CAPITOLUL 1

NOTIUNI FUNDAMENTALE ALE TEORIEI PROBABILITATILOR

1.1 Experienta. Proba. Eveniment

Orice disciplina foloseste pentru obiectul ei de studiu o serie de notiuni fundamentale. Se vor defini astfel, notiunile de experienta, proba si eveniment.

Prin *experienta*, se intelege realizarea practica a unui complex de conditii corespunzator unui criteriu dat de cercetare a colectivitatilor statistice omogene. Realizarea o singura data a experientei, se numeste *proba*.

EXEMPLU Se poate considera drept experienta, aruncarea unui zar perfect construit din punct de vedere geometric si omogen din punct de vedere fizic, caz in care, proba este reprezentata de aruncarea o singura data a zarului.

Prin intermediul exemplului de mai sus se poate identifica notiunea de *colectivitate statistica* prin multimea punctelor care apar pe fetele zarului.

Prin *eveniment* se intelege rezultatul unei probe. Evenimentele pot fi clasificate in trei mari categorii: evenimente *sigure*, evenimente *imposibile* si evenimente *intamplatoare*.

Prin eveniment sigur, se intelege evenimentul care se produce in mod obligatoriu la efectuarea unei probe a unei experiente. Evenimentul imposibil este acela care nu se produce la efectuarea nici unei probe. Se numeste eveniment intamplator (aleator) un eveniment care poate fie sa se produca, fie sa nu se produca la efectuarea unei singure probe.

EXEMPLE

1. Extragerea unei bile albe dintr-o urna care contine numai bile albe, este un eveniment sigur.

2. La aruncarea unui zar, evenimentul care consta in aparitia oricarei fete de la *1* la *6* constituie evenimentul sigur.
3. Aparitia unui numar de *7* puncte la o proba a aruncarii unui zar este un eveniment imposibil.
4. Extragerea unei bile negre dintr-o urna care contine numai bile albe, este un eveniment imposibil.
5. Aparitia fetei *1* la aruncarea unui zar este un eveniment intamplator.

Evenimentele intamplatoare se supun unor legitati, numite legitati statistice. In acest sens, nu se poate prevedea daca intr-o singura aruncare a unui zar se obtine fata *1*; daca insa se efectueaza un numar suficient de mare de aruncari se poate prevedea cu suficienta precizie numarul de aparitii ale acestei fete.

Evenimentele intamplatoare pot fi *compatibile* si *incompatibile*.

Doua evenimente se numesc incompatibile, daca realizarea unuia exclude realizarea celuilalt.

EXEMPLE

1. Evenimentele: aparitia fetei *1* la aruncarea unui zar si respectiv aparitia fetei *2* la aruncarea unui zar, sunt incompatibile.
2. Evenimentele: aparitia fetei *1* la aruncarea unui zar si respectiv aparitia unei fete cu un numar impar de puncte la aruncarea unui zar, sunt compatibile

Evenimentele pot fi *dependente* sau *independente*.

Doua evenimente se numesc independente daca realizarea unuia nu influenteaza probabilitatea realizarii celuilalt si dependente in caz contrar.

EXEMPLE

1. Evenimentele: aparitia fetei *1* la aruncarea unui zar si respectiv aparitia fetei *2* la o alta aruncare a zarului, sunt independente.

2. Evenimentele: obtinerea unui numar de *7* puncte la aruncarea a doua zaruri si aparitia fetei *2* pe unul dintre doua zaruri, stiind ca acestea au suma punctelor de pe fetele de deasupra *7*, sunt dependente.

1.2 Operatii cu evenimente

Notatiile folosite sunt cele cunoscute din teoria multimilor. Multimile vor fi evenimentele aleatoare si vor fi notate cu: *A*, *B*, *C*,….

Fie Ω evenimentul sigur si Φ evenimentul imposibil. Acestea corespund multimii totale considerate si respectiv multimii vide.

DEFINITIE Se spune ca evenimentul *A implica* evenimentul *B*, daca realizarea lui *A*, atrage dupa sine realizarea lui *B*. Notatia folosita este:

$$A \subset B$$

OBSERVATII a) Implicatia evenimentelor este echivalenta cu incluziunea multimilor. (vezi fig. nr. 1)

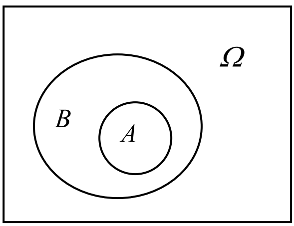


Fig. nr. 1

b) Orice eveniment aleator, precum si evenimentul imposibil, implica evenimentul sigur:

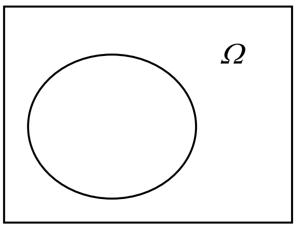


Fig. nr. 2

$$A \subset \Omega\ ,\ \Phi \subset \Omega\ .$$

DEFINITIE Se spune ca un eveniment este *contrar* evenimentului *A*, daca realizarea sa consta in nerealizarea lui *A*. Notatia folosita este $\overline{A}$.

OBSERVATII a) Evenimentul contrar evenimentului *A*, este echivalent cu complementara lui *A* din teoria multimilor . (vezi fig. nr. 2)

b) Evenimentele *A* si $\overline{A}$ sunt contrarii, adica, daca se realizeaza *A*, atunci nu se realizeaza $\overline{A}$ si reciproc.

DEFINITIE *Reuniunea* (sau *adunarea*) evenimentelor A si B este evenimentul *S* care consta in realizarea a cel putin unuia dintre evenimentele A sau B .

Notatia este :

$$S = A \cup B\ .$$

OBSERVATII a) Daca evenimentele sunt reprezentate prin cercurile A si B din fig. *3* si *4*, reuniunea lor este reprezentata prin interiorul hasurat al celor doua cercuri. Prin urmare, faptul ca un punct al evenimentului S se gaseste in regiunile hasurate constituie evenimentul $A \cup B$.

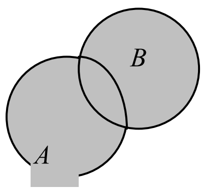


Fig. nr. 3

In cazul prezentat in fig. nr. *4* evenimentele A si B sunt incompatibile, deoarece realizarea evenimentului A exclude realizarea evenimentului B si invers, pe cand evenimentele din fig. nr. *3* sunt compatibile, caci alegerea unui punct comun celor doua cercuri atrage dupa sine realizarea atat a evenimentului A , cat si a evenimentului B .

b) Daca $A \subset B$, atunci $A \cup B = B$. Geometric, acest lucru inseamna ca cercul A este interior lui B .

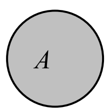
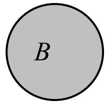


Fig. nr. 4

c) Oricare ar fi evenimentul A, au loc relatiile :



$$A \cup A = A ,$$
$$A \cup \Phi = A ,$$
$$A \cup \Omega = \Omega ,$$
$$\Omega \cup \Phi = \Omega .$$

DEFINITIE *Intersectia* (sau *produsul*) evenimentelor A si B este evenimentul *P* care consta in realizarea simultana a evenimentelor A si B.

Notatia este :

$$P = A \cap B .$$

OBSERVATIE Geometric, $A \cap B$ este reprezentat prin regiunea comuna celor doua cercuri prezentate in fig. nr. 3.

Prin introducerea notiunii reuniune si intersectie, unele notiuni din teoria probabilitatilor pot fi formulate in mod mai precis. Astfel, pentru evenimentele opuse se pot formula in acest moment urmatoarele **DEFINITII**:

I) evenimentele A si $\overline{A}$ se numesc opuse daca au loc relatiile:

$$A \cup \overline{A} = E \text{ si } A \cap \overline{A} = \Phi$$

II) Evenimentele A si B sunt incompatibile daca:

$$A \cap B = \Phi .$$

In caz contrar ($A \cap B \neq \Phi$), evenimentele se numesc compatibile.

APLICATII 1. Fie A si B doua evenimente din acelasi camp; sa se arate ca:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} ,$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} .$$

Aceste doua relatii reprezinta, in teoria multimilor, relatiile lui *De Morgan.* Interpretarea va fi in limbajul evenimentelor. Se considera mai intai prima relatie. $A \cup B$ este prin definitie evenimentul a carui realizare inseamna realizarea a cel putin unuia din evenimentele A sau B. Contrarul sau, $\overline{A \cup B}$ va fi evenimentul a carui realizare presupune nerealizarea atat a evenimentului A, cat si a evenimentului B. Dar nerealizarea evenimentului A inseamna realizarea evenimentului $\overline{A}$ si invers, nerealizarea evenimentului B inseamna realizarea evenimentului $\overline{B}$. Deci, daca $\overline{A \cup B}$ se realizeaza, atunci se realizeaza si evenimentul $\overline{A}$ si evenimentul $\overline{B}$, adica evenimentul $\overline{A} \cap \overline{B}$. Se ajunge la concluzia ca realizarea evenimentului $\overline{A \cup B}$ implica realizarea evenimentului $\overline{A} \cap \overline{B}$, ceea ce se scrie :

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad (1).$$

Invers, daca se realizeaza $\overline{A} \cap \overline{B}$ adica se realizeaza $\overline{A}$ si $\overline{B}$, atunci nu se realizeaza nici unul din evenimentele A, B, deci nu se realizeaza evenimentul $A \cup B$. Dar nerealizarea lui $A \cup B$ inseamna realizarea lui $\overline{A \cup B}$.

Rezulta ca realizarea evenimentului $\overline{A} \cap \overline{B}$ implica realizarea evenimentului $\overline{A \cup B}$, adica :

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}. \quad (2)$$

Din relatiile (1) si (2) rezulta:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} .$$

Se considera a doua relatie, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Evenimentul $A \cap B$ este evenimentul a carui realizare inseamna realizarea atat a lui A cat si a lui B.

Contrariul sau, $\overline{A \cap B}$ va fi deci evenimentul a carui realizare inseamna nerealizarea a cel putin unuia din evenimentele A, B. Aceasta inseamna ca daca $\overline{A \cap B}$ se realizeaza, atunci se realizeaza cel putin unul din evenimentele $\overline{A}$, $\overline{B}$, adica se realizeaza evenimentul $\overline{A} \cup \overline{B}$. Prin urmare:

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Invers, daca $\overline{A} \cup \overline{B}$ s-a realizat, atunci cel putin unul din evenimentele A, B nu s-a realizat, deci nu s-a realizat $A \cap B$; dar aceasta inseamna ca s-a realizat $\overline{A \cap B}$. Se poate scrie deci:

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B},$$

si rezulta ca:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

OBSERVATIE In general, se spune ca evenimentele A si B sunt egale (not. $A = B$) daca $A \subset B$ si $B \subset A$.

2. Sa se arate ca relatiile

$$A \subset B,$$
$$\overline{B} \subset \overline{A},$$
$$A \cup B = B,$$
$$A \cap B = A.$$

sunt echivalente.

Se va arata ca daca una din cele patru relatii este adevarata, atunci si celelalte trei sunt adevarate.

Fie $A \subset B$ este adevarata. Aceasta inseamna ca daca A se realizeaza, atunci se realizeaza si B.

Relatia $\overline{B} \subset \overline{A}$ arata ca daca nu s-a realizat B, atunci nu s-a realizat nici A, ceea ce este adevarat; daca nu ar fi asa, ar fi contrazisa relatia $A \subset B$.

Pentru a arata ca $A \cup B = B$ (daca $A \subset B$), este suficient sa se arate ca $A \cup B \subset B$ (3), deoarece relatia $B \subset A \cup B$ este evidenta, ea insemnand ca daca se realizeaza B, atunci se realizeaza unul din evenimentele A, B.

Pentru a demonstra relatia (3) trebuie aratat ca de cate ori se realizeaza $A \cup B$, se realizeaza si B.

Daca $A \cup B$ s-a realizat, atunci sau s-a realizat B (si relatia este demonstrata) sau s-a realizat A si atunci, conform ipotezei $A \subset B$, s-a realizat si B.

