună parcurgere a lucrării sunt presupuse cunoscute principalele noțiuni de teoria grafurilor.

În *primul capitol* este prezentată noțiunea de *graf* în contextul său maxim de generalitate (ce permite existența buclelor și a multimuchiilor), fiind introdusă cu ajutorul noțiunii de *multiset* (mulțime cu multiplicități). Capitolul tratează problema clasică a șirului gradelor unui graf în acest cadru general, prezentând în acest sens trei rezultate de caracterizare, împreună cu algoritmi corespunzători.

În *Capitolul II* este tratată problema planarității unui graf, atât în spațiul 2-dimensional cât și o generalizare a acesteia. Secțiunea a doua a acestui capitol arată legătura strânsă ce există între planaritate și hamiltoneitate, furnizând criterii de stabilire a uneia dintre proprietăți, atunci când este presupusă cealaltă.

*Ultimul dintre capitole* prezintă cititorului noțiunea de *cuplaj*, care cumulată cu cea binecunoscută de graf bipartit converg la elaborarea a doi algoritmi importanți (*algoritmul ungar* și *Kuhn - Munkres*) cu o largă aplicabilitate în probleme legate de planificarea activităților organizatorice (alcătuire de orare, încadrarea optimă a personalului unei companii în raport cu pregătirea acestuia, etc. ).

# I. Grafuri definite prin multiseturi.

## Multisetul gradelor unui graf

---

### 1. Multiseturi

Conceptul de *multiset* reprezintă o generalizare a noțiunii matematice elementare de mulțime. Simplu spus, un *multiset* reprezintă o mulțime în care fiecare dintre elementele ei se poate repeta de un număr prestabilit de ori. După cum bine știm, acest lucru nu este permis în cazul noțiunii standard de mulțime. Pentru a da rigoare acestui concept dăm următoarea

#### Definiții:

Fie  $S$  o mulțime finită nevidă. Un *multiset* (*mulțime cu repetiție*) peste  $S$  este o pereche  $R=(S,r)$  formată din mulțimea  $S$  și o funcție  $r: S \rightarrow \mathbb{N}$  numită *funcția multiplicitate* (sau *repetiție*) a elementelor din  $S$ . Această funcție are rolul de a „ține minte” de câte ori se repetă fiecare element din mulțimea  $S$ .

Vom spune că  $R=(S,r)$  este un *m-multiset* dacă numărul total al elementelor acestuia (ținând cont de multiplicități) este  $m$ .

Avem nevoie în cele ce urmează de următoarele

#### Notații:

$$S^m := \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in S\};$$

$$S^* = \bigcup_{m \geq 0} S^m$$

$$S^{(m)} := \{X | X \text{ este } m - \text{multiset peste } S\};$$

$$S^{(*)} = \bigcup_{m \geq 0} S^{(m)}$$

$$S^{(m)} := \{X | X \subseteq S, |X| = m\};$$

$$S^{(*)} = \bigcup_{m \geq 0} S^{(m)}$$

### 2. Grafuri definite prin multiseturi

În această secțiune vom prezenta binecunoscutele noțiuni de *graf neorientat*, *graf orientat* și *izomorfism de grafuri* dintr-o perspectivă mai rar întâlnită, folosindu-ne de conceptul de multiset introdus în secțiunea precedentă. Această perspectivă are avantajul de a da posibilitatea unui graf de a avea bucle, precum și un număr oricât de mare de muchii între oricare două noduri ale sale. Vom prezenta de asemenea în mod succint – prin prisma acestei perspective mai puțin familiare – câteva noțiuni de bază mai rar întâlnite de teoria grafurilor, precum cea de *hipergraf*, *hipergraf k-uniform* și *graf suport*.

Dăm, aşadar, în continuare următoarele

### Definiții:

Un *graf neorientat* peste  $V$  este o pereche  $G=(V,E)$ , unde  $E=(V^{(2)}, r)$  este un multiset peste  $V^{(2)}$ . Un element  $e=uv$  se numește *muchie* din  $E$ , iar dacă  $u=v$ , acesta se numește *bucă*. Dacă  $r(e) \leq p, \forall e \in E$ , atunci  $G$  se numește *p-graf*.

Un *graf neorientat simplu* peste  $V$  este o pereche  $G=(V,E)$ , unde  $E \subseteq V^{(2)}$ . Vom nota muchiile acestui graf, de asemenea, cu  $e=uv$ . Observăm că un graf neorientat simplu este un 1-graf neorientat fără bucle.

Un *graf orientat* peste  $V$  este o pereche  $G=(V,E)$ , unde  $E=(V^2, r)$  este un multiset peste  $V^2$  (altfel spus, un multiset de perechi ordonate). Un element  $e=(u,v)$  din  $E$  se numește *arc*, iar dacă  $u=v$ , se numește *bucă*.

Dacă în definiția grafului simplu înlocuim exponentul 2 printr-un număr oarecare  $k \in \mathbb{N}$ , obținem definiția unui *hipergraf k-uniform*  $G=(V,E)$ , unde  $E \subseteq V^{(k)}$ . Mai general, dacă  $E \subseteq V^{(*)}$ , atunci  $G=(V,E)$  se numește *hipergraf*.

Prin ștergerea buclelor unui graf neorientat  $G=(V,E)$  și prin înlocuirea multimuchiilor  $e \in E$  prin multimuchii cu multiplicitatea egală cu 1, obținem *graful simplu suport* al acestuia. Prin ignorarea orientării arcelor unui graf orientat  $G=(V,E)$  obținem *graful neorientat suport* al acestuia.

Fie  $G_1 = (V_1, E_1)$  și  $G_2 = (V_2, E_2)$  două grafuri neorientate. Spunem că  $G_1$  și  $G_2$  sunt *izomorfe* și vom nota  $G_1 \sim G_2$  dacă există o funcție bijectivă  $f: V_1 \rightarrow V_2$  cu proprietatea:

$$r_1(uv) = r_2(f(u), f(v)), \forall u, v \in V_1.$$

În acest caz, funcția  $f$  se numește *izomorfism de grafuri (neorientate)*. Din punct de vedere intuitiv, două grafuri sunt izomorfe dacă se pot reprezenta în plan printr-un același desen.

## 3. Multisetul gradelor. Teoreme de caracterizare

Întrucât conceptul de graf prezentat anterior este mai cuprinzător decât cel clasic, permițând existența buclelor și a mai multor muchii între aceleași două noduri, noțiunea de *șir al gradelor* asociat unui graf va trebui generalizată în mod corespunzător. Aceasta se realizează prin următoarea:

**Definiție:** Fie  $G = (V, E)$  un graf neorientat și  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  mulțimea nodurilor sale considerate în ordinea crescătoare a gradelor acestora. Numim *multisetul gradelor* nodurilor lui  $G$ , sau *secvența gradelor*, sau încă *șirul gradelor nodurilor lui G* multisetul  $s(G) = \{d_G(x_1) \leq d_G(x_2) \leq \dots \leq d_G(x_n)\}$ , unde  $d_G(x_i)$  reprezintă gradul nodului  $x_i$ . Vom nota în cele ce urmează cu  $\delta(G) := \min_i d_G(x_i)$  și  $\Delta(G) := \max_i d_G(x_i)$ .

Noțiunea de multiset al gradelor asociat unui graf este suficient de interesantă și elementară în același timp încât să ne poată furniza o serie de teoreme deosebite de caracterizare a acestora în diferite contexte cu grad mare de generalitate. În acest sens, rezultatele prezentate în continuare ne dau condiții necesare și suficiente ca un șir de numere naturale să poată fi multisetul gradelor unui graf neorientat oarecare, a unui graf neorientat fără bucle, respectiv a unui graf neorientat simplu. Demonstrațiile tuturor acestor teoreme sunt de natură algoritmică și ele sunt însoțite, pentru o mai mare claritate, de algoritmi propriu-ziși de construire a grafurilor ce îndeplinesc condițiile cerute. Ultimul dintre acestea este un rezultat clasic în domeniu, cunoscut sub numele de teorema Havel – Hakimi. Celelalte, deși mai puțin întâlnite, sunt la fel de frumoase ca și acesta.

**Teorema I.1**

Un multiset  $s_0 = \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \in \mathbb{N}^{(n)}$  (unde  $n \geq 1$ ) este multisetul gradelor unui graf neorientat  $G = (V, E)$  dacă și numai dacă este îndeplinită condiția

$$\sum_{i=1}^n d_i \equiv 0 \pmod{2}.$$

**Demonstrație:** Implicația directă este imediată. Se presupune că  $s_0$  este multisetul gradelor grafului neorientat  $G = (V, E)$  și atunci  $\sum_{i=1}^n d_i = 2|E| \equiv 0 \pmod{2}$ .

Reciproc, să presupunem că avem un șir de numere  $d_1, d_2, \dots, d_n$  care îndeplinește condiția din enunț și vrem să arătăm că acesta poate fi multisetul gradelor unui graf neorientat. Pentru aceasta vom construi un astfel de graf  $G = (V, E)$ . Fie  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  nodurile acestuia.

Din relația  $\sum_{i=1}^n d_i \equiv 0 \pmod{2}$  rezultă că printre cele  $n$  grade ale nodurilor grafului trebuie să fie un număr par  $2k$  de grade impare. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că acestea sunt  $d_1, d_2, \dots, d_{2k}$ . Construim în fiecare nod  $x_i$  un număr maxim de bucle, astfel încât  $d_G(x_i) \leq d_i, \forall 1 \leq i \leq n$  și unim cele  $2k$  noduri de grad impar astfel:

$$G := G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n \cup x_1x_2 \cup x_3x_4 \cup \dots \cup x_{2k-1}x_{2k},$$

unde  $G_i = (\{x_i\}, x_i x_i^{[d_i/2]})$  este graful format din vârful  $x_i$  și o buclă  $x_i x_i$  cu multiplicitatea  $[d_i/2]$  (vezi Fig. I.1).

Se observă cu ușurință că multisetul gradelor grafului construit coincide cu  $s_0$ .