Pentru a arata ca $A \cap B = A$ (in aceeasi ipoteza $A \subset B$), se observa ca daca se realizeaza A, atunci conform ipotezei se realizeaza si B, deci se realizeaza $A \cap B$. Se poate scrie $A \subset A \cap B$.

Relatia $A \cap B \subset A$ este evidenta, ea insemnand ca daca se realizeaza A si B, atunci se realizeaza A (relatia $A \cap B \subset A$ este adevarata fara ipoteza $A \subset B$). Deci $A \cap B = A$.

Prin rationamente asemanatoare, se arata ca daca se va lua ca ipoteza alta din cele patru relatii din enunt, atunci prima relatie va rezulta drept o concluzie.

3. Relatiile :

$$A \cap B = \Phi,$$
$$A \subset \overline{B},$$
$$B \subset \overline{A},$$

sunt echivalente.

Se presupune ca $A \cap B = \Phi$, adica evenimentele A si B sunt incompatibile. Aceasta inseamna ca daca A se realizeaza, atunci B nu se realizeaza, deci se realizeaza $\overline{B}$, adica $A \subset \overline{B}$.

Invers, daca $A \subset \overline{B}$, atunci daca A se realizeaza, se realizeaza in mod sigur si $\overline{B}$, deci B nu se realizeaza. Aceasta insemna ca evenimentele A si B sunt incompatibile, adica $A \cap B = \Phi$.

Rezulta ca primele doua relatii din enunt sunt echivalente. Evidenta primei si a celei de-a treia relatii rezulta acum din simetria relatiei $A \cap B = \Phi$.

1.3 Definitia clasica a probabilitatii. Camp de evenimente. Axiomele lui Kolmogorov

La o societate comerciala oarecare s-a constatat ca in medie 2% din piesele produse de o masina automata sunt necorespunzatoare. Aceasta insemna ca la fiecare tura de produse nesortate, piesele rebut vor fi in proportie de aproximativ 2%. Daca turele sunt formate, de exemplu din 1000 de piese, la unele dintre ele numarul rebuturilor va fi sub 2% ($16,17,..$ piese), la altele peste 2% ($22,23,...$), dar, in medie, acest numar va fi apropiat de 20.

Se presupune ca procesul de fabricatie are loc in aceleasi conditii de productie. In acest caz, operatia de masa consta in fabricatia in serie a produselor, conducand la constituirea unei colectivitati omogene. Procentul unuia sau al altuia dintre evenimentele care intereseaza (produse necorespunzatoare) va fi - in conditii de productie identice - in general acelasi, abatandu-se de la o anumita valoare medie relativ stabila numai in cazuri rare. Se spune ca acesta *valoare medie* este indicele caracteristic al operatiei de masa sau, mai precis, al *fenomenului de masa*, intelegandu-se prin aceasta din urma notiune realizarea valorilor unei caracteristici studiate (numarul produselor rebut) cu aceeasi probabilitate, la orice proba.

Este foarte importanta cunoasterea acestui indice in diferitele domenii de activitate. El face posibila aprecierea fenomenelor de masa pana acum intamplatoare si chiar previziunea evolutiei lor viitoare, in masura in care conditiile initiale ale experientei raman aceleasi.

In exemplul de mai inainte, in care la 1000 de piese, produse de o masina automata, 20 de piese sunt in medie rebut, se spune ca probabilitatea de a produce rebuturi este, pentru masina data :

$$\frac{20}{1000} = 0,02 \text{ .}$$

Se va cauta a se lamuri, pe plan teoretic, ce se intelege prin probabilitatea unui eveniment intr-o operatie de masa data, retinand in acest scop ca unitatile elementare rezultate dintr-un proces de masa - unitati ale colectivitatii constituite - isi contopesc caracteristicile lor particulare intr-o *caracteristica a intregului ansamblu*, intr-o *legitate* generala care caracterizeaza nu un element anumit al colectivitatii studiate, ci un element *oarecare* al acesteia, legitate care se va denumi *legitate statistica*.

Daca intr-o operatie de masa care are loc in conditii identice, un eveniment A se produce in medie de m ori, adica la m din n unitati elementare ale colectivitatii studiate, probabilitatea evenimentului A este

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (1).$$

In aceasta relatie, n reprezinta numarul cazurilor egal posibile, pe cand m reprezinta numarul cazurilor favorabile; ea sintetizeaza definitia clasica a notiunii de probabilitate: *se numeste probabilitatea unui eveniment A si se noteaza cu* $P(A)$, *raportul dintre numarul* m *de rezultate favorabile producerii lui* A *si numarul total* n *de rezultate posibile ale experientei, in conditia ca toate rezultatele sa fie egal posibile.*

Pe baza acestei definitii se vede imediat ca probabilitatea de aparitie – la o singura aruncare – a uneia din fetele unui zar omogen si perfect construit este $\frac{1}{6}$, sau probabilitatea de aparitie a uneia din fetele monedei este $\frac{1}{2}$ etc.

Deoarece $m \le n$ rezulta ca probabilitatea oricarui eveniment intamplator A satisface dubla inegalitate :

$$0 \le P(A) \le 1 . \qquad (2)$$

Cu cat $P(A)$ este mai apropiat de 1, cu atat evenimentul A are loc mai des. Daca $P(A)=0$, evenimentul sau nu are loc niciodata, sau are loc foarte rar, asa ca practic il consideram imposibil. Daca $P(A)=1$, evenimentul are loc totdeauna, deci este un eveniment sigur.

Din definitia clasica a probabilitatii (1), rezulta urmatoarele:

PROPRIETATI

1. Probabilitatea evenimentului sigur este 1, intrucat in acest caz $m=n$;

2. Probabilitatea evenimentului imposibil este 0, intrucat in acest caz $m=0$;

3. Probabilitatea unui eveniment intamplator este cuprinsa intre 0 si 1, intrucat in acest caz $0<m<1$.

In afara de notiunea de probabilitate exista in teoria probabilitatilor o alta notiune fundamentala si anume notiunea de *frecventa relativa*. Prin *frecventa relativa* a evenimentului A se intelege raportul dintre numarul probelor m in care evenimentului A s-a produs si numarul total n de probe efectuate. Dintr-o indelungata observatie a fenomenelor si proceselor de masa s-a putut constata ca daca un experiment se repeta, in aceleasi conditii, de un numar suficient de mare de ori, atunci frecventa relativa capata o anumita *stabilitate*, osciland in jurul probabilitatii.

Tocmai de aceea, drept masura cantitativa de apreciere a posibilitatii obiective de a se produce evenimentul intamplator A poate fi luata frecventa relativa f_A, rezultata dupa un numar mare N de experiente, efectuate in aceleasi conditii.

Dupa cum se vede, notiunea de probabilitate a unui eveniment este legata (chiar la originea formarii ei) de o notiune experimentala, practica - frecventa evenimentului – *rezultand din legile obiective ale fenomenelor reale de masa.* Aceasta a condus la constatarea ca evenimentele corespunzatoare diferitelor probe experimentale formeaza o anumita structura, cu numeroase proprietati care pot fi formulate matematic. Matematicianul rus A. N. Kolmogorov a numit-o *camp de evenimente* si pe aceasta baza a formulat cunoscutele axiome privind teoria probabilitatilor.

SCHEMA LUI KOLMOGOROV

AXIOMA 1. *Unei experiente ii corespunde intotdeauna un camp de evenimente.*

Obiectele de baza folosite in axiomatizarea teoriei probabilitatilor sunt evenimentele si probabilitatile respective. Experienta conduce la constatarea ca evenimentele corespunzatoare diferitelor experiente poseda unele proprietati ce pot fi formulate matematic.

EXEMPLU Se considera experienta clasica a arucarii unui zar. Aparitia celor sase fete conduce la evenimentele :

$$(1),(2),\ldots,(6).$$

In mod analog, aparitia uneia din doua fete ne conduce la evenimentele :

$$(1,2),(1,3),\ldots,(5,6).$$

Aparitia uneia din trei fete da nastere evenimentelor :

$$(1,2,3),(1,2,4),\ldots,(4,5,6).$$

Aparitia uneia din patru fete va da evenimentele :

$$(1,2,3,4),(1,2,3,5),\ldots .$$

Aparitia uneia din cinci fete va conduce la evenimente de forma :

$$(1,2,3,4,5),(1,2,3,4,6),\ldots$$

In total vor fi:

$$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 = 62$$

evenimente.

Adaugand la aceasta *evenimentul sigur*, care consta in faptul ca la o aruncare cu zarul va aparea in mod sigur una din cele sase fete, precum si *evenimentul imposibil*, constand din faptul imposibil ca la aruncarea cu zarul sa nu iasa nici una din fete, se obtin in total 64 evenimente, care formeaza campul de evenimente generat de experienta aruncarii unui zar.

Evenimentele $(1),(2),...,(6)$ rezultate direct din experienta, vor fi numite evenimente elementare.

Prin urmare, sunt:

$$1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + 1 = 2^6$$

evenimente elementare. In general numarul evenimentelor unui camp finit este egal cu 2 la o putere egala cu numarul evenimentelor elementare.

Astfel, daca se considera un lot de 25 de piese de acelasi fel si se extrage la intamplare o pereche de piese, numarul evenimentelor campului generat de aceasta experienta va fi egal cu 2^{25}.

Revenind la exemplul cu zarul, se observa ca evenimentul $(1,2)$ consta fie in aparitia fetei 1, fie din aparitia fetei 2. Se spune ca evenimentul $(1,2)$ este reuniunea (adunarea) evenimentelor (1) si (2), adica :

$$(1) \cup (2) = (1,2).$$

In mod analog, realizarea simultana a evenimentelor $(1,2,3)$ si $(1,3)$ este evenimentul $(1,3)$. Se spune ca evenimentul $(1,3)$ este intersectia (produsul) evenimentelor $(1,2,3)$ si $(1,3)$, adica :

$$(1,2,3) \cap (1,3) = (1,3).$$

Daca evenimentele intersectate se exclud reciproc, se obtine evenimentul imposibil, notat cu Φ. De exemplu :

$$(1,2) \cap (5,6) = \Phi .$$

Din cele aratate pana acum rezulta ca orice eveniment al campului care nu este elementar, sau evenimentul nul, este o reuniune de evenimente elementare.

In particular, reuniunea (adunarea) tuturor evenimentelor elementare conduce la evenimentul sigur, care va fi notat cu Ω.

Se considera evenimentul (1). Evenimentul $(2,3,4,5,6)$ se bucura de proprietatile:

$$(1)\cup(2,3,4,5,6)=\Omega \;;$$
$$(1)\cap(2,3,4,5,6)=\Phi \,.$$

Evenimentul (1) este complementul evenimentului $(2,3,4,5,6)$.

In general, un camp de evenimente este caracterizat prin urmatoarele proprietati : daca notam cu A_k, $1\le k\le h$, evenimente ale campului, $\bigcup_{k=1}^{h}A_k$, $\bigcap_{k=1}^{h}A_k$ sunt de asemenea evenimente ; notand prin $\overline{A_k}$ complementul lui A_k, $\overline{A_k}$ este de asemenea un eveniment. Evenimentul sigur Ω si evenimentul imposibil Φ apartin de asemenea campului.

Pentru un camp infinit trebuie sa se admita ca si $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ sunt evenimente.

AXIOMA 2. *Fiecarui eveniment A al campului ii corespunde un numar real, nenegativ,* $P(A)$, *numit probabilitatea lui.*

Folosind legatura dintre frecventa relativa si probabilitate, se deduce ca probabilitatea, care este raportul dintre numarul m de cate ori se verifica A in n experiente si numarul n de experiente, satisface inegalitatile

$$0 \leq \frac{m}{n} \leq 1 .$$

AXIOMA 3. *Probabilitatea evenimentului sigur este egala cu* 1 *.*

AXIOMA 4. *Probabilitatea reuniunii a doua evenimente incompatibile intre ele este egala cu suma probabilitatilor evenimentelor.*

Dupa cum se stie evenimentele incompatibile sunt acelea care se exclud reciproc. Conform definitiei, se poate scrie $A \cap B = \Phi$. Astfel, a patra axioma se poate scrie :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ unde } A \cap B = \Phi .$$

1.4 Teoreme si reguli fundamentale ale teoriei probabilitatilor

1.4.1 REGULA ADUNARII PROBABILITATILOR EVENIMENTELOR INCOMPATIBILE

Se considera evenimentele A_1 , A_2 , …, A_n apartinand unui acelasi camp Ω , incompatibile doua cate doua, adica: $A_i \cap A_j = \varnothing$, $(\forall) i \neq j$, $i, j \in \{1,2,...,n\}$. Atunci :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ...P(A_n)$$

Demonstratia este imediata, prin inductie matematica dupa $n \in \mathbf{N}$ (numarul de evenimente considerat), folosind regula de adunare a probabilitatii evenimentelor incompatibile data de cea de a treia axioma, si anume : $P(A \cup B) = P(A) + P(A)$, unde $A \cap B = \varnothing$.