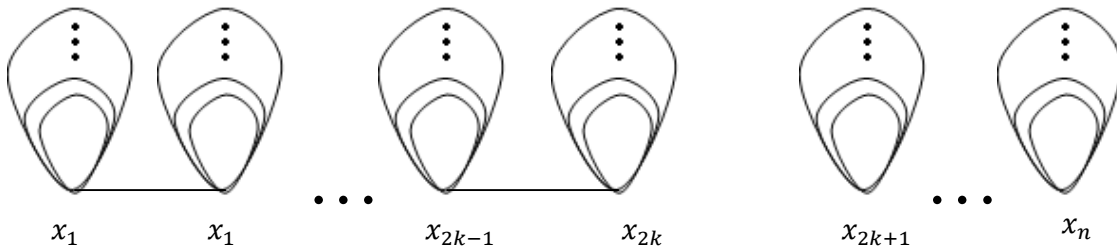


Figura I.1

Pe baza teoremei demonstrate anterior putem da algoritmul de construire a unui graf neorientat care are multisetul gradelor egal cu un multiset dat ce îndeplinește condițiile teoremei.

### Algoritmul II.1

```

dacă  $\sum_{i=1}^n d_i \equiv 1 \pmod{2}$  STOP – nu e multisetul gradelor unui graf neorientat
altfel
    ultimul_impar ← 0          /* reținem ultimul nod de grad impar rămas pentru a fi unit cu altul de grad impar */
    pentru  $i \leftarrow \overline{1, n}$ 
        muchie  $x_i x_i$  de  $\lfloor d_i/2 \rfloor$  ori
        dacă ultimul_impar = 0 /* dacă toate nodurile de grad impar de dinainte sunt legate în perechi, îl
            ultimul_impar ← i      memorăm pentru a fi legat cu următorul de grad impar, ca și el */
        altfel /* legăm acest nod cu ultimul de dinaintea sa de grad impar,
            muchie  $x_{\text{ultimul\_impar}} x_i$       memorat în ultimul_impar */
            ultimul_impar ← 0
    
```

### Teorema I.2

Un multiset  $s_0 = \{d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n\} \in \mathbb{N}^{(n)}$  (unde  $n \geq 2$ ) este multisetul gradelor unui graf neorientat fără bucle  $G = (V, E)$  dacă și numai dacă sunt îndeplinite simultan următoarele condiții:

$$(i) \sum_{i=1}^n d_i \equiv 0 \pmod{2};$$

$$(ii) d_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i.$$

**Demonstrație:** Începem cu implicația directă. Fie  $G = (V, E)$  graf neorientat cu  $s(G) = s_0$ . Proprietatea (i) este, evident, îndeplinită.

Dacă  $G$  este graf neorientat fără bucle, înseamnă că cel mai mare grad al unui nod din graf  $d_n$  este mai mic decât numărul de muchii existente în graf,  $d_n \leq |E| = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{2}$  de unde  $d_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i$ .

Reciproc, fie un multiset  $s_0$  ce îndeplinește condițiile (i), (ii). Construim un graf  $G = (V, E)$  neorientat, fără bucle, cu  $s(G) = s_0$ . Ideea este aceea de a construi mai întâi un

graf  $G' = (V', E')$  neorientat cu bucle astfel încât  $s(G') = s_0$ , după algoritmul dat de *Teorema II.1*. Transformăm apoi buclele grafului  $G'$  în multimuchii astfel:

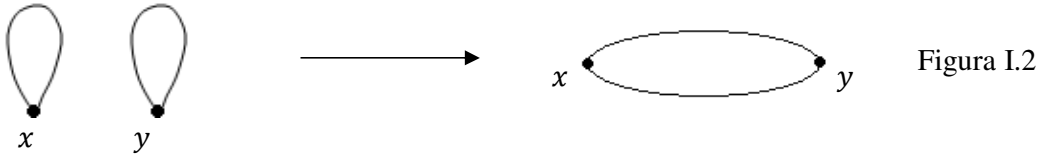


Figura I.2

În mod evident, această transformare păstrează gradele nodurilor, deci, va rezulta astfel un nou graf notat  $G'' = (V'', E'')$  cu  $s(G'') = s_0$  și care conține cel mult un nod cu bucle. Pentru o singură buclă putem aplica următoarea transformare:

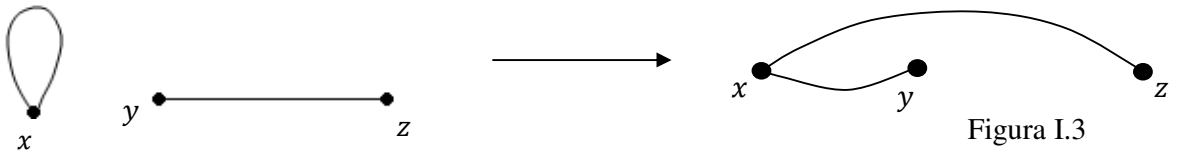


Figura I.3

Obținem astfel un nou graf  $G'''$ , cu  $s(G''') = s_0$ .

Dar, dacă în nodul  $x$  sunt mai multe bucle decât muchii existente în graf, făcând toate transformările de tipurile anterioare rămân, totuși, bucle în nodul  $x$ . Așadar trebuie să demonstrăm că numărul de bucle din  $x$  în  $G'''$  este cel mult egal cu numărul de muchii din graful  $G''' - x$ . Pentru aceasta notăm cu  $m$  numărul de muchii incidente în  $x$  care nu sunt bucle.

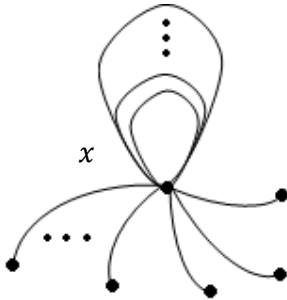


Figura I.4

Avem, de aici, că numărul de bucle în  $x$  este de  $\frac{d_{G'''}(x)-m}{2}$ , iar numărul de muchii din graful  $G''' - x$  este

$$\frac{1}{2} (\sum_{z \in G''' - x} d_{G'''}(z) - m) .$$

Vrem, deci, să arătăm că

$$\frac{d_{G'''}(x)-m}{2} \leq \frac{1}{2} (\sum_{z \in G''' - x} d_{G'''}(z) - m)$$

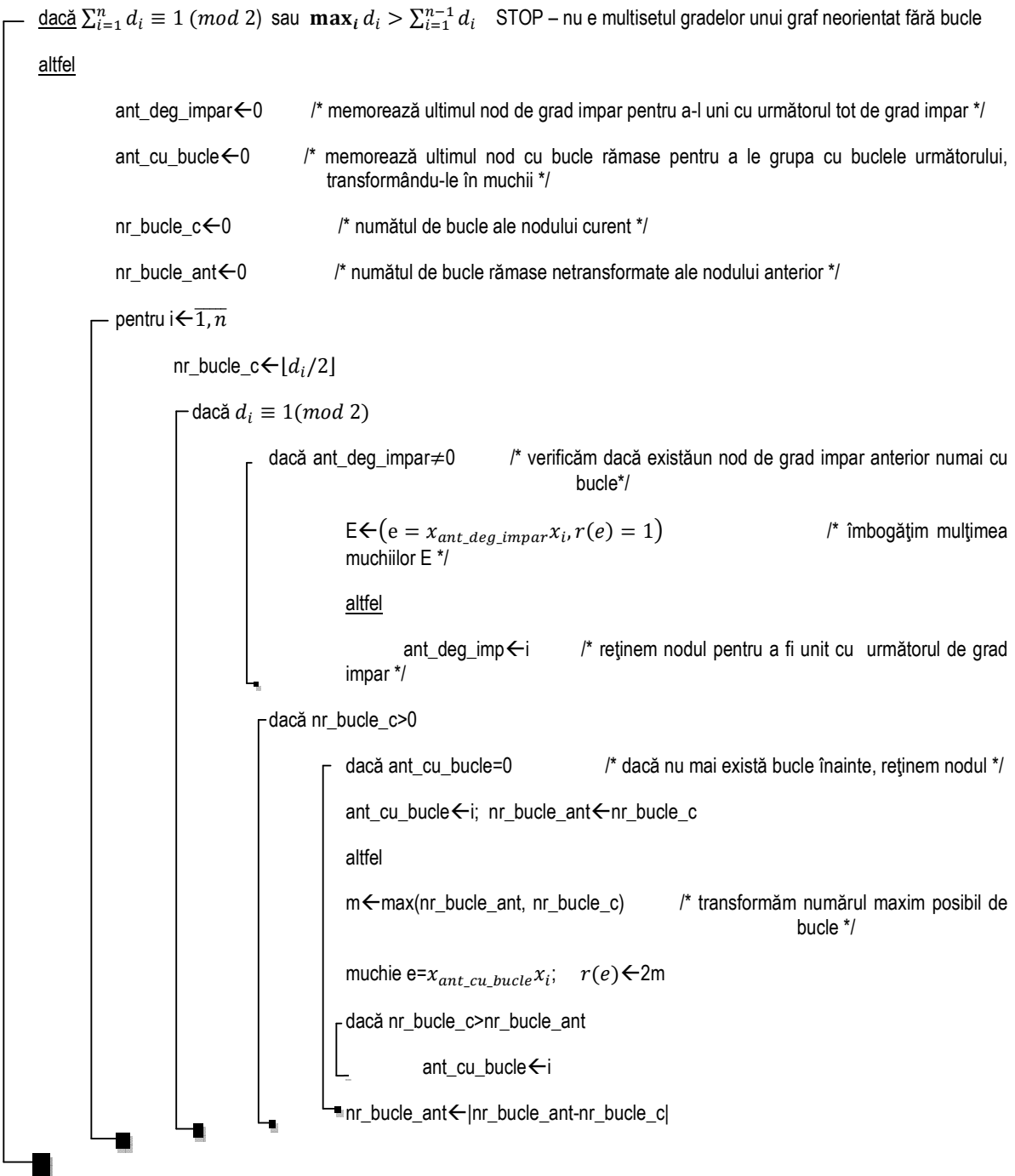
ceea ce este echivalent cu  $2d_{G'''}(x) \leq \sum_{z \in G'''} d_{G'''}(z)$ . Dar această relație este îndeplinită de  $d_n = \max_i d_i$ , deci e îndeplinită și pentru  $d_{G'''}(x)$ .

Așadar numărul de bucle din  $x$  în  $G'''$  este într-adevăr cel mult egal cu numărul de muchii din graful  $G''' - x$ , ceea ce completează demonstrația teoremei.