REMARCA *Pentru demonstratie se puteau considera urmatoarele ipoteze : evenimentul* A_1 *se poate realiza in* m_1 *cazuri, evenimentul* A_2 *se poate realiza in* m_2 *cazuri,…,* *evenimentul A_n se poate realiza in m_n cazuri, iar evenimentul sigur Ω se poate realiza in s cazuri.*

Atunci : $P(A_1)=\dfrac{m_1}{s}$, $P(A_2)=\dfrac{m_2}{s}$, …, $P(A_n)=\dfrac{m_n}{s}$.

Incompatibilitatea evenimentelor A_1, A_2, …, A_n, revine la separarea completa a cazurilor m_1, m_2, …, m_n, adica, numarul de cazuri in care se realizeaza evenimentul $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ este: $m_1 +$ $m_2 +$ $… + m_n$. Prin urmare :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{s}$$

si

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ...P(A_n).$$

1.4.2 PROBABILITATEA EVENIMENTELOR CONTRARE

Conform definitiei, doua evenimente A si $\overline{A}$ sunt contrare sau complementare, daca:

$$A \cup \overline{A} = E \text{ si } A \cap \overline{A} = \Phi .$$

Aceste relatii arata ca evenimentele sunt incompatibile si ca in fiecare proba se realizeaza unul dintre ele. +tiind ca evenimentul A se realizeaza de m ori in n operatii individuale, iar $\overline{A}$ de $n - m$ ori, probabilitatile acestor evenimente sunt :

$$P(A) = \frac{m}{n},\ P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

Efectuand suma probabilitatilor acestor evenimente, se obtine:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 .$$

adica suma probabilitatilor a doua evenimente opuse este egala cu 1.

1.4.3 SISTEM COMPLET DE EVENIMENTE

Sa consideram un numar oarecare de s evenimente incompatibile, in asa fel incat in fiecare operatie individuala sa se produca neaparat unul din ele si numai unul. Un astfel de sistem de evenimente se numeste sistem complet de evenimente. Din definitia data rezulta:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s = E \,,$$
$$A_i \cap A_j = \Phi \,, \; (\forall) \; i, j \in \{1,2,\ldots,s\}$$

cu probabilitatea:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) = P(E)$$

sau

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_s) = 1 \,,$$

adica suma probabilitatilor unor evenimente care formeaza un sistem complet de evenimente este egala cu 1.

Evenimentele opuse, fiind incompatibile si in fiecare operatie de masa producandu-se unul dintre ele, acestea formeaza un sistem complet.

1.4.4 EVENIMENTE INDEPENDENTE SI DEPENDENTE

Doua sau mai multe evenimente se numesc independente daca probabilitatea efectuarii unuia dintre ele nu este influentata de faptul ca celelalte evenimente s-au produs sau nu.

EXEMPLE a) Daca dintr-un lot continand atat piese standard cat si piese rebut se extrage cate o piesa care revine la lot dupa

fiecare extractie, evenimentele care constau in extragerea unei piese standard la fiecare extractie sunt independente.
b) Daca se arunca o moneda de doua ori, probabilitatea aparitiei stemei (evenimentul A) in a doua aruncare nu depinde de faptul ca in prima aruncare s-a produs sau nu aparitia valorii (evenimentul B).

Doua sau mai multe evenimente se numesc *dependente* daca probabilitatea unuia dintre ele este influentata de evenimentele anterioare (depunde de faptul ca evenimentele anterioare s-au produs sau nu).

EXEMPLU Intr-o urna se gasesc a bile albe si b bile negre. Se noteaza cu A evenimentul de a extrage o bila alba si cu B evenimentul constand in extragerea unei bile negre dupa ce a fost extrasa o bila (care nu se reintroduce in urna inaintea celei de-a doua extrageri). Se fac, deci doua extrageri succesive. Daca prima bila extrasa a fost alba, adica s-a produs evenimentul A, atunci in urna au ramas b bile negre si probabilitatea evenimentultui B este $\frac{b}{a+b-1}$; daca prima bila extrasa a fost neagra, realizandu-se evenimentul $\overline{A}$, atunci in urna au ramas $b-1$ bile negre si probabilitatea evenimentului B este $\frac{b-1}{a+b-1}$. Se observa ca probabilitatea evenimentului B depinde de faptul ca evenimentul A s-a produs sau nu.

EXEMPLU Sa se calculeze probabilitatea ca un aparat cu o vechime de x ani sa nu mai functioneze dupa o perioada cuprinsa intre $x+m$ si $x+n$ ani ($n>m$). In acest caz apar evenimentele A si B. Evenimentul A se realizeaza atunci cand aparatul cu o vechime de x ani functioneaza dupa $x+m$ ani, iar evenimentul B atunci cand aparatul isi inceteaza functionarea in perioada $(x+m, x+n)$. Se vede din acest exemplu ca evenimentul B este dependent (conditionat) de evenimentul A, deoarece pentru ca aparatul cu o vechime de

x ani sa isi inceteze functionarea intre $x+m$ si $x+n$ ani trebuie mai intai sa functioneze dupa $x+m$ ani.

1.4.5 TEOREMA INMULTIRII EVENIMENTELOR INDEPENDENTE SI DEPENDENTE

Fie A_1 si A_2 doua evenimente dependente. Se va determina in continuare probabilitatea producerii simultane a acestor evenimente, adica $P(A_1 \cap A_2)$.

Intr-o operatie de masa se pot intampla urmatoarele :

1) se produce evenimentul $A_1 \cap A_2$ in m_1 cazuri favorabile ;
2) se produce evenimentul $A_1 \cap \overline{A}_2$ in m_2 cazuri favorabile ;
3) se produce evenimentul $\overline{A}_1 \cap A_2$ in m_3 cazuri favorabile ;
4) se produce evenimentul $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$ in m_4 cazuri favorabile.

In total sunt $n = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ cazuri posibile. Rezulta ca :

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{m_1}{n} . \qquad (1)$$

Probabilitatea evenimentului A_1 se stabileste astfel: Numarul cazurilor favorabile realizarii evenimentului A_1 este $m_1 + m_2$, deci :

$$P(A_1) = \frac{m_1 + m_2}{n} . \qquad (2)$$

Evenimentele A_1 si A_2 fiind dependente, insemna ca probabilitatea lui A_2 va fi influentata de realizarea lui A_1, deci se va calcula $P_{A_1}(A_2)$, relatie care se citeste ,,probabilitatea lui A_2 conditionata de A_1'' sau ,, probabilitatea lui A_2 dupa ce s-a realizat A_1'' . Cazurile favorabile realizarii evenimentului A_2, dupa ce s-a produs A_1, sunt in numar de m_1, iar cazurile posibile $m_1 + m_2$. Deci :

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Inmultind relatiile (2) si (3), membru cu membru, se obtine :

$$P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{n},$$

adica rezultatul de la (1).

Deci,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2), \qquad (4)$$

relatie care constituie regula de inmultire a probabilitatilor a doua evenimente dependente.

Din (4) se obtine :

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}. \qquad (5)$$

In mod analog, probabilitatea evenimentului A_1 conditionata de A_2 este :

$$P_{A_2}(A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}. \qquad (6)$$

Relatiile (5) si (6) arata ca probabilitatea unui eveniment, conditionata de realizarea unui alt eveniment, este egala cu raportul dintre probabilitatea intersectiei (producerii simultane) a celor doua evenimente si probabilitatea evenimentului ce conditioneaza.

APLICATIE Dintr-un lot de 40 de becuri sosit la un magazin, dintre care 37 corespund standardului si 3 nu corespund, un cumparator cumpara doua bucati. Sa se calculeze probabilitatea ca aceste doua becuri sa fie corespunzatoare.

Fie A_1 evenimentul ca primul bec sa fie corespunzator si A_2 ca al doilea bec sa fie corespunzator. Probabilitatea evenimentului A_1 este $P(A_1)=\frac{37}{40}$. Cand becul al doilea a fost luat dupa ce in prima extragere am obtinut un bec standard, n-au mai ramas decat 39 de becuri, dintre care 36 standard si 3 rebut. Probabilitatea evenimentului A_2 conditionata de A_1 va fi:

$$P_{A_1}(A_2)=\frac{36}{39}.$$

Deci probabilitatea ce amandoua becurile sa fie corespunzatoare este :

$$P(A_1 \cap A_2)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)=\frac{37}{40}\cdot\frac{36}{39}\approx 0{,}85 .$$

In general fie evenimentele $A_1, A_2, ..., A_k$. Probabilitatea producerii simultane se calculeaza pe baza formulei

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cap A_2}(A_3)... \\ ...P_{A_1\cap A_2\cap...\cap A_{k-1}}(A_k). \qquad (7)$$

Demonstrarea acestei relatii se face prin metoda inductiei matematice.

DEFINITIE Daca $P(A_1 \cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$, se va spune, ca evenimentele A si B sunt *independente* intre ele.

Se vede ca doua evenimente sunt independente daca probabilitatea unuia dintre ele nu depinde de faptul ca celalalt eveniment s-a produs sau nu. Daca, de pilda, se arunca o moneda de doua ori este clar ca probabilitatea aparitiei stemei (evenimentul A) in prima aruncare nu depinde de faptul ca in a doua aruncare are sau nu loc evenimentul B (aparitia valorii) ; si invers, probabilitatea lui B nu depinde de faptul ca s-a produs sau nu evenimentul A. Un alt exemplu de evenimente independente il gasim in cazul unei urne cu bile de doua culori, din care se fac extrageri in urmatoarele conditii : in urna se gasesc 6 bile albe si 4 negre. Daca A este evenimentul care consta in extragerea unei bile albe, atunci :

$$P(A)=\frac{6}{10}.$$

Dupa extragere, bila se reintroduce in urna si se face o noua extragere. Fie B evenimentul ca sa fie extrasa o bila neagra in aceasta a doua extragere. Atunci $P(B)=\frac{4}{10}$, probabilitate care nu depinde de faptul ca evenimentul A s-a produs sau nu.

Se considera, prin urmare, relatia :

$$P(A_1 \cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2).$$

Facand inlocuirea corespunzatoare in relatiile (5) si (6) se obtine:

$$P_{A_1}(A_2)=\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}=\frac{P(A_1)\cdot P(A_2)}{P(A_1)}=P(A_2),$$
$$P_{A_2}(A_1)=\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)\cdot P(A_2)}{P(A_2)}=P(A_1).$$

Egalitatile

$$P_{A_1}(A_2)=P(A_2) \text{ si } P_{A_2}(A_1)=P(A_1)$$

arata ca a conditiona pe A_2 de A_1 si pe A_1 de A_2 nu influenteaza probabilitatile $P(A_1)$ si $P(A_2)$. Evenimentele A si B sunt independente.

In acest caz, formula (7) devine

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k) \ldots . \qquad (8)$$

Prin urmare, *probabilitatea producerii simultane a unui numar oarecare de evenimente independente este egala cu produsul probabilitatilor acestor evenimente.*

APLICATIE Doua masini produc aceeasi piesa. Probabilitatile ca piesa sa fie corespunzatoare sunt de $0,96$, respectiv de $0,93$. Se ia pentru incercare cate o piesa de la fiecare masina si se cere sa se calculeze probabilitatea ca ambele piese sa fie corespunzatoare. Acestea fiind independente, rezulta:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,96 \cdot 0,93 = 0,8928 .$$

Este important sa se precizeze ca cele aratate mai inainte nu pot fi extinse la un numar oarecare de evenimente, fara a defini in prealabil ce se intelege prin *evenimente independente in totalitatea lor*. Mai multe evenimente se numesc evenimente independente in totalitatea lor daca fiecare dintre ele si orice intersectie a celorlalte (continand fie pe toate, fie o parte a lor) sunt evenimente independente. Astfel, evenimentele A , B si C sunt independente in totalitatea lor daca sunt independente evenimentele: A si B , A si C , B si C , A si $B \cap C$,
B si $A \cap C$, C si $A \cap B$. Se poate vedea ca independenta in totalitate nu poate fi asigurata de independenta evenimentelor luate doua cate doua.

1.4.6 TEOREMA ADUNARII PROBABILITATILOR EVENIMENTELOR COMPATIBILE

Fie A_1 si A_2 doua evenimente compatibile. Sa se calculeze $P(A_1 \cup A_2)$. Evenimentele fiind compatibile, evenimentul $A_1 \cup A_2$ se poate realiza in urmatoarele moduri:

1. $A_1 \cap \overline{A}_2$, se realizeaza A_1 impreuna cu opusul A_2 ;

2. $\overline{A}_1 \cap A_2$, nu se realizeaza A_1, dar se realizeaza A_2;

3. $A_1 \cap A_2$, se realizeaza simultan A_1 si A_2.

Rezulta:

$$A_1 \cup A_2 = \left(A_1 \cap \overline{A}_2\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_1 \cap A_2\right).$$

Deoarece evenimentele intersectiei sunt incompatibile doua cate doua, se poate scrie :

$$P\left(A_1 \cup A_2\right) = P\left(A_1 \cap \overline{A}_2\right) + P\left(\overline{A}_1 \cap A_2\right) + P\left(A_1 \cap A_2\right). \qquad (1)$$

Se vor calcula probabilitatile evenimentelor A_1 si A_2:

$$P\left(A_1\right) = P\left(A_1 \cap \overline{A}_2\right) + P\left(A_1 \cap A_2\right), \qquad (2)$$
$$P\left(A_2\right) = P\left(\overline{A}_1 \cap A_2\right) + P\left(A_1 \cap A_2\right). \qquad (3)$$

Insumand ultimele doua relatii si tinand seama de (1), se obtine:

$$P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) = P\left(A_1 \cap \overline{A}_2\right) + P\left(A_1 \cap A_2\right) + P\left(\overline{A}_1 \cap A_2\right) + P\left(A_1 \cap A_2\right)$$

de unde rezulta :

$$P\left(A_1 \cup A_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) - P\left(A_1 \cap A_2\right). \qquad (4)$$

Pentru trei evenimente A_1, A_2 si A_3 aceasta relatie devine :

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + P\left(A_3\right) - P\left(A_1 \cap A_2\right) -$$
$$P\left(A_1 \cap A_3\right) - P\left(A_2 \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right). \qquad (5)$$

In general, pentru s evenimente are loc :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{s} A_k\right) = \sum_{k=1}^{s} P\left(A_k\right) - \sum_{\substack{k,h \\ k \neq h}} P\left(A_k \cap A_h\right) + \ldots + (-1)^{s-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{s} A_k\right) \qquad (6)$$

Cu aceasta formula, numita *formula lui Poincare*, se calculeaza probabilitatea ca cel putin unul din cele s evenimente compatibile si in numar finit A_1, $A_2, \ldots, A_s$ sa se realizeze.

APLICATIE Un muncitor deserveste trei masini. Probabilitatile ca in decursul unui schimb masinile sa nu se defecteze sunt : pentru prima masina de $0,90$, pentru a doua masina de $0,94$ si pentru a treia masina de $0,86$. Sa se calculeze probabilitatea ca cel putin una din masini sa lucreze fara defectiuni in decursul unui schimb.

Aceasta probabilitate este :

$$\begin{gathered} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \\ - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_3) - \\ - P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \\ = 0,90 + 0,94 + 0,86 - 0,90 \cdot 0,94 - 0,90 \cdot 0,86 - \\ - 0,94 \cdot 0,86 + 0,90 \cdot 0,94 \cdot 0,86 = 0,99916 . \end{gathered}$$

1.4.7 FORMULA PROBABILITATII TOTALE

Se presupune ca o operatie data conduce la rezultatele A_1, A_2, …, A_s, care formeaza un sistem complet de evenimente. Fie un eveniment X care nu se poate realiza singur, ci impreuna cu unul din evenimentele A_1, $A_2, \ldots,$ A_s. Deci :

$$X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup \ldots \cup (A_s \cap X).$$

Deoarece evenimentele $(A_1 \cap X), (A_2 \cap X), \ldots, (A_s \cap X)$ sunt incompatibile doua cate doua, rezulta :

$$P(X) = P(A_1 \cap X) + P(A_2 \cap X) + \ldots + P(A_s \cap X)$$

sau

$$P(X)=P(A_1)P_{A_1}(X)+P(A_2)P_{A_2}(X)+\ldots+P(A_s)P_{A_s}(X), \qquad (1)$$

rezultat care constituie *formula probabilitatii totale* exprimand urmatoarea :

TEOREMA *Probabilitatea evenimentului X care poate sa se produca conditionat de unul din evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_s$ si care formeaza un sistem complet de evenimente, este egala cu suma produselor dintre probabilitatile acestor evenimente si probabilitatile conditionate corespunzatoare ale evenimentului X.*

Teorema se demonstreaza foarte simplu. In conditiile teoremei, producerea evenimentului X revine la producerea unuia din urmatoarele evenimente incompatibile $(A_1 \cap X),(A_2 \cap X),\ldots,(A_s \cap X)$
adica :

$$X=(A_1 \cap X)\cup(A_2 \cap X)\cup\ldots\cup(A_s \cap X).$$

Aplicand o consecinta a teoremei de adunare a probabilitatilor evenimentelor incompatibile, se obtine :

$$P(X)=P(A_1 \cap X)+P(A_2 \cap X)+\ldots+P(A_s \cap X).$$

Insa, dupa regula inmultirii probabilitatilor dependente, atunci :

$$P(A_1 \cap X)=P(A_1)P_{A_1}(X),\ P(A_2 \cap X)=P(A_2)P_{A_2}(X),\ldots$$
$$\ldots, P(A_s \cap X)=P(A_s)P_{A_s}(X).$$

Prin urmare,

$$P(X)=P(A_1)P_{A_1}(X)+P(A_2)P_{A_2}(X)+\ldots+P(A_s)P_{A_s}(X).$$

APLICATIE In magazia unei uzine se gasesc piese de acelasi fel provenite de la cele trei sectii ale uzinei. Se stie ca prima sectie produce 25% din totalul pieselor, a doua 35% si a treia 40% si ca rebuturile sunt de 2%, 3% si 1% pentru fiecare sectie. Sa se calculeze probabilitatea ca luand o piesa la intamplare din magazie, aceasta sa fie necorespunzatoare.

Fie A_1, A_2, A_3 evenimentele ca piesa sa apartina uneia din cele trei sectii si fie X evenimentul ca piesa sa fie necorespunzatoare. Piesa necorespunzatoare putand proveni numai de la una din cele trei sectii, insemna ca evenimentul X nu se poate realiza singur ci impreuna sau cu A_1, sau cu A_2, sau cu A_3; adica au loc intersectiile $(A_1 \cap X)$, $(A_2 \cap X)$, $(A_3 \cap X)$.

Probabilitatile evenimentelor A_1, A_2, A_3 si a evenimentului X conditionat de realizarea evenimentelor A_1, A_2, A_3 sunt :

$$P(A_1)=\frac{25}{100},\ P(A_2)=\frac{35}{100},\ P(A_3)=\frac{40}{100},$$
$$P_{A_1}(X)=\frac{2}{100},\ P_{A_2}(X)=\frac{3}{100},\ P_{A_3}(X)=\frac{1}{100}.$$

Deci,

$$P(X)=P(A_1)P_{A_1}(X)+P(A_2)P_{A_2}(X)+\dots+P(A_s)P_{A_s}(X)=$$
$$=\frac{25}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{100}=\frac{195}{10000}=0{,}0195 .$$

Se vede de aici ca la fiecare 10000 de piese, in medie 195 sunt necorespunzatoare.

1.4.7 REGULA LUI BAYES

Folosind aceasta regula se rezolva problemele cuprinse in urmatoarea schema generala: se considera un sistem complet de evenimente A_1, A_2,…, A_s care reprezinta cauzele producerii unui eveniment necunoscut X (acest eveniment poate sa se produca conditionat de unul din evenimentele A_1, A_2,…, A_s).

Se cunosc probabilitatile :

$$P(A_1), P(A_2), P(A_3), \dots$$
$$P_{A_1}(X)\ P_{A_2}(X)\ P_{A_3}(X), \dots$$

Aceste probabilitati care se pot calcula inaintea efectuarii vreunei probe se numesc probabilitati apriorice.

In urma efectuarii probei se produce evenimentul X si trebuie determinate probabilitatile :

$$P_X(A_1), P_X(A_2), \dots, P_X(A_s).$$

Aceste probabilitati calculate dupa efectuarea probei se numesc probabilitati aposteriori. Fie evenimentul compus :

$X \cap A_i$, *i* fixat,

a carui probabilitate este :

$$P(X \cap A_i) = P(X) \cdot P_X(A_i) = P(A_i) \cdot P_{A_i}(X).$$

Din ultima egalitatate rezulta :

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(X)}{P(X)}.$$

La numitor $P(X)$ poate fi exprimata prin formula probabilitatii totale, deci :

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(X)}{P(A_1) \cdot P_{A_1}(X) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(X) + \dots + P(A_s) \cdot P_{A_s}(X)},$$

relatie ce reprezinta *formula lui Bayes*.

APLICATII 1. Sa se calculeze probabilitatea ca piesa obtinuta (vezi problema precedenta) si care nu corespunde conditiilor standard sa provina de la sectia intai.

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)\cdot P_{A_i}(X)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(X) + P(A_2)\cdot P_{A_2}(X) + \ldots + P(A_s)\cdot P_{A_s}(X)} =$$

$$= \frac{\frac{25}{100}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{25}{100}\cdot\frac{2}{100} + \frac{35}{100}\cdot\frac{3}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{1}{100}} = 0{,}256 .$$

2. Un magazin se aprovizioneaza zilnic de la trei depozite diferite D_1, D_2, D_3, cu aceleasi cantitati globale de marfa, insa in proportii diferite in raport cu cele doua calitati ale ei. Situatia se vede din tabelul alaturat.

Daca un cumparator cumpara la intamplare o unitate din marfa in cauza si se constata ca ea este de calitatea a doua se pune intrebarea care este probabilitatea aposteriori ca unitatea de marfa cumparata sa fie de la depozitul D_3. Se considera evenimentele :

- evenimentul A_s, cumpararea unei unitati de marfa provenind de la depozitul s ($s = 1,2,3$) ;
- evenimentul X, cumpararea unei marfi de calitatea a doua.

Evenimentul X are loc in una din urmatoarele situatii :

$$(A_1 \cap X);\ (A_2 \cap X);\ (A_s \cap X).$$

Prin urmare se poate scrie :

$$X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup (A_s \cap X).$$

Cum evenimentele A_1, A_2, A_3 formeaza un sistem complet de evenimente, intrucat :

$$A_1 \cap A_2 = \Phi,\ A_1 \cap A_3 = \Phi,\ A_2 \cap A_3 = \Phi,$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$$

Intrebarea problemei inseamna de fapt calculul probabilitatii conditionate $P_X(A_3)$. Aplicand formula lui Bayes, se obtine :

$$P_X(A_3)=\frac{P(A_3)\cdot P_{A_3}(X)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(X)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(X)+P(A_3)\cdot P_{A_3}(X)}.$$

Avand in vedere ca :

$$P(A_i)=\frac{1}{3},\ i=1,2,3,\ P_{A_1}(X)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ P_{A_2}(X)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$
$$P_{A_3}(X)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},$$

prin aplicarea formulei lui Bayes, se obtine:

$$P_X(A_3)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}}=\frac{8}{19}\cong 0,421$$

1.4.8 SCHEME DE PROBABILITATE

1. ***Schema binomiala*** (***Bernoulli***)

Acesta schema corespunde modelelor in care fenomenele se repeta in conditii identice.