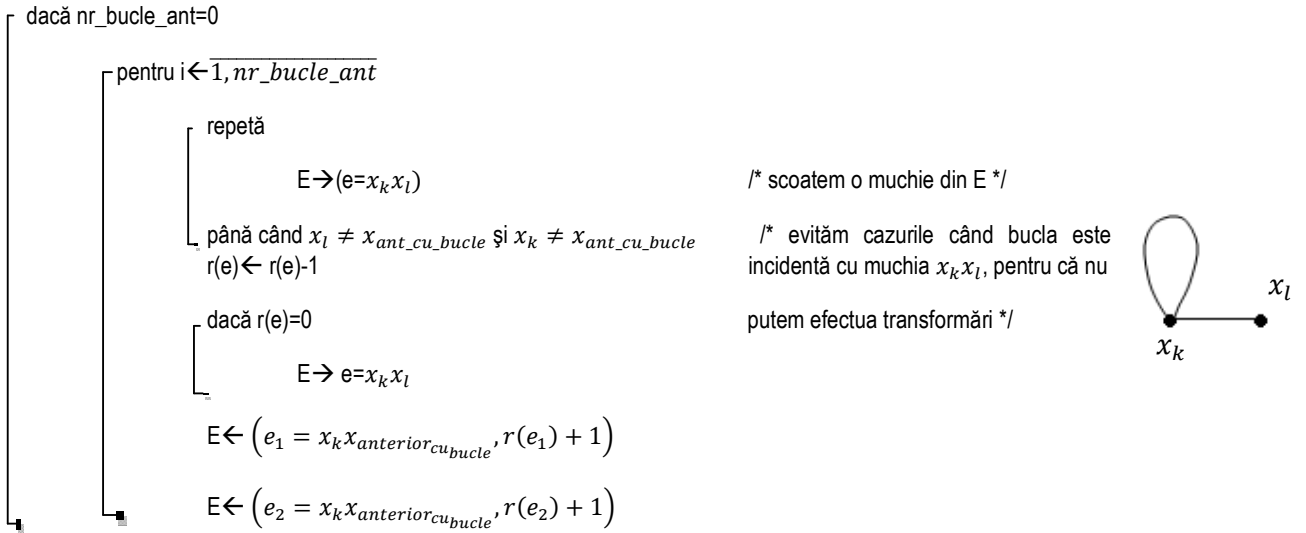
Această demonstrație ne ajută să formulăm un algoritm ce primește ca date de intrare un șir de  $n$  numere naturale, verifică dacă el poate reprezenta multisetul gradelor unui graf neorientat fără bucle și în caz afirmativ îl construiește.



## Algoritmul I.2



A rămas să rezolvăm cazul în care au mai rămas bucle (din construcție, acestea pot fi la unul din ultimele noduri ale grafului creat).



Prezentăm acum teorema care ne dă condițiile necesare și suficiente ca un șir de numere naturale să poată fi multisetul gradelor unui graf neorientat simplu (numit, în acest caz, *șir grafic*).

### Teorema I.3 (Havel, Hakimi)

Un multiset  $s_0 = \{d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n\} \in \mathbb{N}^{(n)}$ , unde  $n \geq 2$  și  $d_1 \leq n - 1$  este multisetul gradelor unui graf neorientat simplu  $G = (V, E)$  dacă și numai dacă multisetul

$$s'_0 = \{d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \dots, d_n\}$$

este multisetul gradelor unui graf neorientat simplu.

**Demonstrație:** Reciproca este imediată. Fie  $s'_0$  multisetul gradelor unui graf neorientat simplu  $G' = (V', E')$ . Fie  $V' = \{x_2, \dots, x_n\}$  nodurile grafului  $G'$  și fără a restrânge generalitatea le putem considera așezate în ordinea descrescătoare a gradelor. Adăugăm acestui graf un alt nod  $x_1$  și unim nodul  $x_1$  cu primele  $d_1$  noduri ale lui  $G'$ . Obținem astfel un nou graf

$$G := G' \cup x_1 x_2 \cup x_1 x_3 \cup \dots \cup x_1 x_{d_1+1}$$

cu  $s(G) = s_0$ .

Implicația directă. Fie  $G = (V, E)$  neorientat simplu cu  $\{x_1, \dots, x_n\}$  nodurile așezate în ordinea descrescătoare a gradelor și  $s(G) = s_0$ . Vrem să demonstrăm că noul multiset  $s'_0$  obținut din  $s_0$  este multisetul gradelor nodurilor unui alt graf  $G' = (V', E')$ . Îl construim cu ajutorul grafului  $G$  și luăm discuție două cazuri posibile.

*Cazul 1:* Nodul  $x_1$  este adiacent cu  $x_2, \dots, x_{d_1+1}$ . Eliminând nodul  $x_1$  și muchiile incidente acestuia obținem un graf  $G'$  simplu, cu  $s(G') = s'_0$ .

*Cazul 2:* Există printre nodurile  $x_2, \dots, x_{d_1+1}$  noduri cu care  $x_1$  nu este adiacent. Ideea este de a reduce acest caz la cel anterior, fără a modifica gradele nodurilor grafului  $G$ .

Fie  $i \in \{2, \dots, d_1 + 1\}$  astfel încât  $x_1 x_i \notin E$ . Dar,  $d_G(x_1) = d_1$ , rezultă că  $\exists d_1 + 1 \leq j \leq n$  astfel încât  $x_1 x_j \in E$ .

Dar  $d_G(x_i) \geq d_G(x_j)$ , iar  $d_G(x_j) \geq 1$  (pentru că  $x_j$  este adiacent cu  $x_1$ ), rezultă ca  $\exists k \in \{2, \dots, n\}, k \neq i, j$  astfel încât  $x_i x_k \in E$  și  $x_j x_k \notin E$ . Facem atunci următoarea transformare:

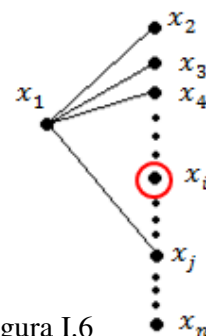


Figura I.6

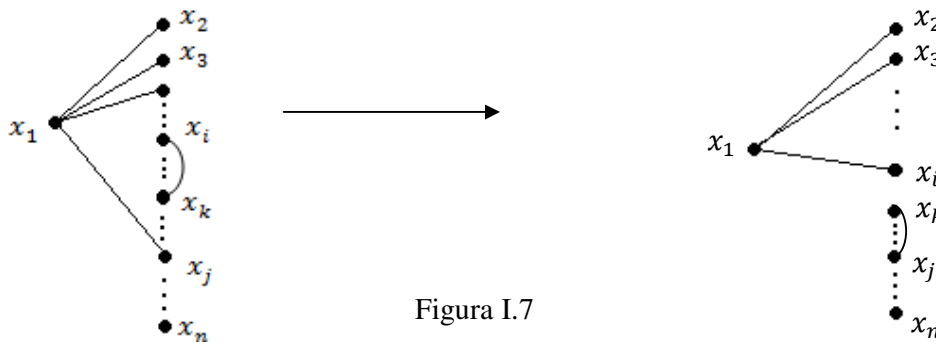


Figura I.7

obținând un nou graf

$$G_1 := G - x_1 x_j - x_i x_k \cup x_1 x_i \cup x_j x_k.$$

Repetăm transformarea până când toate nodurile  $x_2, \dots, x_{d_1+1}$  sunt adiacente lui  $x_1$ . Notând graful obținut în urma tuturor transformărilor  $G_2 = (V, E_1)$ , putem considera graful  $G' = G_2 - x_1$ , care are  $s(G') = s'_0$ .

Enunțul teoremei ne ajută să construim un algoritm ce determină dacă un șir de numere poate fi multisetul gradelor unui graf neorientat simplu, repetând pasul de „reducere” a unui multiset  $s_0$  cu  $n$  elemente la unul cu  $n-1$  elemente  $s'_0$ . Algoritmul se încheie în una din cele două situații: fie despre ultimul multiset obținut se poate observa ușor că este unul ce poate fi multisetul gradelor unui graf simplu, fie nu se mai pot efectua reduceri corecte.

În mod evident există două multiseturile triviale pentru șirul gradelor unui graf:

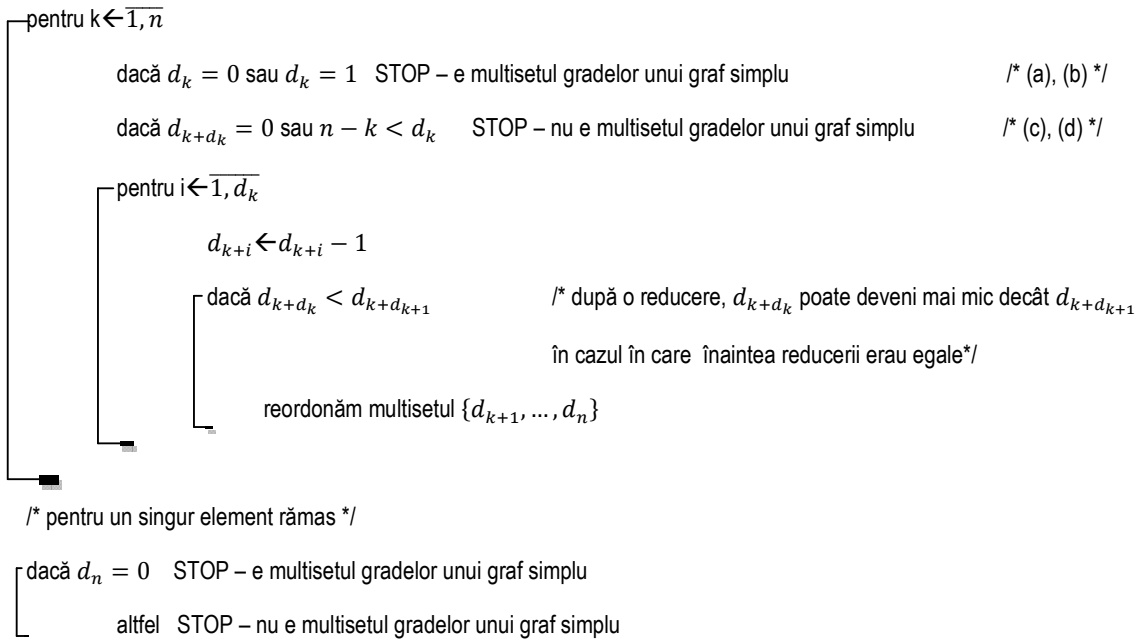
- (a) multisetul format numai din 0
- (b) multisetul format numai din 1 (sunt în număr par dacă inițial  $\sum_{i=1}^n d_i \equiv 1 \pmod{2}$ ), pentru că la fiecare pas de reducere  $i$ , suma gradelor scade cu  $2d_i$ )

La fiecare pas  $i$ , avem multisetul  $s_0^i = \{d_{i+1}^i \geq d_{i+2}^i \geq \dots \geq d_n^i\}$ . Acestuia sigur nu îi mai putem aplica procedeul de reducere dat de teoremă dacă are loc una din situațiile:

- (c)  $n - i < d_{i+1}^i$  (nu mai am  $d_{i+1}^i + 1$  elemente în multiset)
- (d)  $d_{i+d_{i+1}^i}^i \leq 0$  (al  $d_{i+1}^i + 1$ -lea element din multiset să nu fie 0, altfel, aplicând pasul de reducere multisetului  $s_0^i$ , elementul va deveni -1)

### Algoritmul I.3

dacă  $\sum_{i=1}^n d_i \equiv 1 \pmod{2}$  sau  $\max_i d_i > \sum_{i=1}^{n-1} d_i$  sau  $d_1 > n - 1$  STOP – nu e multisetul gradelor unui graf simplu



Criteriile pentru ca un multiset să fie șirul gradelor unui graf simplu sunt date și de următorul rezultat:

#### Teorema I.4 (Erdős, Gallai)

Un multiset  $s_0 = \{d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n\} \in \mathbb{N}^{(n)}$ , unde  $n \geq 2$  și  $d_1 \leq n - 1$  este multisetul gradelor unui graf neorientat simplu  $G = (V, E)$  dacă și numai dacă

(i)  $\sum_{i=1}^n d_i \equiv 0 \pmod{2}$ ;

(ii)  $\sum_{i=1}^n d_i \leq k(k - 1) + \sum_{i=k+1}^n \min_i(d_i, k)$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ .

În tratarea problemei clasice a verificării dacă un multiset este sau nu șir grafic, însă, este preferat rezultatul dat de *Havel* și *Hakimi* datorită simplității algoritmului dedus.

## II. Reprezentarea fără autointersecții a grafurilor simple

---

### 1. Grafuri planare

#### Definiții:

Spunem că un graf neorientat simplu  $G = (V, E)$  este *graf planar* dacă admite o reprezentare grafică în plan astfel încât muchiile sale să nu se intersecteze în alte puncte afară de nodurile sale. O astfel de reprezentare (notată  $M$ ) poartă numele de *hartă*, iar graful  $G$  se numește *graful suport* al hărții  $M$ . Spunem în acest caz că  $M$  este o *reprezentare plană fără autointersecții* a grafului  $G$ .

O hartă  $M$  a grafului  $G$  va împărți planul în părți conexe pe care le numim *fețe*, mulțimea muchiilor ce o delimitează poartă numele de *frontieră*, iar numărul acestora este *gradul feței*. În fiecare hartă există o *față infinită* (cea exterioară, nemărginită), iar o muchie interioară acestei fețe se va numi *muchie critică*.

#### Notății:

$\mathcal{F}(M)$  (sau simplu,  $\mathcal{F}$ ) – mulțimea fețelor din reprezentarea grafului  $G$  prin harta  $M$ ;

$d_M(f)$  – gradul unei fețe  $f \in \mathcal{F}(M)$ ;

Pentru un graf planar se poate defini *harta duală* a unei hărți  $M$ , notată  $M^*$ , astfel:

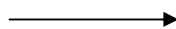
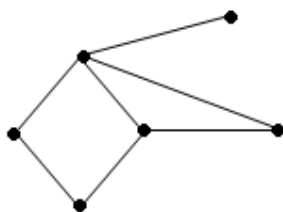
$$V(M^*) = \{f_i^* \mid f_i^* \text{ este un punct în interiorul feței } f_i \in \mathcal{F}(M)\}$$

$$E(M^*) = \{f_i^* f_j^* \mid i \neq j, f_i^*, f_j^* \in V(M^*), f_i^* f_j^* \text{ intersectează o singură dată}$$

$$\text{frontiera comună fețelor } f_i^*, f_j^*\}$$

#### Exemplu:

$M$



$M^*$

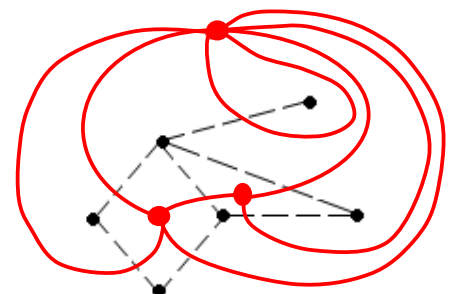


Figura II.1

Cu noțiunile anterioare, putem formula următoarele:

**Observații:**

- Un graf planar poate avea mai multe hărți fiecare corespunzând unei alte reprezentări plane;
- $\sum_{f \in \mathcal{F}(M)} d_M(f) = 2|E|$
- Dacă  $M$  este graf conex, atunci  $(M^*)^* \sim M$ ;
- $|E(M^*)| = |E(M)|$ ;  $|V(M^*)| = |\mathcal{F}(M)|$ ;
- Unei muchii critice din harta  $M$  i se asociază o buclă în  $M^*$ ;
- $d_M(f) = d_{M^*}(f)$ ;

Pentru grafurile planare are loc următorul rezultat clasic:

**Teorema II.1 (Formula poliedrală a lui Euler)**

Fie  $G = (V, E)$  un graf planar conex și  $M = (V, E, \mathcal{F})$  o hartă a acestuia. Atunci are loc relația:

$$|V| - |E| + |\mathcal{F}| = 2$$

**Demonstrație:** Deoarece  $M$  este o hartă conexă este asigurată existența unui arbore parțial  $\mathfrak{S} = (V, E(\mathfrak{S}), \mathcal{F}(\mathfrak{S}))$  al hărții  $M$ , unde  $\mathcal{F}(\mathfrak{S})$  are un singur element, fața infinită. Cunoaștem următoarea proprietate a arborelui  $|E(\mathfrak{S})| = |V| - 1$ , din care rezultă că

$$|V| - |E(\mathfrak{S})| + |\mathcal{F}(\mathfrak{S})| = |V| - (|V| - 1) + 1 = 2.$$

Rămâne să arătăm că relația se păstrează adăugând la  $\mathfrak{S}$  cele  $|E| - |V| + 1 := p$  elemente din mulțimea  $E - E(\mathfrak{S}) = \{e_1, \dots, e_p\}$ , muchiile șterse din graful  $G$  pentru obținerea arborelui parțial  $\mathfrak{S}$ .

La adăugarea în arborele  $\mathfrak{S}$  a unei muchii  $e_i$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$  aceasta împarte fața în care este introdusă în două fețe, deci atât numărul muchiilor, cât și cel al fețelor crește de fiecare dată cu o unitate, iar numărul nodurilor rămâne, în mod evident, constant. Adică

$$\begin{aligned} |V(\mathfrak{S} \cup e_i)| - |E(\mathfrak{S} \cup e_i)| + |\mathcal{F}(\mathfrak{S} \cup e_i)| &= |V| - (|E(\mathfrak{S})| + 1) + |\mathcal{F}(\mathfrak{S})| + 1 \\ &= |V| - |E(\mathfrak{S})| + |\mathcal{F}(\mathfrak{S})| = 2 \end{aligned}$$

În mod similar, formula lui Euler valabilă pentru arborele parțial  $\mathfrak{S}$  se conservă la introducerea tuturor muchiilor din mulțimea  $E - E(\mathfrak{S})$ .

Din Teorema Euler rezultă o serie de corolare, ce pot fi considerate drept criterii de verificare a non-planarității unor grafuri particulare, facil de implementat. Dăm în continuare câteva dintre acestea.

**Corolarul II.2**

Fie  $G = (V, E)$  un graf planar,  $|V| \geq 3$ . Atunci  $|E| \leq 3|V| - 6$ .

**Demonstrație:** Fie  $M = (V, E, \mathcal{F})$  o hartă a grafului planar  $G = (V, E)$ . Din condiția  $|V| \geq 3$  rezultă șirul de inegalități

$$2|E| = \sum_{f \in \mathcal{F}} d(f) \geq 3|\mathcal{F}| \Rightarrow |\mathcal{F}| \leq \frac{2}{3}|E| \quad (1)$$

Din Teorema Euler și relația (1) rezultă imediat

$$|V| - |E| + |\mathcal{F}| = 2 \leq |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| = |V| - \frac{1}{3}|E| \Rightarrow 2 \leq |V| - \frac{1}{3}|E| \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

**Observație:** Pentru implementare, acest corolar ne dă un criteriu de non-planaritate: în condițiile teoremei, dacă inegalitatea din concluzie nu are loc, atunci graful  $G$  nu este planar.

### Corolarul II.3

Fie  $G = (V, E)$  un graf conex, planar, simplu. Atunci  $\delta(G) \leq 5$ .

**Demonstrație:** Presupunem prin reducere la absurd că  $\delta(G) > 5$ ; atunci  $d_G(x) \geq 6, \forall x \in V$ , de unde  $2|E| \geq 6|V|$ , deci  $|E| \geq 3|V|$ . Însă din corolarul anterior cunoaștem relația  $|E| \leq 3|V| - 6$ . Contradicție.

Un alt rezultat important în teoria grafurilor planare, pe lângă *Teorema poliedrală a lui Euler* este *Teorema Kuratowski*, ce reprezintă o caracterizare simplă, remarcabilă, a grafurilor planare. În vederea enunțării acestui rezultat, prezentăm două rezultate premergătoare și o definiție.

### Lema II.4

Graful complet  $K_5$  nu este graf planar.

**Demonstrație:** Presupunând prin absurd că graful  $K_5$  este planar, din *Corolarul II.2* ar rezulta  $|E| = 10 \leq 3|V| - 6 = 9!$

### Lema II.5

Graful  $K_{3,3}$  nu este graf planar.

**Demonstrație:** Prin reducere la absurd, presupunem că graful  $K_{3,3}$  ar fi planar. Cum lungimea celui mai mic ciclu în acest graf este patru, rezultă că fiecare față a oricărei hărți are gradul cel puțin patru, de unde inegalitatea  $4|\mathcal{F}| \leq \sum_{f \in \mathcal{F}} d(f) = 2|E| = 18$ . De aici obținem:  $|\mathcal{F}| \leq 4$ . Dar din Teorema lui Euler deducem inegalitatea  $2 = |V| - |E| + |\mathcal{F}| \leq 6 - 9 + 4 = 1$ . Contradicție!

**Definiție:** Se numește *subdiviziune* a unui graf  $G = (V, E)$  graful obținut prin inserarea de noduri în interiorul muchiilor.

Cu aceste pregătiri, putem da acum

### Teorema II.6 (Kuratowski)

Un graf  $G$  este planar dacă și numai dacă nu conține subdiviziuni ale grafurilor  $K_{3,3}$  și  $K_5$ .