Se considera o urna care contine bile de doua culori: albe si negre. Numarul acestora este cunoscut, aceasta insemnand ca daca din urna se extrage o bila se cunoaste probabilitatea p ca aceasta sa fie alba, precum si probabilitatea q ca aceasta sa fie neagra. Evident, $p+q=1$.

Din aceasta urna se extrage cate o bila, aceasta revenind in urna dupa fiecare extragere.

Din urna se fac n extrageri; dupa fiecare extragere, bila revenind in urna, atrage dupa sine nemodificarea probabilitatii de a obtine o bila alba sau una neagra.

Fie A evenimentul care consta in extragerea unei bile albe si B evenimentul extragerii unei bile negre. Se considera ca la o experienta in care au fost extrase n bile, se obtine un eveniment de forma :

$$AABA\ldots BA$$

unde k dintre acestea sunt A, iar $n-k$ sunt B.

Evenimentele din sirul de mai sus sunt independente, probabilitatea lui, folosind regula de inmultire a probabilitatilor, $p(A)=p$, $p(B)=q$, fiind :

$$p^k \cdot q^{n-k}.$$

Insa, obtinerea in extragerea a n bile, k bile albe si $n-k$ negre, se poate realiza in C_n^k moduri.

Prin urmare, probabilitatea ca in n probe sa se obtina de k ori o bila alba si de $n-k$ ori o bila neagra este

$$P_n(k)=C_n^k p^k \cdot q^{n-k}.$$

Deoarece acest termen este unul din termenii dezvoltarii binomului $(p+q)^n$, aceasta schema se mai numeste si *schema binomiala*.

2. ***Schema urnei lui Bernoulli cu mai multe stari***

In situatia in care urna contine bile de mai multe culori, problema determinarii probabilitatii evenimentului, care consta in obtinerea unei anumite combinatii de bile de diferite culori, se rezolva similar. Astfel, daca urna contine a_1 bile de culoarea 1, a_2 bile de culoarea $2,\ldots,$ a_k bile de culoarea k, atunci probabilitatea ca in n extrageri sa se obtina α_1 bile de culoarea 1, α_2 bile de culoarea $2,\ldots,\alpha_k$ bile de culoarea k este :

$$p_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)=\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k},$$

unde $p_1 + \ldots + p_k = 1$ si $\alpha_1 + \ldots \alpha_k = n$.

Deoarece $p_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ reprezinta unul din termenii dezvoltarii unui polinom la puterea n, aceasta schema se mai numeste si schema polinomiala.

3. *Schema bilei nerepetate*

Dintr-o urna care contine a bile albe si b bile negre se fac n extrageri succesive, fara ca bila sa revina in urna. Problema este de a determina probabilitatea ca din cele n bile extrase extrase α sa fie albe si β negre.

Numarul total al cazurilor posibile se determina formand cu cele $a+b$ bile toate combinarile posibile de cate n, adica C_{a+b}^{n}.

Pentru a determina numarul cazurilor favorabile, se asociaza fiecare grupa cu α bile albe din cele a (in total C_a^{α}) cu fiecare grupa de b bile negre (C_b^{β}) si se obtin $C_a^{\alpha} \cdot C_b^{\beta}$. Deci probabilitatea cautata este:

$$\frac{C_a^{\alpha} \cdot C_b^{\beta}}{C_{a+b}^{n}} \quad (n = a + b).$$

In general, cand in urna se gasesc a_1 bile de culoarea 1, a_2 bile de culoarea 2,…, a_s bile de culoarea s si se extrag n bile, fara intoarcerea bilei in urna, atunci probabilitatea ca α_1 bile dintre acestea sa fie de culoarea 1, α_2 bile sa fie de culoarea 2, …, α_s bile de culoarea s, este:

$$\frac{C_{a_1}^{\alpha_1} \cdot C_{a_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot C_{a_s}^{\alpha_s}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_s}^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s}}.$$

4. *Schema lui Poisson*

Se dau urnele $U_1,U_2,...,U_n$, fiecare continand bile albe si bile negre in proportii cunoscute. Daca $p_1,p_2,...,p_n$ sunt probabilitatile extragerii unei bile albe din $U_1,U_2,...,U_n$, care este probabilitatea ca luand o bila din fiecare urna, sa obtinem k bile albe si $n-k$ bile negre?

Fie A_i evenimentul extragerii unei bile albe din urna U_i $(i=1,2,...,n)$ si $\overline{A_i}$ evenimentul extragerii unei bile negre din aceeasi urna.

$$P(A_i)=p_i \;;\; P(\overline{A_i})=q_i=1-p_i,\; i=1,2,...,n.$$

Fie A evenimentul care consta in extragerea a k bile albe si $n-k$ bile negre, cand se extrage cate o bila din fiecare urna.

Prin urmare, A este reuniunea evenimentelor de forma :

$$A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_k}\cap\overline{A}_{i_{k+1}}\cap\overline{A}_{i_{k+2}}\cap...\cap\overline{A}_{i_n},$$

unde indicii i_s, $1\le s\le n$ iau valorile $1,2,...,n$ si sunt diferiti doi cate doi, adica reprezinta o permutare a numerelor $1,2,...,n$.

Probabilitatea evenimentului de mai sus este :

$$p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot p_{i_k}\cdot q_{i_{k+1}}\cdot q_{i_{k+2}}\cdot...\cdot q_{i_n},$$

iar probabilitatea lui A este suma produselor de aceasta forma. Astfel, in fiecare produs, litera p apare de k ori, iar litera q de $n-k$ ori. Considerand produsul :

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)...(p_nx+q_n),$$

atunci probabilitatea evenimentului A este coeficientul lui x^k.

1.4.9 INEGALITATEA LUI BOOLE

Fie *I* o multime arbitrara de indici. Atunci are loc urmatoarea inegalitate (*inegalitatea lui Boole*):

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \geq \sum_{i\in I} P(A_i) - (n-1).$$

Inegalitatea se mai poate scrie si in forma :

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i\in I} P\left(\overline{A_i}\right)$$

Intr-adevar, avand in vedere ca :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}} \;,$$

rezulta:

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}\right) \geq 1 - \sum_{i\in I} P\left(\overline{A_i}\right) = \sum_{i\in I} P(A_i) - (n-1)$$

EXEMPLU Intr-o grupa de studenti, 75% cunosc limba franceza, 90% cunosc limba engleza si 82% cunosc limba germana. Care este probabilitatea ca un student ales la intamplare sa cunoasca toate limbile ?

Considerand A_1, A_2, A_3 evenimentele ca un student sa cunoasca libile franceza, engleza si respectiv germana atunci evenimentul cerut ca un student ales la intamplare sa cunoasca toate limbile este $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Atunci:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - (3-1)$$

adica:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \geq 0{,}47$$

CAPITOLUL 2

VARIABILE ALEATOARE

2.1 Definitia variabilei aleatoare

Majoritatea experimentelor de interes practic au ca rezultate valori numerice. Aceasta inseamna ca rezultatul unei probe al unui experiment, poate fi caracterizat de un numar sau de un cuplu de numere. Se poate, astfel considera ca fiecarei probe al unui experiment i se poate asocia un numar sau de un cuplu de numere. Se poate atunci introduce notiunea de *variabila aleatoare* (*intamplatoare*) ca o functie reala definita pe multimea evenimentelor elementare asociate experimentului considerat. Cuvantul aleator, subliniaza faptul ca se lucreaza cu elemente generate de fenomene intamplatoare, care nu sunt guvernate de legi strict deterministe. Elementul dificil in analiza acestor fenomene consta in faptul ca desi acestea au o anumita regularitate, este imposibil de precizat cu certitudine rezultatul unei probe intamplatoare.

Fie Ω multimea evenimentelor elementare asociata unui anumit experiment, rezultatele posibile fiind notate cu ω. Este posibil ca acesta sa nu fie un rezultat numeric in sine, dar i se poate atribui o anumita valoare numerica. De exemplu, la distribuirea unor carti de joc, se poate atribui o anumita valoare numerica fiecarei carti samd.

DEFINITIE Orice functie *f* definita pe Ω si care ia valori in multimea numerelor reale ***R***, se numeste *variabila aleatoare*.

Prin urmare, fiecarui rezultat ω_i, $1 \le i \le n$, ii corespunde numarul real $x_i = f(\omega_i)$, $1 \le i \le n$.

OBSERVATIE Numarul rezultatelor x_i, $1 \le i \le n$, distincte este mai mic cel mult egal cu *n*.

EXEMPLU Se considera experimentul aruncarii unui zar. Fie ω_i, $1 \le i \le 6$, evenimentele care constau in aparitia fetei cu un numar *i* de puncte. Se poate defini o variabila aleatoare, ca fiind data de $f(\omega_i) = i$.

Se considera acum ca variabila aleatoare *f* inregistreaza *s* valori distincte $x_1, x_2, ..., x_s$, in conditiile in care sunt inregistrate *n* evenimente elementare ω_i, $1 \le i \le n$. Fie $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}$, evenimentele elementare pentru care $f(\omega_{i_h}) = x_i$, $1 \le h \le k$. Notand $p_{i_h} = p(\omega_{i_h})$, atunci:

$$q_i = p(f = x_i) = p_{i_1} + p_{i_2} + ... p_{i_k} .$$

EXEMPLU Se considera o variabila aleatoare *g*, data de recolta de grau pe un hectar. In aceasta situatie variabila aleatoare poate avea orice valoare dintr-un interval (a, b) si prin urmare apare urmatoarea clasificare, generata de natura valorilor inregistrate.

DEFINITIE O variabila aleatoare se numeste *discreta* (*discontinua*) daca poate lua numai valori izolate. Numarul valorilor posibile ale unei variabile aleatoare discrete poate fi finit sau infinit.

O variabila aleatoare se numeste *continua* daca poate lua valori care umplu un interval finit sau infinit. Evident, numarul valorilor posibile ale unei variabile aleatoare continue este intotdeauna infinit.

2.2 Repartitia unei variabilei aleatoare discrete

Pentru a defini o variabila aleatoare discreta este suficient sa se enumere toate valorile posibile pe care aceasta le poate lua. Insa, pentru a o cunoaste complet trebuie enumerate si probabilitatile corespunzatoare fiecarei valori inregistrate.

Se numeste *repartitie* a unei variabile aleatoare discrete enumerarea valorilor posibile ale variabilei aleatoare si a probabilitatilor corespunzatoare acestora. De obicei repartitia unei variabile aleatoare discrete se scrie sub forma unui tablou in care prima linie contine toate valorile posibile, iar a doua linie, probabilitatile corespunzatoare :

$$f:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \text{ sau } f:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix},\ 1 \le i \le n .$$

Tinand seama ca intr-un experiment variabila aleatoare ia una si numai una din valorile sale posibile, rezulta ca evenimentele care constau in aceea ca variabila f ia valorile x_1 sau x_2 ,…, sau x_n formeaza - dupa cum se stie – un sistem complet de evenimente. Prin urmare, suma probabilitatilor acestor evenimente este egala cu unitatea :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 .$$

2.3 Operatii cu variabile aleatoare discrete

DEFINITIE Puterea de ordinul *k* a variabilei aleatoare *f* este variabila aleatoare f^k cu repartitia :

$$f^k:\begin{pmatrix} x_1^k & x_2^k & \dots & x_n^k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

DEFINITIE Daca a este un numar real, produsul dintre a si f este variabila aleatoare af , cu repartitia :

$$af:\begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \dots & ax_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Fie f si g doua variabile aleatoare, avand respectiv repartitiile:

$$f:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \text{ si } g:\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}.$$

Se considera evenimentul care consta in aceea ca f ia valoarea x_i, $1 \le i \le n$ si g ia valoarea y_j, $1 \le j \le m$. Acest eveniment notat $(f = x_i, g = y_j)$ si care este intersectia evenimentelor $(f = x_i)$ si $(g = y_j)$, constand in aceea ca f ia valoarea x_i, respectiv g ia valoarea y_j, are o probabilitate bine determinata:

$$P(f = x_i, g = y_j) = p_{ij}.$$

Cum evenimentele $(f = x_i, g = y_j)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, in numar de nm, formeaza un sistem complet de evenimente, atunci :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

DEFINITIE Variabila aleatoare $f + g$ are repartitia:

$$\begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m.$$

DEFINITIE Variabila aleatoare fg are repartitia:

$$\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m.$$

Exista vreo legatura intre probabilitatile $p_1, p_2, ..., p_n$ si $q_1, q_2, ..., q_n$? Raspunsul la aceasta intrebare este afirmativ, insa legatura dintre aceste probabilitati nu este intotdeauna simpla. Un caz in care aceasta legatura este foarte simpla este acela in care f si g sunt *independente*.