Demonstrația acestui rezultat fundamental pentru teoria grafurilor depășește cadrul și intenția acestei lucrări. Cititorul care dorește să intre în detaliile acesteia poate consulta, spre exemplu, [1] sau [2].

## 2. Planaritate și hamiltoneitate

Este un lucru binecunoscut faptul că noțiunea de hamiltoneitate, deși ușor de definit, nu admite caracterizări elementare. Totuși, în cazul grafurilor planare, aceasta admite o caracterizare mai simplă. În acest sens, vom prezenta în această secțiune o condiție necesară pentru ca grafurile planare să conțină un ciclu hamiltonian, cunoscută sub numele de teorema lui Grinberg. Acest rezultat deosebit de interesant, a fost folosit în literatura de specialitate pentru a construi exemple de grafuri planare ne-hamiltoniene cu proprietăți suplimentare deosebite. Un astfel de exemplu a fost dat de *Tutte*<sup>1</sup> (1946) pentru a nega o coniectură faimoasă a lui *Tait* (1880), care afirma că orice graf *3-conex cubic* planar are un ciclu hamiltonian<sup>2</sup>. Importanța acestei coniecturi în teoria grafurilor este centrală, întrucât dacă aceasta s-ar fi dovedit adevărată, ar fi implicat faimoasa teoremă a celor patru culori.

Privind în sens invers, ne putem întreba în ce condiții un graf despre care știm că este hamiltonian poate fi planar. Teorema cu care încheiem această secțiune răspunde la această întrebare, dând o condiție necesară și suficientă ca un graf hamiltonian să fie planar.

Prezentăm mai întâi un rezultat cu grad sporit de generalitate.

### Teorema II.7

Fie  $M = (V, E, \mathcal{F})$  o hartă conexă a unui graf planar,  $C \subseteq M$  un ciclu elementar și  $R', R''$  cele două regiuni determinate de  $C$  în plan. Notăm cu  $f'_i, i \geq 1$  și  $v'$  numărul  $i$ -fețelor din  $R'$  și respectiv numărul vârfurilor lui  $M$  din  $R'$  care nu sunt în  $C$ . Analog, notăm cu  $f''_i, i \geq 1$  și  $v''$  corespunzător regiunii  $R''$ . Atunci avem

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2)(f'_i - f''_i) = 2(v' - v'').$$

**Demonstrație:** Notă cu  $e'$  numărul muchiilor lui  $M$  din  $R'$ . Teorema poliedrală a lui Euler aplicată în cazul hărții induse în  $M$  de mulțimea vârfurilor din  $R'$  împreună cu cele ale lui  $C$  conduce la următoarea egalitate:

$$(v' + |V(C)|) - (e' + |E(C)|) + \left( \sum_{i \geq 1} f'_i + 1 \right) = 2$$

Sau, ținând cont că  $|V(C)| = |E(C)|$ ,  $\sum_{i \geq 1} f'_i = 1 - v' + e'$ .

Pe de altă parte  $\sum_{i \geq 1} i f'_i = 2e' + |E(C)|$ . Eliminând  $e'$  din ultimele două relații obținem

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2) f'_i = |E(C)| + 2v' - 2.$$

<sup>1</sup> Vezi figura II.2

<sup>2</sup> Grafurile  $k$ -conexe sunt cele în care trebuie eliminate cel puțin  $k$  muchii pentru a deveni ne-conex, iar grafurile cubice sunt cele în care orice nod are gradul trei



Analog obținem pentru zona exterioară  $R''$ :  $\sum_{i \geq 1} (i - 2)f_i'' = |E(C)| + 2v'' - 2$ .

Scăzând ultimele două relații obținem concluzia teoremei.

### Teorema II.8 (Grinberg)

Fie  $M = (V, E, \mathcal{F})$  o hartă conexă a unui graf planar,  $H \subseteq M$  un ciclu hamiltonian și  $R', R''$  cele două regiuni determinate de  $H$  în plan. Notăm cu  $f_i', f_i''$ ,  $i \geq 1$  numărul  $i$ -fețelor din  $R'$ , respectiv  $R''$ . Atunci avem

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2)(f_i' - f_i'') = 0.$$

**Demonstrație:** Se observă ușor că acest rezultat este o consecință directă a teoremei precedente, deoarece în cazul unui ciclu hamiltonian, cu notațiile anterioare, avem  $v' = v'' = 0$ .

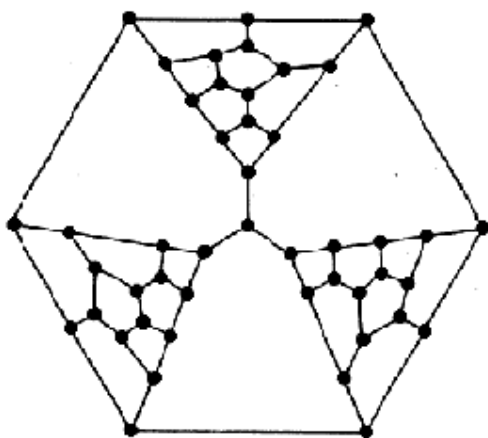


Figura II.2 Graful Tutte

După cum am amintit în paragraful de prezentare al acestei secțiuni, graful alăturat este un exemplu de graf 3-conex cubic planar ne-hamiltonian, exemplu care infirma în 1946 o coniectură dificilă, cu o vechime de 75 de ani la acel moment. Faptul că acest graf este 3-conex cubic și planar se observă direct din reprezentarea sa grafică, ne-hamiltoneitatea fiind o consecință a teoremei lui Grinberg.

Prezentăm în continuare rezultatul care ne spune în ce condiții un graf hamiltonian este planar. Pentru aceasta vom introduce câteva noțiuni premergătoare.

### Definiții:

Fie  $G = (V, E)$  un graf hamiltonian și  $C$  un ciclu hamiltonian al său. Notăm cu  $\bar{G}_C = (V, E - E(C))$  graful complementar în  $G$  al ciclului  $C$ . Numim, în acest caz, muchiile grafului  $\bar{G}_C$  corzi (în raport cu ciclul  $C$ ).

Fie  $M$  o hartă a grafului  $G$ . Cu notațiile anterioare construim *graful de intersecție* al corzilor lui  $\bar{G}_C$  în raport cu harta  $M$ , notat  $I(\bar{G}_C, M)$ , astfel:

- nodurile acestuia vor fi corzile grafului  $\bar{G}_C$ ;
- considerăm că între două corzi avem muchie dacă acestea se intersectează în harta  $M$ .

Cu aceste pregătiri dăm acum, fără demonstrație, rezultatul anunțat:

### Teorema II.9

Fie  $G = (V, E)$  un graf hamiltonian,  $M$  o hartă a sa și  $C$  un ciclu hamiltonian al grafului  $G$ . Atunci  $G$  este planar dacă și numai dacă  $I(\overline{G}_C, M)$  este graf bipartit.

## 3. Reprezentări grafice fără autointersecții ale grafurilor<sup>3</sup>

Am văzut în prima secțiune a acestei lecții faptul că nu orice graf este planar. Într-adevăr, teorema poliedrală a lui Euler reprezintă o constrângere serioasă în acest sens. Cu ajutorul ei am putut demonstra câteva colorare la capătul cărora am văzut că grafurile  $K_{3,3}$  și  $K_5$  nu sunt planare. Mai mult, teorema lui Kuratowski ne arată faptul că orice graf care conține în interiorul lui unul din grafurile  $K_{3,3}$  sau  $K_5$  nu este planar (nu admite o reprezentare în plan fără autointersecții). Totuși, ar fi de dorit ca orice graf să poată admite, într-o formă sau alta, o reprezentare fără autointersecții. Acest fapt într-adevăr are loc, dar pentru a putea înțelege mai bine în ce fel anume, avem nevoie de câteva noțiuni premergătoare.

**Definiție:** Numim *triangularizare a unei suprafețe*<sup>4</sup> o acoperire a acelei suprafețe cu triunghiuri pentru care orice două triunghiuri ale acoperirii sau nu au nimic în comun, sau au exact un vârf în comun sau au exact o latură comună.

Figura II.3 arată un exemplu de triangularizare de suprafață, pentru cazul sferei.

Este ușor de remarcat că orice triangularizare a unei suprafețe geometrice poate fi privită ca o reprezentare grafică fără autointersecții a grafului asociat acestei triangularizări. În acest moment, ne putem întreba dacă nu cumva are loc reciproca acestei observații simple; mai exact: este adevărat că orice graf poate fi reprezentat fără autointersecții pe o suprafață bine aleasă? Pentru a răspunde la această întrebare mai precis, amintim pe scurt un rezultat clasic din domeniul topologiei.

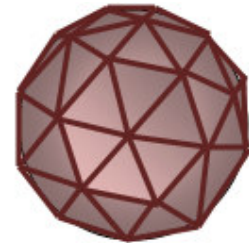


Figura II.3

### Teoremă (de caracterizare a suprafețelor compacte și conexe)

Orice suprafață compactă și conexă este homeomorfă<sup>5</sup> cu o sferă sau cu o  $g$ -sferă (o sferă la care s-au atașat  $g$  mânere).

Pentru o mai bună înțelegere a acestui rezultat, figura alăturată exemplifică noțiunea de  $g$ -sferă pentru cazul unei sfere cu trei

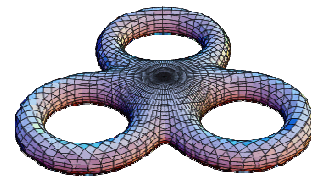


Figura II.4

<sup>3</sup> această secțiune are un caracter mai puțin formal, întrucât implică prezentarea și utilizarea unor noțiuni de un nivel matematic avansat în raport cu nivelul acestei lucrări

<sup>4</sup> compacte, conexe

<sup>5</sup> altfel spus: echivalentă din punct de vedere topologic

mânere (3-sfere).

Așadar, întrebarea din paragraful precedent se traduce cu ajutorul teoremei amintite anterior la următorul rezultat:

### **Teorema II.9 (de reprezentare fără autointersecții a grafurilor)**

Orice graf  $G$  poate fi reprezentat fără autointersecții pe o sferă sau pe o  $g$ -sferă. Graful  $G$  este planar dacă și numai dacă acesta admite o reprezentare fără autointersecții pe o sferă.