DEFINITIE Variabilele f si g se numesc *independente probabilistic* daca pentru orice i si j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, evenimentele $(f = x_i)$ si $(g = y_j)$ sunt independente. Prin urmare:

$$P(f = x_i, g = y_j) = P(f = x_i)P(g = y_j),$$

adica

$$p_{ij} = p_i q_j.$$

In mod analog se pot defini sumele si produsele a mai mult de doua variabile aleatoare, ca si notiunea de independenta a unui numar oarecare de variabile aleatoare.

2.4 Momentele unei variabile aleatoare discrete

Se considera doua variabile aleatoare f si g si se presupune ca f poate lua valorile $x_1,...,x_s$, iar g poate lua valorile $y_1,...,y_t$. Pentru fiecare pereche (x_i, y_k), fie p_{jk} probabilitatea ca f sa ia valoarea x_j si g sa ia valoarea y_k, adica:

$$p_{jk} = p(f = x_j, g = y_k), \quad 1 \le j \le s, \quad 1 \le k \le t.$$

DEFINITIE Probabilitatile p_{jk}, $1 \le j \le s$, $1 \le k \le t$ constituie repartitia comuna a variabilelor aleatoare f, g.

DEFINITIE Variabilele aleatoare f si g sunt independente, daca pentru orice j, $1 \le j \le s$ si orice k, $1 \le k \le t$ are loc:

$$p(f = x_j, g = y_k) = p(f = x_j)p(g = y_k).$$

Se considera acum mai mult de doua variabile aleatoare. Fie $f_1,...,f_n$, n variabile aleatoare, unde variabila aleatoare f_j ia valorile $x_{1,j},...,x_{s_j,j}$, $1 \le j \le n$.

DEFINITIE Probabilitatile :

$$p_{j_1 j_2 \dots j_n} = p\left(f_1 = x_{j_1,1}, f_2 = x_{j_2,2}, \dots, f_n = x_{j_n,n}\right)$$

constituie repartitia comuna a variabilelor aleatoare $f_1,...,f_n$.

DEFINITIE Variabilele aleatoare $f_1,...,f_n$ sunt independente, daca pentru orice $1 \le j_l \le s_l$, $1 \le l \le n$:

$$\begin{aligned} & p\left(f_1 = x_{j_1,1}, f_2 = x_{j_2,2}, \dots, f_n = x_{j_n,n}\right) = \\ & = p\left(f_1 = x_{j_1,1}\right) p\left(f_2 = x_{j_2,2}\right) \dots p\left(f_n = x_{j_n,n}\right). \end{aligned}$$

DEFINITIE Variabilele aleatoare $f_1, f_2, ..., f_n, ...$[1] sunt independente, daca orice numar finit de variabile aleatoare din acest sir sunt independente.

Introducem acum o caracteristica numerica foarte importanta, asociata unei variabile aleatoare.

DEFINITIE Numarul

$$M(f) = \sum_{k=1}^{s} x_k p_k$$

se numeste *valoarea medie* a variabilei aleatoare f.

EXEMPLU In experimentul cu zarul :

$$M(f) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3\frac{1}{2}.$$

---

[1] Vom nota un sir si sub forma (f_n)

DEFINITIE Fie r un numar intreg, $r \geq 1$. Numarul

$$M_r(f) = \sum_{k=1}^{s} x_k^r p_k$$

se numeste *moment de ordinul* r al variabilei aleatoare f.

OBSERVATIE Momentul de ordinul 1 este valoarea medie.

DEFINITIE Numarul

$$D^2(f) = M_2(f - M(f)) = \sum_{k=1}^{s} (x_k - M(f))^2 p_k$$

se numeste *dispersia* variabilei aleatoare f.

Cu ajutorul acestor notiuni introduse, se pot demonstra o serie de proprietati.

PROPRIETATEA 1 Fie f o variabila aleatoare si r un numar intreg, $r \geq 1$. Atunci

$$M_r(f) = M(f^r)$$

Demonstratie. Fie variabila aleatoare f cu repartitia

$$f : \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_s \\ p_1 & \dots & p_s \end{pmatrix}.$$

Atunci variabila aleatoare $h = f^r$ va avea evident repartitia :

$$h : \begin{pmatrix} x_1^r & \dots & x_s^r \\ p_1 & \dots & p_s \end{pmatrix};$$

cu alte cuvinte, valorile x_j si x_j^r au aceeasi probabilitate p_j, $1 \leq j \leq s$ si deci

$$M(h)=\sum_{j=1}^{s} x_j^r p_j = M_r(f). \ (*)$$

Din proprietatea anterioara se deduce imediat:

PROPRIETATEA 2 Fie f o variabila aleatoare care poate lua o singura valoare a cu probabilitatea 1 (adica $f = a = constant$). Atunci:

$$M_r(f)=a^r .$$

PROPRIETATEA 3 Fie f o variabila aleatoare si a un numar real. Atunci:

$$M_r(af)=a^r M_r(f).$$

Demonstratie. Fie variabila aleatoare f cu valorile $x_1,...,x_s$, avand probabilitatile $p_1,...,p_s$ si fie $h = af$. Aceasta noua variabila aleatoare ia valorile $ax_1,...,ax_s$ cu aceleasi probabilitati $p_1,...,p_s$ si deci:

$$M(h)=\sum_{j=1}^{s} a^r x_j^r p_j = a^r \sum_{j=1}^{s} x_j^r p_j = a^r M_r(f). \ (*)$$

PROPRIETATEA 4 Fie n variabile aleatoare $f_1,...,f_n$. Atunci valoarea medie a sumei acestor variabile aleatoare este egala cu suma valorilor medii, adica:

$$M(f_1 + ... + f_n)= M(f_1)+ ... + M(f_n).$$

Demonstratie. Fie mai intai numai doua variabile aleatoare f si g. Se presupune ca variabila aleatoare f ia valorile $x_1,...,x_s$ cu probabilitatile $p_1,...,p_s$, iar variabila aleatoare g ia valorile $y_1,...,y_t$ cu probabilitatile $q_1,...,q_t$. De asemenea fie :

$$p_{jk} = p\left(f = x_j, g = y_k\right),\quad 1 \le j \le s\ ,\quad 1 \le k \le t\ .$$

Fie $h = f + g$; aceasta noua variabila aleatoare ia valoarea $x_i + y_k$ cu probabilitatea p_{jk} , $1 \le j \le s$, $1 \le k \le t$. Prin urmare :

$$M(h) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}\left(x_j + y_k\right)p_{jk} = \sum_{j=1}^{s} x_j\left(\sum_{k=1}^{t} p_{jk}\right) + \sum_{k=1}^{t} y_k\left(\sum_{j=1}^{s} p_{jk}\right). \quad (1)$$

Suma $\sum_{k=1}^{t} p_{jk}$, este suma probabilitatilor tuturor evenimentelor de forma $\left(f = x_j, g = y_k\right)$, unde indicele j este acelasi pentru toti termenii sumei, iar indicele k variaza de la un termen la altul, parcurgand toate valorile de la 1 la t. Deoarece evenimentele $\left(g = y_k\right)$ pentru indici k diferiti sunt incompatibile doua cate doua, suma $\sum_{k=1}^{t} p_{jk}$ este probabilitatea producerii unui eveniment oarecare din cele t evenimente $\left(f = x_j, g = y_k\right)$, $1 \le k \le t$. Dar, a spune ca s-a produs un eveniment oarecare din evenimentele $\left(f = x_j, g = y_k\right)$, $1 \le k \le t$, este echivalent cu a spune ca s-a produs evenimentul $\left(f = x_j\right)$. Intr-adevar, daca s-a produs unul din evenimentele $\left(f = x_j, g = y_k\right)$, $1 \le k \le t$, este evident ca s-a produs si evenimentul $\left(f = x_j\right)$; reciproc, daca s-a produs evenimentul $\left(f = x_j\right)$, atunci intrucat variabila aleatoare g ia neaparat una din valorile sale posibile $y_1, \ldots, y_t$, trebuie sa se produca si un eveniment oarecare din evenimentele $\left(f = x_j, g = y_k\right)$, $1 \le k \le t$. Asadar, $\sum_{k=1}^{t} p_{jk}$ fiind probabilitatea producerii unui eveniment oarecare din evenimentele $\left(f = x_j, g = y_k\right)$, $1 \le k \le t$, este egala cu probabilitatea evenimentului $\left(f = x_j\right)$, adica

$$\sum_{k=1}^{t} p_{jk} = p_j\,,\quad 1 \le j \le s\ .$$

In mod analog se deduce:

$$\sum_{j=1}^{s} p_{jk} = q_k\,,\quad 1 \le k \le t\ .$$

Tinand seama de aceste expresii in relatia (1), se obtine :

$$M(h) = \sum_{j=1}^{s} x_j p_j + \sum_{k=1}^{t} y_k q_k = M(f) + M(g).$$

Pentru mai mult de doua variabile aleatoare, se procedeaza prin inductie. Fie

$$h = f_1 + \ldots + f_n$$

si se presupune teorema adevarata pentru $n-1$. Atunci :

$$M(f_1 + \ldots + f_{n-1}) = M(f_1) + \ldots + M(f_{n-1}).$$

Aplicand proprietatea pentru doua variabile aleatoare, se obtine :

$$M(h) = M((f_1 + \ldots + f_{n-1}) + f_n) = M(f_1 + \ldots + f_{n-1}) + M(f_n) = \\ = M(f_1) + \ldots + M(f_n).\ (*)$$

PROPRIETATEA 5 Dispersia unei variabile aleatoare f este data de relatia :

$$D^2(f) = M_2(f) - (M(f))^2\ .$$

Demonstratie. $D^2(f) = M_2(f - M(f)) = M\left((f - M(f))^2\right) =$
$= M\left(f^2 - 2M(f)f + (M(f))^2\right) = M\left(f^2\right) - M(2M(f)f) + M\left((M(f))^2\right)$

,

daca se tine seama de proprietatea precedenta. Mai departe, aplicand de doua ori proprietatea 1., se obtine :

$$D^2(f)=M\left(f^2\right)-2M(f)M(f)+\left(M(f)\right)^2=M_2(f)-\left(M(f)\right)^2. \quad (*)$$

PROPRIETATEA 6 Fie f si g doua variabile aleatoare independente. Atunci valoarea medie a produsului acestor variabile aleatoare este egala cu produsul valorilor medii, adica :

$$M(fg)=M(f)M(g).$$

Demonstratie. Se presupune ca variabila aleatoare f ia valorile $x_1,\dots,x_s$ cu probabilitatile $p_1,\dots,p_s$, iar variabila aleatoare g ia valorile $y_1,\dots,y_t$ cu probabilitatile $q_1,\dots,q_t$. De asemenea :

$$p_{jk}=p\left(f=x_j,g=y_k\right),\quad 1\le j\le s\ ,\quad 1\le k\le t$$

si cum *f* si *g* sunt variabile independente:

$$p_{jk}=p_jq_k\ ,\quad 1\le j\le s\ ,\quad 1\le k\le t\,.$$

Fie $h=fg$; aceasta noua variabila aleatoare ia valoarea x_jy_k cu probabilitatea p_{jk} , $1\le j\le s$, $1\le k\le t$. Prin urmare:

$$M(h)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_jy_kp_{jk}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_jy_kp_jq_k=$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{s}x_jp_j\right)\left(\sum_{k=1}^{t}y_kq_k\right)=M(f)M(g).$$