**Demonstrație:** În ciuda dificultății aparente a enunțului, demonstrația este imediată. Într-adevăr, să presupunem mai întâi că graful  $G$  este planar. Atunci, prin proiecție stereografică acesta poate fi reprezentat fără autointersecții pe o sferă. Tot cu ajutorul proiecției stereografice se vede ușor că orice graf care admite o reprezentare fără autointersecții pe o sferă este planar.

Presupunem acum ca graful  $G$  nu este planar. Fie  $M$  o hartă plană a acestuia și  $M_0$  proiecția stereografică a hărții  $M$  pe sferă. Pentru fiecare două muchii care se intersectează în  $M_0$  într-un punct diferit de vârfurile lui  $G$ , adăugăm câte un mâner sferei care să folosească drept „pasaj” de trecere pentru una din cele două muchii, și modificăm harta  $M_0$  în concordantă. Prin adăugarea succesivă a unor astfel de mânere, obținem rezultatul dorit.

Această teoremă îndreptățește următoarea:

### **Definiție:**

Numim *genul unui graf* cel mai mic număr natural  $g$  pentru care graful poate fi reprezentat pe o  $g$ -sferă fără autointersecții.

Spre exemplu, orice graf planar are genul 0. Cum grafurile  $K_{3,3}$  și  $K_5$  nu sunt planare, înseamnă ca ele au genul cel puțin 1. Încheiem această secțiune menționând că aceste două grafuri au genul exact 1, ele putând fi reprezentate, fără autointersecții, pe un tor.

# III. Cuplaje

## 1. Noțiuni introductive

Vom începe acest capitol prin a prezenta o problemă din viața cotidiană care își va găsi rezolvarea în mod firesc în acest cadru, al teoriei grafurilor.

Să presupunem că într-o companie avem un număr de  $m$  lucrători și tot atâtea locuri de muncă. Fiecare loc de muncă are specificul său și fiecare angajat este calificat pentru unul sau mai multe dintre acestea. Problema constă în a determina o împărțire a locurilor de muncă, astfel încât fiecare lucrător să fie angajat conform uneia dintre calificările sale.

Pentru a o rezolva vom introduce o nouă noțiune, aceea de *cuplaj*, împreună cu o serie de observații și rezultate pregătitoare.

Așadar,

### Definiții:

Fie  $G = (V, E)$  un graf simplu. Se numește *cuplaj* al grafului  $G$  o mulțime de muchii  $M \subseteq E$  cu proprietatea că oricare două sunt neincidente (*mulțime independentă de muchii*).

Nodurile grafului  $G$  care aparțin muchiilor cuplajului  $M$  se numesc  $M$  – *saturate*, iar cele care nu aparțin cuplajului poartă numele de noduri  $M$  – *nesaturate*.

### Exemplu:

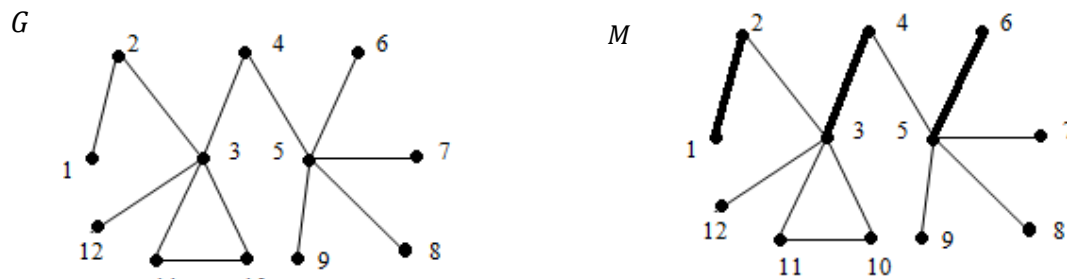


Figura III.1

Spunem că un lanț sau ciclu elementar este  $M$  – *alternant* dacă muchiile sale aparțin alternativ cuplajului  $M$  și mulțimii  $\bar{M} = E - M$ . Dacă acesta are capetele nesaturate, îl numim lanț (ciclu) *deschis*.

### Exemplu:

$L_1 = [12,3,4,5,7]$  – lanț  $M$  – alternant deschis

$L_2 = [1,2,3,4,5,6]$  – lanț  $M$  – alternant închis

O mulțime de noduri  $K \subseteq V$  se numește *transversală* dacă orice muchie a grafului  $G$  are cel puțin unul din noduri în mulțimea  $K$ .

Spunem că o mulțime de noduri  $A \subseteq V$  poate fi saturată dacă există un cuplaj  $M$  care să conțină toate nodurile mulțimii  $A$ .

Un cuplaj  $M$  se numește *perfect* dacă acesta saturează mulțimea  $V$ . Dacă din mulțimea de noduri  $V$  rămâne exact un nod nesaturat, numim cuplajul  $M$  *aproape perfect*.

**Notății:**

$[M]$  – graful indus de mulțimea  $M$ ;

$M^*$  – cuplaj de cardinal maxim (îl numim *cuplaj maximal*);

$\tilde{K}$  – transversală de cardinal minim (o numim *transversală minimală*);

**Observații:**

III.1) Un graf cu numărul de noduri impar nu poate conține un cuplaj perfect.

III.2) Fie  $M_1 \Delta M_2$  – diferența simetrică a două cuplaje  $M_1, M_2$ . Componentele conexe ale grafului  $[M_1 \Delta M_2]$  sunt de patru tipuri (am colorat cu negru muchiile cuplajului  $M_1$  și cu roșu pe cele ale lui  $M_2$ ):



ciclu  $M_1, M_2$  – alternant (numim, pe scurt, componentă de tip  $C$ );



lanț  $M_1, M_2$  – alternant cu un capăt  $M_1$  – saturat și celălalt  $M_2$  – saturat (componentă tip  $(M_1, M_2)$ );



lanț  $M_1, M_2$  – alternant cu ambele capete  $M_1$  –saturate (componentă tip  $(M_1, M_1)$ );



lanț  $M_1, M_2$  – alternant cu ambele capete  $M_2$  – saturate (componentă tip  $(M_2, M_2)$ ).

III.3)  $|M_1| - |M_2| =$  numărul componentelor conexe din  $[M_1 \Delta M_2]$  de tip  $(M_1, M_1)$  – numărul componentelor conexe din  $[M_1 \Delta M_2]$  de tip  $(M_2, M_2)$ .

Un prim rezultat important este:

### **Teorema III.1 (Berge)**

Fie  $G = (V, E)$  un graf simplu cu  $E \neq \emptyset$  și  $M$  un cuplaj al acestuia. Atunci  $M$  este un cuplaj maximal dacă și numai dacă nu există în  $G$  niciun lanț  $M$  – alternant deschis.

**Demonstrație:** Pentru implicația directă raționăm prin reducere la absurd. Fie  $M$  un cuplaj maximal și  $L$  un lanț  $M$  – alternant deschis. Definim un nou cuplaj ca fiind diferența simetrică dintre cuplajul  $M$  și mulțimea muchiilor lanțului  $L$ :  $M' = M \Delta E(L)$ . Cum  $L$  este lanț  $M$  – alternant deschis atunci  $|M'| = |M| + 1$ , deci cuplajul  $M'$  este de cardinal strict mai mare decât  $M$ , contradicție cu maximalitatea cuplajului  $M$ .

Pentru implicația inversă, fie  $M$  un cuplaj pentru care nu există niciun lanț  $M$  – alternant deschis. Prin reducere la absurd, presupunem că  $M$  nu este un cuplaj maximal. Fie  $M^*$  un astfel de cuplaj maximal. Atunci, în mod evident,  $|M^*| > |M|$ , adică  $|M^*| - |M| > 0$ . Dar, conform *Observației III.3*:

$|M^*| - |M| =$  numărul componentelor conexe din  $[M^* \Delta M]$  de tip  $(M^*, M^*)$  – numărul componentelor conexe din  $[M^* \Delta M]$  de tip  $(M, M)$ .

De aici, deducem că numărul componentelor conexe din  $[M^* \Delta M]$  de tip  $(M^*, M^*)$  este strict pozitiv, deci există cel puțin un lanț  $(M^*, M^*)$  în  $G$ , adică  $M$  – alternant deschis. Contradicție!

Prezentăm în cele ce urmează, fără demonstrație, o serie de rezultate ce ne ajută să formulăm algoritmi de rezolvare a problemei prezentate la începutul capitolului. Vom folosi următoarele:

### **Notații:**

- Pentru  $G = (V, E)$  un graf simplu și  $X \subseteq V$ , notăm cu  $N_G(X)$  mulțimea nodurilor adiacente celor din  $X$ ;
- Pentru  $G$  un graf bipartit cu mulțimea nodurilor dată de partițiile  $A$  și  $B$  și mulțimea muchiilor  $E$  vom folosi notația  $G = (A \cup B, E)$ .

### **Teorema III.2 (Hall, 1935)**

Fie  $G = (A \cup B, E)$  graf bipartit. Atunci mulțimea de noduri  $A$  poate fi saturată dacă și numai dacă  $\forall X \subseteq A, |N_G(X)| \geq |X|$ .

O generalizare a acestui rezultat o reprezintă următoarea

### **Teorema III.3 (Tutte)**

Un graf  $G = (V, E)$  are un cuplaj perfect dacă și numai dacă pentru orice submulțime de noduri  $X \subseteq V$  numărul de componente conexe cu un număr impar de noduri în subgraful indus de mulțimea  $V \setminus X$  este mai mic sau egal decât  $|U|$ .

### **Teorema III.4 (König)**

Fie  $G = (A \cup B, E)$  graf bipartit. Atunci  $|\tilde{K}| = |M^*|$ .

## 2. Algoritmul ungar

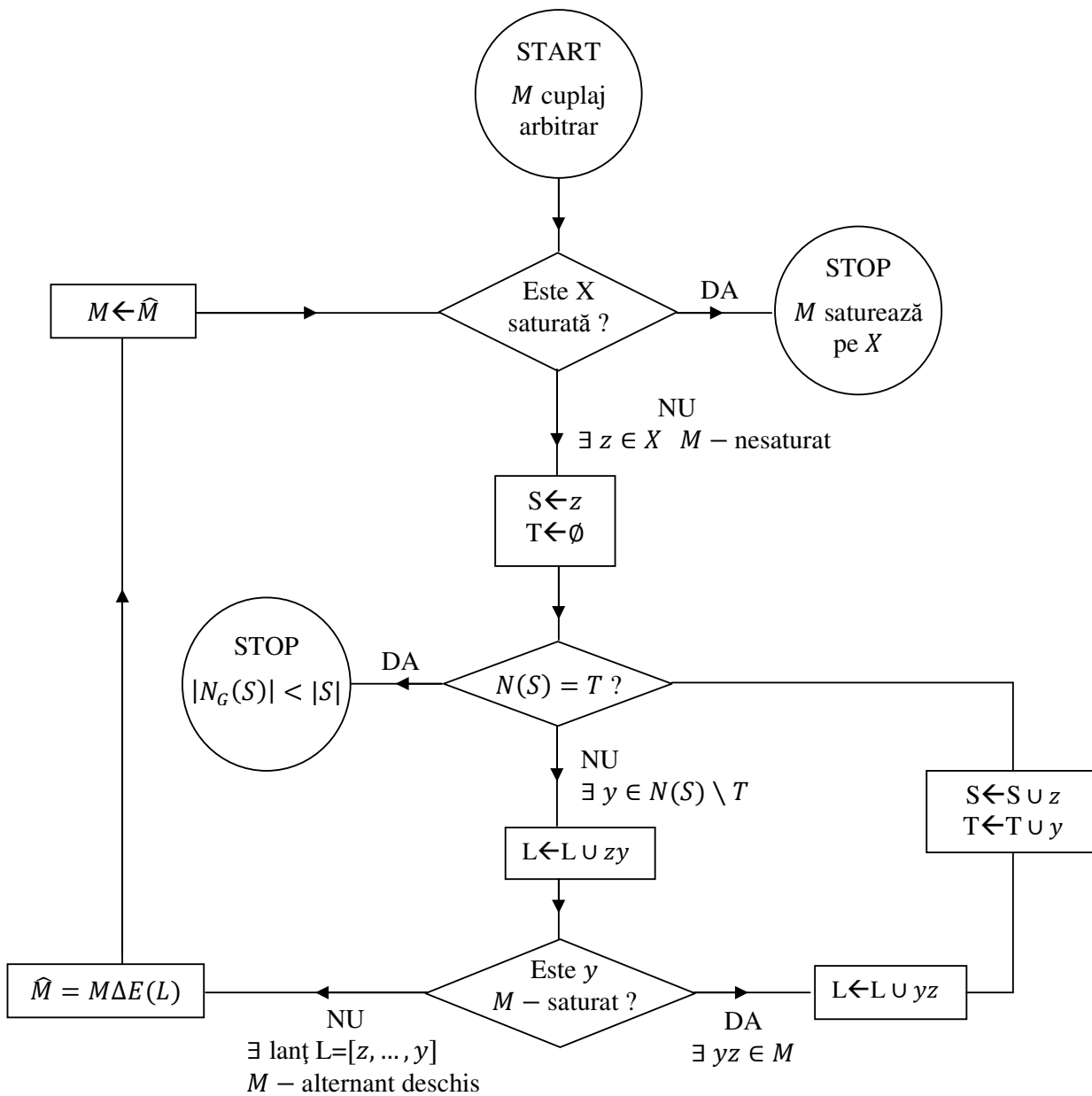
Cu pregătirile anterioare putem trece la rezolvarea problemei descrise în debutul capitolului. Pentru aceasta vom nota mulțimea lucrătorilor cu  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  și mulțimea locurilor de muncă cu  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Construim, cu ajutorul acestora, graful bipartit  $G = (X \cup Y, E)$ , unde  $e = (x_i y_j) \in E$  dacă și numai dacă lucrătorul  $x_i$  este calificat pentru locul de muncă  $y_j$ . Problema se reduce astfel la determinarea unui cuplaj perfect al grafului  $G$ . În condițiile acestei probleme teorema lui Hall asigură existența unui astfel de cuplaj. Pentru determinarea lui vom folosi un algoritm de rezolvare numit *algoritmul ungar*. Acesta decide dacă, în general un graf bipartit admite un cuplaj perfect sau nu. În caz afirmativ, metoda determină un astfel de cuplaj iar în caz contrar aceasta returnează (conform teoremei lui Hall) o submulțime  $S \subseteq X$  cu proprietatea că  $|N_G(S)| < |S|$ .

Algoritmul pornește cu un cuplaj arbitrar  $M$  (de exemplu, prima muchie în ordinea lexicografică a etichetelor nodurilor). Dacă acesta saturează toate nodurile mulțimii  $X$ , atunci algoritmul se oprește, pentru că a fost determinat un cuplaj perfect. Altfel, se alege, în ordinea etichetelor, un nod  $z \in X$ ,  $M$  – nesaturat și se încearcă construirea unui lanț  $M$  – alternant deschis cu extremitatea inițială în nodul  $z$  ales. Mai întâi se alege un (primul) “vecin” (nod adiacent)  $y$  al lui  $z$ . Dacă acesta este  $M$  – nesaturat, am aflat deja un lanț  $M$  – alternant deschis de lungime unu, cu extremitatea inițială în nodul  $z$  ales și extremitatea finală în  $y$ . Altfel, adăugăm lanțului  $L$  muchia  $zy$  din  $E - M$ , muchia  $yz'$  din cuplajul  $M$  și continuăm procedeul cu noul  $z'$  pe post de  $z$ , ocolind nodurile din mulțimea  $Y$  care aparțin deja lanțului  $L$ . Dacă lanțul  $L$  construit astfel<sup>6</sup> pas cu pas este  $M$  – alternant deschis, atunci este determinat (similar metodei folosite în demonstrația teoremei lui Berge) cuplajul  $M' = M \Delta E(L)$  care saturează din mulțimea  $X$  un nod în plus față de cuplajul anterior, după care se reia procedeul, cu noul cuplaj  $M'$  în locul lui  $M$ . În cazul în care lanțul  $L$  nu este  $M$  – alternant deschis (extremitatea finală este nod al cuplajului  $M$ ) înseamnă ca mulțimea  $S = V(L) \cap X$  verifică inegalitatea  $|N_G(S)| < |S|$ , deci, conform teoremei lui Hall, graful nu admite un cuplaj perfect.

Pentru o mai bună înțelegere a algoritmului contruim schema logică a acestuia și dăm un exemplu de rulare.

---

<sup>6</sup> Construirea lanțului  $L$  luând nodurile în ordinea lor lexicografică poate fi îmbunătățită cu ajutorul arborilor *arborilor  $M$ -alternanți*. Cititorul poate studia această variantă în lucrarea [1], pag. 81-84



**Exemplu:**

Fie graful  $G = (\{x_1, \dots, x_4\} \cup \{y_1, \dots, y_4\}, E)$ . Aplicăm acestuia algoritmul ungar în vederea obținerii unui cuplaj perfect.

Pornim cu  $M = x_1y_1$ .

X saturată ?

NU:  $z = x_2, S = \{x_2\}, T = \emptyset$

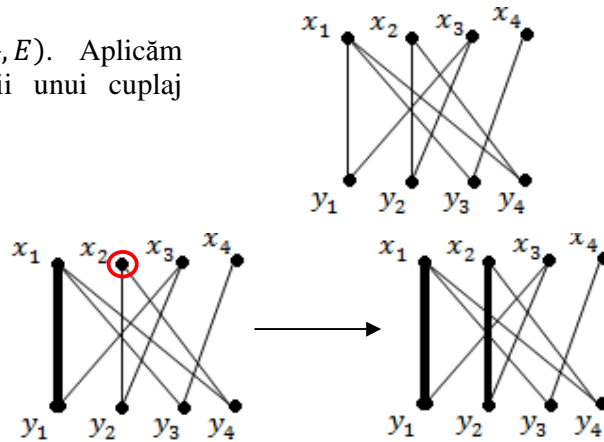
$N(S) = T$  ?

NU:  $y = y_2; L = [x_2y_2]$

$y$  M-saturat ?

NU:  $\hat{M} = [x_1y_1, x_2y_2];$

$M = [x_1y_1, x_2y_2]$





X saturată ?

NU:  $z = x_3, S = \{x_3\}, T = \emptyset$

$N(S) = T ?$

NU:  $y = y_1; L = [x_3y_1]$

$y M$  – saturat ?

DA:  $z = x_1; L = [x_3y_1, y_1x_1];$

$S = \{x_3, x_1\}, T = \{y_1\}$

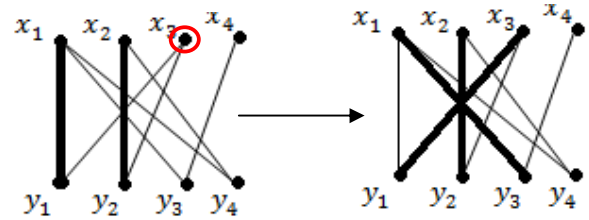
$N(S) = T ?$

NU:  $y = y_3; L = [x_3y_1, y_1x_1, x_1y_3]$

$y M$  – saturat ?

DA:  $\widehat{M} = [x_1y_3, x_2y_2, x_3y_1];$

$M = [x_1y_3, x_2y_2, x_3y_1];$



X saturată ?

NU:  $z = x_4, S = \{x_4\}, T = \emptyset$

$N(S) = T ?$

NU:  $y = y_3; L = [x_4y_3]$

$y M$  – saturat ?

DA:  $z = x_1; L = [x_4y_3, y_3x_1];$

$S = \{x_4, x_1\}, T = \{y_3\}$

$N(S) = T ?$

NU:  $y = y_1; L = [x_4y_3, y_3x_1, x_1y_1];$

$y M$  – saturat ?

DA:  $z = x_3; L = [x_4y_3, y_3x_1, x_1y_1, y_1x_3];$

$S = \{x_4, x_1, x_3\}, T = \{y_3, y_1\}$

$N(S) = T ?$

NU:  $y = y_2; L = [x_4y_3, y_3x_1, x_1y_1, y_1x_3, x_3y_2];$

$y M$  – saturat ?

DA:  $z = x_2; L = [x_4y_3, y_3x_1, x_1y_1, y_1x_3, x_3y_2, y_2x_2];$

$S = \{x_4, x_1, x_3, x_2\}, T = \{y_3, y_1, y_2\}$

$N(S) = T ?$

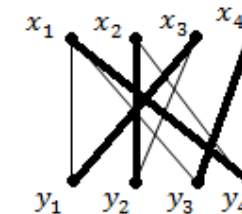
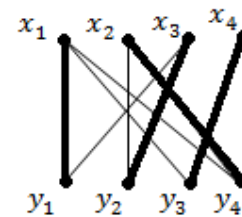
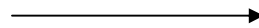
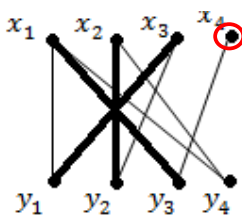
NU:  $y = y_4; L = [x_4y_3, y_3x_1, x_1y_1, y_1x_3, x_3y_2, y_2x_2, x_2y_4];$

$y M$  – saturat

NU:  $\widehat{M} = [x_4y_3, x_1y_1, x_3y_2, x_2y_4];$

X saturată ?