PROPRIETATEA 7 Fie n variabile aleatoare $f_1,\dots,f_n$ independente doua cate cate doua. Atunci dispersia sumei acestor variabile aleatoare este egala cu suma dispersiilor, adica:

$$D^2(f_1+\ldots+f_n)=D^2(f_1)+\ldots+D^2(f_n).$$

Demonstratie. Din proprietatea 6 se deduce

$$\begin{aligned}D^2(f_1+\ldots+f_n)&=M_2(f_1+\ldots+f_n)-(M(f_1+\ldots+f_n))^2=\\&=M\left((f_1+\ldots+f_n)^2\right)-(M(f_1)+\ldots+M(f_n))^2=\\&=M\left(\sum_{j=1}^{n}f_j^2+\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}f_jf_k\right)-\sum_{j=1}^{n}(M(f_j))^2-\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}M(f_j)M(f_k)=\\&=\sum_{j=1}^{n}M(f_j^2)+\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}M(f_jf_k)-\sum_{j=1}^{n}(M(f_j))^2-\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}M(f_j)M(f_k).\end{aligned}$$

Daca se tine seama de faptul ca variabilele aleatoare $f_1,\ldots,f_n$ sunt independente, atunci din proprietatea 6 rezulta ca cele doua sume duble de mai sus se reduc si deci :

$$\begin{aligned}D^2(f_1+\ldots+f_n)&=\sum_{j=1}^{n}\left(M(f_j^2)-(M(f_j))^2\right)=\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(M_2(f_j)-(M(f_j))^2\right)=\sum_{j=1}^{n}D^2(f_j).\end{aligned}$$

PROPRIETATEA 8 (*Inegalitatea lui Cebisev*) Fie f o variabila aleatoare si ε un numar pozitiv oarecare. Atunci

$$p(|f-M(f)|\geq\varepsilon)<\frac{D^2(f)}{\varepsilon^2},$$

sau

$$p(|f-M(f)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D^2(f)}{\varepsilon^2}$$

Demonstratie. Fie f o variabila aleatoare care ia valorile $x_1,...,x_s$ cu probabilitatile $p_1,...,p_s$. Dispersia variabilei aleatoare f este :

$$D^2(f)=\sum_{i=1}^{s}(x_1-M(f))^2\,p_i\ .$$

Fie $\varepsilon>0$ este un numar oarecare; daca din suma de mai sus se elimina toti termenii pentru care $|x_i-M(f)|<\varepsilon$ si raman numai termenii pentru care $|x_i-M(f)|\geq\varepsilon$, suma poate numai sa se micsoreze, adica

$$D^2(f)\geq\sum_{|x_i-M(f)|\geq\varepsilon}(x_1-M(f))^2\,p_i\ .$$

Aceasta suma se va micsora si mai mult daca in fiecare termen al ei vom inlocui factorul $(x_i-M(f))^2$ prin valoarea inferioara ε^2 :

$$D^2(f)\geq\varepsilon^2\sum_{|x_i-M(f)|\geq\varepsilon}p_i\ .$$

Suma din partea dreapta reprezinta suma probabilitatilor tuturor acelor valori x_i ale variabilei aleatoare f care se abat de la valoarea medie $M(f)$ de o parte si de alta cu mai mult de ε; conform proprietatii de aditivitate a doua evenimente incompatibile, aceasta este probabilitatea ca variabila aleatoare f sa ia una din aceste valori. Cu alte cuvinte, aceasta suma este $p(|f-M(f)|\geq\varepsilon)$. Adica :

$$p(|f-M(f)|\geq\varepsilon)<\frac{D^2(f)}{\varepsilon^2}\ ,$$

ceea ce permite aprecierea probabilitatii abaterilor mai mari decat un numar ε dat dinainte, cu conditia numai sa fie cunoscuta dispersia $D^2(f)$.

Cu ajutorul proprietatilor 7 si 8 se poate demonstra urmatorul rezultat foarte important, cunoscut sub numele de *legea numerelor mari.*

PROPRIETATEA 9 Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ un sir de variabile aleatoare independente care au aceeasi repartitie si deci, aceeasi valoare medie m si aceeasi dispersie σ^2. Atunci, pentru orice ε si δ arbitrari, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, exista un numar natural $n_0(\varepsilon, \delta)$ astfel incat indata ce $n > n_0(\varepsilon, \delta)$, are loc :

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j - m\right| \geq \varepsilon\right) < \delta .$$

Demonstratie. Din proprietatile 1 si 4, se deduce:

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(f_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} m = m$$

si deci, aplicand proprietatea 8, se obtine:

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j - m\right| \geq \varepsilon\right) < \frac{D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j\right)}{\varepsilon^2} .$$

Dar:

$$D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} D^2(f_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2 \cdot n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n},$$

de unde rezulta:

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j - m\right| \geq \varepsilon\right) < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}.$$

Fiind dati $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, se poate determina un numar natural $n_0(\varepsilon, \delta)$, care depinde de ε si δ, astfel incat indata ce $n > n_0(\varepsilon, \delta)$, sa rezulte :

$$\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} < \delta;$$ [2]

Prin urmare :

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j - m\right| \geq \varepsilon\right) < \delta.$$

Cu alte cuvinte, proprietatea 9 arata ca daca variabilele aleatoare $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ sunt independente si daca au aceeasi medie m si aceeasi dispersie σ^2, atunci pentru un n suficient de mare, expresia $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j$ va diferi oricat de putin de m cu o probabilitate oricat de apropiata de 1.

Studiul independentei a doua variabile aleatoare se poate realiza si prin intermediul coeficientului de corelatie.

DEFINITIE Se numeste *corelatie* a doua variabile aleatoare, media produsului abaterilor acestora:

$$cov(X,Y) = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

PROPRIETATE $cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$.

---

[2] Drept $n_0(\varepsilon, \delta)$ putem lua primul numar natural n pentru care $n > \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \delta}$.

Demonstratie
$M[(X-M(X))(Y-M(Y))]=$
$M[XY-XM(Y)-YM(X)-M(X)M(Y)]=$
$M(XY)-M(XM(Y))-M(YM(X))+M(M(X)M(Y))=M(XY)$
$-M(X)M(Y)$

DEFINITIE Se numeste *coeficient de corelatie*:

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{D(X)D(Y)}.$$

TEOREMA Corelatia a doua variabile aleatoare independente este nula.

Demonstratie Daca variabilele *X*, *Y* sunt independente, atunci si $X-M(X)$, respectiv $Y-M(Y)$ sunt independente.

PROPRIETATI
1) $|\rho(X,Y)|\le 1$;
2) $|\rho(X,Y)|=1$ daca si numai daca intre variabilele X si Y exista o relatie de legatura liniara.

Demonstratie 1) Fie $U=\left[t\frac{X-m_1}{\sigma_1}+\frac{Y-m_2}{\sigma_2}\right]^2$, $t\in\boldsymbol{R}$. $M(U)\ge 0$, $(\forall)\,t\in\boldsymbol{R}$. Calculand media variabilei aleatoare *U*, se obtine :

$$M(U)=M\left[t^2\frac{(X-m_1)^2}{\sigma_1^{\,2}}+2t\frac{X-m_1}{\sigma_1}\frac{Y-m_2}{\sigma_2}+\frac{(Y-m_2)^2}{\sigma_2^{\,2}}\right]=$$
$$\frac{t^2}{\sigma_1^{\,2}}M\left[(X-m_1)^2\right]+\frac{2t}{\sigma_1\sigma_2}M[(X-m_1)(Y-m_2)]+\frac{1}{\sigma_2^{\,2}}M\left[(Y-m_2)^2\right].$$

Calculand discriminantul si impunand conditia ca acesta sa fie pozitiv, rezulta proprietatea data.
2) Fie $Y=aX+b$, $a,b\in\boldsymbol{R}$, $a\ne 0$.

$$cov(X, aX+b) = aD^2(X)$$

$$\Rightarrow \ \rho(X,Y) = \frac{aD^2(X)}{|a|D^2(X)} = \begin{cases} 1, dac[\ a > 0 \\ -1, dac[\ a < 0 \end{cases}$$

2.5 Repartitii discrete clasice

Repartitia binomiala

$$B(n,k): \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ C_n^0 q^n & C_n^1 q^{n-1} & \dots & C_n^k q^{n-k} & \dots & C_n^n p^n \end{pmatrix}.$$

Parametrii acesteia sunt : $M[B(n,k)] = np$, $D^2[B(n,k)] = npq$.

Repartitia Poisson

$$P(n,k): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix}.$$

Parametrii acesteia sunt : $M[P(n,k)] = \lambda$, $D^2[P(n,k)] = \lambda$.
Repartitia Poisson poate fi scrisa si in forma:

$$P(n,k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \ , \ (\lambda \approx np).$$

Distributia hipergeometrica

$$H(n,k): \begin{pmatrix} 0 & 1 \ \dots & k & \dots \\ \frac{C_a^0 C_b^n}{C_{a+b}^n} & \frac{C_a^1 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} \dots & \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} & \dots \end{pmatrix}.$$

Parametrii acesteia sunt : $M\left[H(n,k)\right]=np$, $D^2\left[H(n,k)\right]=npq\dfrac{N-n}{N-1}$, $\left(a+b=N,\ p=\dfrac{a}{N},\ q=1-p\right)$

Revenind la calculul parametrilor repartitiilor, se obtine :

Repartitia binomiala

$$M\left[B(n,k)\right]=\sum_{k=0}^{n}k\cdot C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}\ .$$

Fie binomul :

$$(q+x)^n=C_n^0q^n+C_n^1q^{n-1}x+C_n^2q^{n-2}x^2+\ldots+C_n^kq^{n-k}x^k+\ldots+C_n^nx^n\quad(1).$$

Derivand dupa x, rezulta:

$$n(q+x)^{n-1}=1\cdot C_n^1q^{n-1}+2xC_n^2q^{n-2}+\ldots+kx^{k-1}C_n^kq^{n-k}+\ldots+nx^{n-1}C_n^n\ .$$

Inmultind cu x, rezulta:

$$nx(q+x)^{n-1}=1\cdot C_n^1q^{n-1}x+2C_n^2q^{n-2}x^2+\ldots+kC_n^kq^{n-k}x^k+\ldots+nC_n^nx^n\ (2)$$

Pentru $x=p\Rightarrow\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k\cdot C_n^k\cdot q^{n-k}\cdot p^k}_{=M[B(n,k)]}=np\underbrace{(p+q)}_{=1}^{n-1}=np\ .$

Daca derivam inca o data (2) *dupa x, rezulta:*

$$1^2C_n^1q^{n-1}+2^2xC_n^2q^{n-2}+\ldots+k^2x^{k-1}C_n^kq^{n-k}+\ldots+n^2x^{n-1}C_n^n=$$
$$=n\left[(q+x)^{n-1}+x(n-1)(q+x)^{n-2}\right]$$

si inmultind cu x $\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=nx\left[(q+x)^{n-1}+x(n-1)(q+x)^{n-2}\right].$

Pentru $x=p\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=np\underbrace{\left[1+(n-1)p\right]}_{np-p+1}=n^2p^2+np\underbrace{(1-p)}_{=q}$, *de unde rezulta ca:* $D^2[x]=n^2p^2+np(1-p)-n^2p^2=npq\ .$

Repartitia Poisson

Considerand dezvoltarea in serie Taylor a functiei $f(\lambda)=e^{\lambda}$ *in jurul originii rezulta:*

$$f(\lambda)=f(0)+\frac{\lambda!}{1!}f^{/}(0)+\frac{\lambda^2}{2!}f^{//}(0)+\ldots+\frac{\lambda^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots\Rightarrow e^{\lambda}=\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!},$$

$\left[f^{(n)}(0)=1\right].$

Atunci

$$M[P(n,k)] = \sum_{k\geq 0} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k\geq 1} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} =$$

$\lambda\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}$, *adica* $M[P(n,k)] = \lambda$.

Pentru determinarea dispersiei este necesar sa se calculeze:

$$M\left[P^2(n,k)\right] = \sum_{k\geq 0} k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k\geq 1} k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k\geq 1} k\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} =$$

$$\lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1} k\cdot\frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}(k+1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\left[\underbrace{\sum_{k\geq 0} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}}_{=\lambda e^{\lambda}} + \underbrace{\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^{\lambda}}\right]$$

$$\Rightarrow M\left[P^2(n,k)\right] = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow D^2[P(n,k)] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

Prin urmare, repartitia Poisson are $M[P(n,k)] = D^2[P(n,k)] = \lambda$.

Repartitia hipergeometrica

$$M[H(n,k)] = \sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{1}{C_{a+b}^n}\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_a^k C_b^{n-k} = \frac{1}{C_{a+b}^n}\sum_{k=1}^{n} k\cdot C_a^k C_b^{n-k} =$$

$$\frac{1}{C_{a+b}^n}\sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{a!}{k!(a-k)!}C_b^{n-k} = \frac{a}{C_{a+b}^n}\sum_{k=1}^{n} k\cdot C_{a-1}^{k-1}C_b^{n-k} \underset{k-1=t}{=} \frac{a}{C_{a+b}^n}\underbrace{\sum_{t=0}^{n-1} C_{a-1}^t C_b^{(n-1)-t}}_{=C_{a+b-1}^{n-1}} =$$

$$\frac{a}{(a+b)!}\cdot\frac{n!(a+b-n)!}{(n-1)!(a+b-n)!}\cdot(a+b-1)! = \frac{an}{a+b} .$$

$$M\left[H^2(n,k)\right] = \sum_{k=0}^{n} k^2\cdot\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{1}{C_{a+b}^n}\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot\frac{a!}{k!(a-k)!}C_b^{n-k} =$$

$$\frac{a}{C_{a+b}^n}\sum_{k=1}^{n} k\cdot C_{a-1}^{k-1}C_b^{n-k} \underset{k-1=t}{=} \frac{a}{C_{a+b}^n}\sum_{t=0}^{n-1} C_{a-1}^t C_b^{(n-1)-t}\cdot(t+1) =$$

$$\frac{a}{C_{a+b}^n}\left[\sum_{t=0}^{n-1} C_{a-1}^t C_b^{(n-1)-t} + \sum_{t=0}^{n-1} t\cdot C_{a-1}^t C_b^{(n-1)-t}\right].$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} t\cdot C_{a-1}^t C_b^{(n-1)-t} = \sum_{t=1}^{n-1} t\cdot C_{a-1}^t C_b^{(n-1)-t} = \sum_{t=1}^{n-1} t\cdot\frac{(a-1)!}{t!(a-1-t)!}C_b^{(n-1)-t} =$$

$$(a-1)\sum_{t=1}^{n-1} C_{a-2}^{t-1}C_b^{(n-1)-t} \underset{t-1=s}{=} (a-1)\sum_{s=0}^{n-2} C_{a-2}^s C_b^{(n-2)-s} = (a-1)C_{a+b-2}^{n-2} \Rightarrow$$

$$M\left[H^2(n,k)\right]=\frac{a}{C_{a+b}^{n}}\left[C_{a+b-1}^{n-1}+(a-1)C_{a+b-2}^{n-2}\right]=\frac{an!(a+b-n)!}{(a+b)!}\cdot\frac{(a+b-1)!}{(n-1)!(a+b-n)!}+$$

$$\frac{an!(a+b-n)!}{(a+b)!}\cdot\frac{(a-1)(a+b-2)!}{(a+b-n)!(n-2)!}=\frac{an}{a+b}+\frac{a(a-1)n(n-1)}{(a+b)(a+b-1)}\Rightarrow$$

$$D^2[H(n,k)]=\frac{an}{a+b}+\frac{a(a-1)(n-1)n}{(a+b)(a+b-1)}-\frac{a^2n^2}{(a+b)^2}=\frac{abn(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}.$$

$$\Rightarrow D^2[H(n,k)]=\frac{ab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}=npq\frac{a+b-n}{a+b-1}\text{, unde } p=\frac{a}{a+b}\ ,\ q=\frac{b}{a+b}.$$

2.6 Mediana, cuantile, moda, asimetrie si exces

DEFINITIE Fie X o variabila aleatoare care are densitatea de repartitie $f(x)$. Se numeste *moda* a lui X si se noteaza cu $Mo(X)$ abscisa punctului de maxim a lui $f(x)$.

Daca $f(x)$ are un singur maxim, atunci X se numeste *unimodala,* iar daca are mai multe puncte de maxim se va numi *plurimodala*.

EXEMPLU Se poate observa usor ca daca $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in\boldsymbol{R}$, atunci are un singur maxim in $x=0$ si deci $Mo=0$.

OBSERVATIE Intre valoarea medie $M(X)$, mediana $Me(X)$ si moda $Mo(X)$ exista asa numita relatie a lui Pearson:

$$Mo=M+3(Me-M)$$

DEFINITIE Raportul

$$A_3=\frac{1}{\sigma^2}M\left[(X-M(X))^3\right]=\frac{\mu_3(X)}{\mu_2(X)}$$

daca exista, se numeste *asimetrie* a repartitiei lui X, sau a lui X.

DEFINITIE Expresia

$$E = \frac{1}{\sigma^4} M\left[(X - M(X))^4\right] - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

daca exista se numeste *exces.*

OBSERVATIE Marimile sau indicatorii numerici definiti mai sus sunt utili in general in statistica pentru a studia diferite repartitii.

2.7 Functia de repartitie

DEFINITIE Pentru orice variabila aleatoare X, de numeste functie de repartitie a lui X functia

$$F(x) \overset{def}{=} P(X < x).$$

OBSERVATIE Din definitie, se observa, ca daca X este o variabila aleatoare discreta, atunci $F(x)$ este data de suma tuturor probabilitatilor valorilor lui X situate la stanga lui x.

EXEMPLU Fie $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$. Atunci, conform definitiei :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & dac[\ x \leq 0 \\ 0,2, & dac[\ 0 < x \leq 1 \\ 0,2 + 0,3, & dac[\ 1 < x \leq 2 \\ 0,2 + 0,3 + 0,4, & dac[\ 2 < x \leq 3 \\ 0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,1 = 1, & dac[\ x > 3 \end{cases}.$$

Expresia $p_x = F(x+0) - F(x-0)$ se numeste salt al functiei $F(x)$ in punctul x si se poate observa ca:

$$p_x = \begin{cases} > 0,]n\ punctele\ de\ discontinuitate \\ = 0,]n\ punctele\ de\ continuitate \end{cases}.$$

PROPOZITIE Daca X este o variabila aleatoare discreta si $F(x)$ functia de repartitie a acesteia, atunci pentru orice $x_1 < x_2$ doua numere date, Are loc:

1) $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
2) $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) - P(X = x)$
3) $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) + P(X = x_2) - P(X = x_1)$
4) $P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) + P(X = x_2)$.

Demonstratie. Fie $A = \{\omega | X(\omega) < x_1\}$, $B = \{\omega | X(\omega) < x_2\}$, $C = \{\omega | X(\omega) = x_1\}$ si $D = \{\omega | X(\omega) = x_2\}$. $A \subseteq B$, $A \cup C \subseteq B$, $A \subseteq B \cup D$. Ca urmare a proprietatilor probabilitatii , se poate scrie ca:

1) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A) = F(x_2) - F(x_1)$,
2) $P(B \cap (\overline{A \cup C})) = P(B) - P(A) - P(C) = F(x_2) - F(x_1) - P(X = x_1)$,
3) $P((B \cup D) \cap (\overline{A \cup C})) = P(B) - P(A) - P(C) + P(D) =$
$= F(x_2) - F(x_1) - P(X = x_1) + P(X = x_2)$,

adica tocmai afirmatiile din propozitie.

PROPOZITIE Daca F este functia de repartitie a variabilei aleatoare X, atunci $F(x_1) \le F(x_2)$, $(\forall) x_1 < x_2$ (F este nedescrescatoare).

Demonstratie. Din propozitia 1.:
$0 \le P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, $(\forall) x_1 < x_2$,
adica $F(x_1) \le F(x_2)$, $(\forall) x_1 < x_2$.

2.8 Functia generatoare de momente

DEFINITIE Daca exista, expresia

$$G_X(t) = M\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum e^{tx_i} p_i, & dac[\ X \ v.a.d. \\ \int_R e^{tx} f(x)dx, & dac[\ X \ v.a.c. \end{cases}$$

se numeste *generatoare de momente* asociata variabilei aleatoare X.

OBSERVATIE Precizarea ,,daca exista'' se refera la convergenta sumei $\sum_{i \in I} e^{tx_i}$ sau a integralei $\int_R e^{tx} f(x)dx$ cand acestea o cer. Se presupune ca $G_X(t)$ si derivatele sale de ordin superior $G_X^{(n)}(t)$ exista. In plus, se constata ca:

$$G_X(0) = 1\ ,\ G_X^{/}(0) = M(X),\ G_X^{//}(0) = M\left(X^2\right), \ldots$$

OBSERVATIE Utilizarea functiei generatoare de momente este recomandata atunci cand se pot calcula mai repede momentele decat pe cale directa.

EXEMPLU Fie $X = \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}$, $k = \overline{0,n}$, $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$.

Atunci $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{kt} C_n^k p^k q^{n-k} = \left(pe^t + q\right)^n$. $\quad t = 0 \quad \Rightarrow$

$G_X(0) = (p+q)^n = 1$. $\ G_X^{/}(t) = n\left(pe^t + q\right)^{n-1} \cdot pe^t \ \Rightarrow\ G_X^{/}(0) = np$.

2.9 Functia caracteristica

DEFINITIE Fiind date variabilele aleatoare X si Y, se numeste variabila aleatoare complexa $Z = X + iY$, unde X se numeste partea reala, iar Y se numeste partea imaginara. Valoarea medie a lui Z este, prin definitie $M(Z) = M(X) + iM(Y)$.

Fie X o variabila aleatoare reala cu $F(x)$ functie de repartutie $\Rightarrow e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$, $t \in R$ este o variabila aleatoare complexa, avand $\left|e^{itX}\right| = 1$ si deci, marginita. Valoarea medie a acesteia exista si este o functie $\varphi(t)$, $t \in R$, pe care o numim functie caracteristica a variabilei aleatoare X.

DEFINITIE Numim functie caracteristica a variabilei aleatoare X expresia:

$$\varphi(t) = M\left(e^{itX}\right) = \sum_k e^{itx_k p_k}$$

presupunand ca suma este convergenta.

PROPOZITIA 1 $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \le 1$, $t \in R$.

PROPOZITIA 2 Doua functii de repartitie $F_1(x)$ si $F_2(x)$ sunt identice daca si numai daca functiile lor caracteristice $\varphi_1(t)$ si $\varphi_2(t)$ coincid.

PROPOZITIA 3 Fie X si Y doua variabile aleatoare. Daca $Y = aX + b$, atunci $\varphi_Y(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.

Demonstratie.

$$\varphi_Y(t) = M\left(e^{itY}\right) = M\left(e^{itaX+itb}\right) = M\left(e^{itaX} \cdot e^{itb}\right) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at).$$

PROPOZITIA 4 Daca X si Y sunt variabile aleatoare independente, atunci $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$.

Demonstratie

$$\varphi_{X+Y}(t) = M\left(e^{it(X+Y)}\right) = \sum_k \sum_j e^{it\left(x_k + y_j\right)} \pi_{kj} = \sum_k e^{itx_k} p_k \cdot \sum_j e^{ity_j} q_j =$$
$$\varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t).$$

PROPOZITIA 5 Daca momentul de ordinul r $(r>0)$ al unei variabile aleatoare X exista, atunci derivata $\varphi_X^{(r)}(t)$ exista pentru orice r si au loc relatiile :

$$\varphi^{(r)}(t)=i^r\sum x_k^r e^{itx_k}p_k \Rightarrow M_r(X)=M(X^r)\frac{\varphi_X^{(r)}(0)}{i^r}.$$

EXEMPLUL 1

$$\varphi(t)=M\left(e^{itX}\right)=\sum_k e^{itx_k}p_k=\sum_k e^{itk}C_n^k p_k q^{n-k}=\left(pe^{it}+q\right)^n.$$

Monte Cristo
Marseille-France