DA: STOP



**Observație:** Cuplajul perfect al grafului  $G$  nu este unic – acesta depinde de cuplajul inițial. Un alt exemplu de cuplaj perfect pentru  $G$  este:

### 3. Algoritmul Kuhn (1955) – Munkres (1957)

Am văzut că algoritmul ungar ne rezolvă problema determinării unui cuplaj perfect într-un graf bipartit, de exemplu cel al asocierii lucrători – locuri de muncă. Dar ce s-ar întâmpla dacă nu am reține numai pentru ce loc de muncă este fiecare lucrător calificat, ci și gradul specializării sale? În această situație putem modela problema cu ajutorul unui graf bipartit ponderat. Astfel este definită o funcție pondere  $w: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  care asociază fiecărei muchii a grafului un număr real pozitiv (altfel spus, această funcție ne indică gradul de pricepere al lucrătorului  $x_i$  pentru locul de muncă  $y_j$  prin valoarea  $w(x_i y_j)$ ). Observăm că, fără a restrânge generalitatea, această problemă poate fi modelată cu ajutorul unui graf bipartit complet în care, dacă lucrătorul  $x_i$  nu este calificat pentru locul de muncă  $y_j$  muchiei  $x_i y_j$  îi vom asocia ponderea 0, în celelalte cazuri ponderea fiind strict pozitivă.

O primă soluție a acestei probleme ar fi generarea tuturor celor  $n!$  cuplaje perfecte ale grafului bipartit complet și selectarea unuia optim dintre acestea. Pentru valori mari ale lui  $n$  această soluție este, în mod evident, total ineficientă. Algoritmul Kuhn – Munkres reprezintă o variantă de rezolvare a acestei probleme acceptabilă din punctul de vedere al complexității.

Pentru a-l putea prezenta avem nevoie de următoarea:

**Definiție:** Fie  $G = (X \cup Y, E)$  un graf bipartit complet. Spunem că o funcție  $l: X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  este o *etichetare validă* a nodurilor grafului  $G$  dacă  $\forall x \in X, \forall y \in Y$  este îndeplinită inegalitatea  $l(x) + l(y) \geq w(xy)$ . Numărul  $l(x)$  îl vom numi *eticheta* nodului  $x$ .

Se poate observa că o astfel de etichetare validă există întotdeauna, spre exemplu:

$$\begin{cases} l(x) = \max_{y \in Y} w(xy), & \text{dacă } x \in X; \\ l(y) = 0, & \text{dacă } y \in Y. \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Pentru o etichetare validă  $l$  vom nota cu  $E_l$  mulțimea de muchii din  $G$  pentru care are loc egalitatea  $l(x) + l(y) = w(xy)$ :  $E_l = \{xy \in E \mid l(x) + l(y) = w(xy)\}$ ; și cu  $G_l$  graful generat de mulțimea de muchii  $E_l$ . Legătura între acest subgraf al grafului  $G$  și determinarea unui cuplaj perfect optim este dată de următoarea

#### Teorema III.6

Fie  $l$  o etichetare validă a grafului  $G$ . Dacă  $G_l$  conține un cuplaj perfect  $M^*$ , atunci  $M^*$  este un cuplaj optim pentru graful  $G$ .

**Demonstrație:** Presupunând că  $G_l$  conține un cuplaj perfect  $M^*$ , cum  $V(M^*) = V(G_l) = V(G)$  rezultă că  $M^*$  este un cuplaj perfect și pentru graful  $G$ , atunci  $w(M^*) = \sum_{e \in M^*} w(e)$ . Dar cum toate muchiile  $M^*$  conțin o singură dată toate nodurile grafului  $G$  și, fiind din graful  $G_l$  ponderea unei muchii este suma etichetelor extremităților ei, rezultă că  $\sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V} l(v)$ . În schimb, pentru un cuplaj perfect oarecare al grafului  $G$  are loc relația anterioară cu inegalitate:  $w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{v \in V} l(v)$ . Comparând, obținem că  $w(M^*) \geq w(M)$ , deci  $M^*$  este un cuplaj optim al grafului  $G$ .

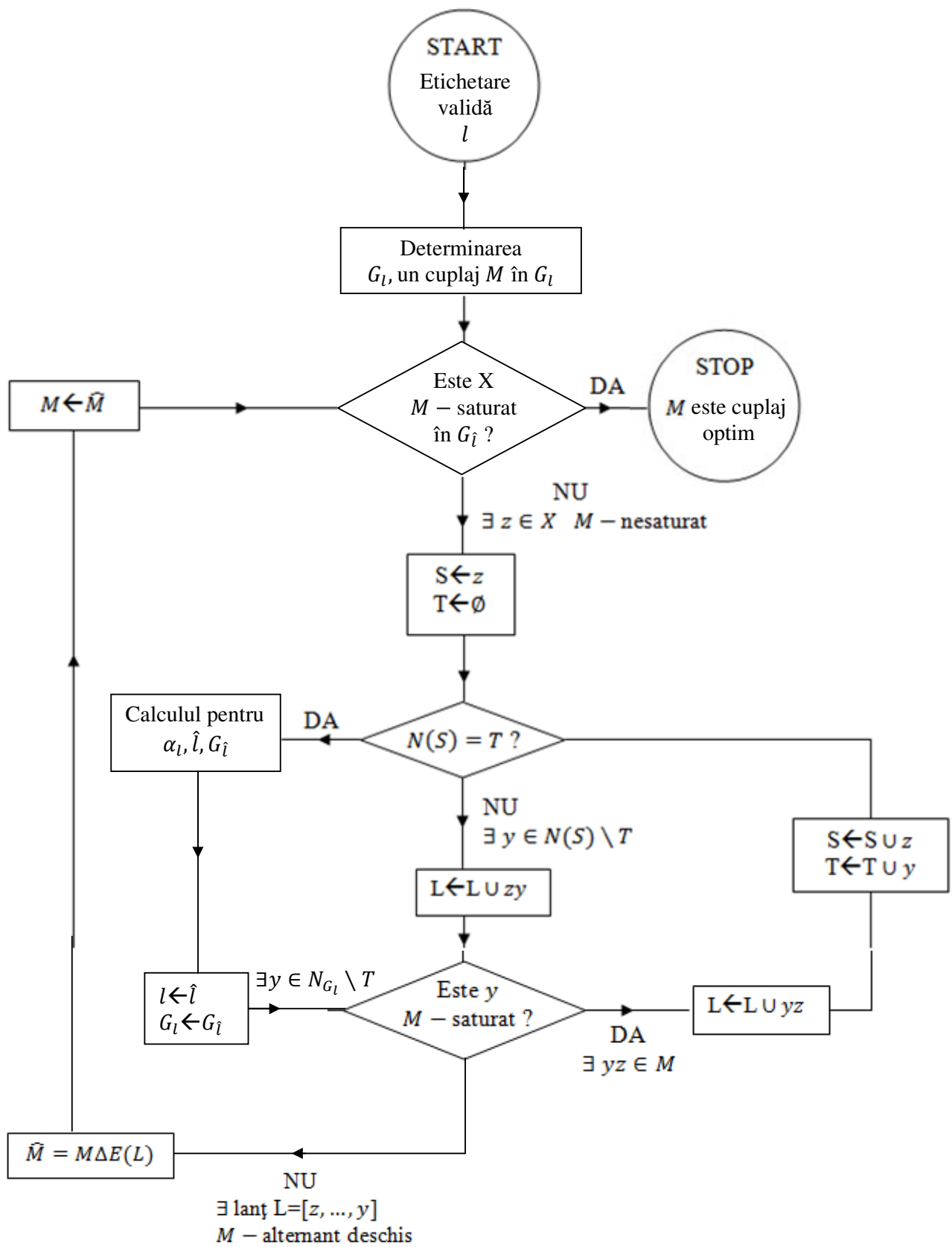
Acest rezultat, îmbinat cu algoritmul ungar prezentat în secțiunea anterioară reprezintă instrumentele ce stau la baza construirii algoritmului Kuhn – Munkres.

Pentru a aplica algoritmul, alegem pentru început o etichetare validă  $l$  a nodurilor grafului  $G$  (de exemplu, cea dată de III.5), determinăm graful asociat acestei etichetări,  $G_l$  și alegem un cuplaj arbitrar al acestuia,  $M$ . Pentru acest cuplaj, aplicăm algoritmul ungar în vederea determinării unui cuplaj perfect în graful  $G_l$ , care, conform *Teoremei III.6*, ar fi cuplaj

optim în graful  $G$ , deci algoritmul se încheie. Dacă, în schimb, nu există un cuplaj perfect în graful  $G_l$ , înseamnă că, aplicând algoritmul ungar am ajuns în situația  $N_{G_l}(S) = T$  și, în acest caz, efectuăm o reetichetare a nodurilor grafului  $G$  după următoarea regulă:

- calculăm  $\alpha_l = \min_{\substack{x \in S \\ y \notin T}} \{l(x) + l(y) - w(xy)\}$ ;
  - alegem etichetarea validă
- $$\hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l, & \text{dacă } v \in S \\ l(v) + \alpha_l, & \text{dacă } v \in T \\ l(v), & \text{altfel} \end{cases}$$
- determinăm noul graf  $G_{\hat{l}}$ .

Aceste trei operații asigură apariția în graful  $G_{\hat{l}}$  a unui nou nod nesaturat al mulțimii  $Y$  cu ajutorul căruia extindem cuplajul  $M$  (tehnica diferenței simetrice față de lanțul  $M$ -alternant deschis deja cunoscută) la un nou cuplaj  $\hat{M}$ . După care este reluat algoritmul, până la obținerea cuplajului optim.



## Bibliografie

- [1] **Bondy, J.A., Murty, U.S.R.**, *Graph Theory with Applications*, Elsevier Science Publishing, 1976
- [2] **Diestel, R.**, *Graph Theory*, Springer-Verlag Heidelberg, 2005
- [3] **Popescu, D.R.**, *Combinatorică și teoria grafurilor*, Societatea de Științe Matematice din România, 2005
- [4] **Tomescu, I.**, *Probleme de combinatorică și teoria grafurilor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981