MATEMATICI SPECIALE

Viorel PETREHUŞ, Narcisa TEODORESCU

Lecţii introductive pentru studenţii
din anul al 2-lea din cadrul UTCB

(Mai există erori care vor fi corectate în versiunea finală)

Capitolul 1

Introducere în funcţii complexe

1.1 Operaţii cu funcţii complexe

Un număr complex este o pereche de numere reale $(x, y) \in R \times R$. Adunarea şi înmulţirea sunt definite de

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Înzestrat cu aceste doua operaţii, setul de numere complexe este un câmp comutativ, notat cu C. De obicei perechea (0,1) este notată cu i. Numerele complexe $(x, 0)$ sunt identificate cu numerele reale x, datorită:

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$

$$(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0).$$

Apoi, pentru fiecare număr complex:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi$$

x este partea reală sau $\mathrm{Re}(z)$, şi y este partea imaginară, sau $\mathrm{Im}(z)$. Modulul lui z este $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi unghiul θ, $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$, $\sin\theta =$

$\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$. Complexul conjugat al lui $z = x + yi$ este numărul complex $\bar{z} = x - yi$. Următoarele proprietăţi sunt bine cunoscute şi nu vor fi demonstrate aici:

$$\begin{array}{ll} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; & |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; & |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; & \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \\ \overline{(z^n)} = \bar{z}^n; & |z^n| = |z|^n. \end{array}$$

Fiecare număr complex $z = x + yi$ poate fi reprezentat printr-un punct (x, y) în planul xOy. Nu doar coordonatele carteziene pot determina un punct, ci şi coordonatele polare (r, θ). Ele sunt definite de $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$, $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$. Apoi

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Dacă $z_1 = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ şi $z_2 = (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, atunci

$$\begin{array}{l} z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ z_1^n = r_1^n(\cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1)) \\ \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}\right); \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{array}$$

În cazul $n = 2$, rădăcina pătrată poate fi găsită fără trigonometrie:

$$\sqrt{a + bi} = x + yi \Leftrightarrow a + bi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b.$$

1.2 Convergenţa în câmpurile complexe

O secvenţă de numere complexe este o funcţie $f : N \to C$, unde $f(n) = z_n$. Secvenţa va fi notată cu $(z_n)_{n\in N}$. Pentru a defini convergenţa într-un câmp complex evocăm funcţia $d : C \times C \to R$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Această funcţie satisface:

$$d(z_1, z_2) \geq 0 \quad \text{and} \quad d(z_1, z_2) = 0 \quad \text{iff} \quad z_1 = z_2$$
$$d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$$
$$d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$$

care decurg cu uşurinţă din proprietăţile modulului.

O multime C, înzestrată cu o funcţie d ca mai sus se numeşte un spaţiu metric. O secvenţă $(z_n)_{n\in N}$, $z \in C$, este numită convergentă dacă există $z \in C$, astfel încât $d(z_n, z) \to 0$ în R. Multimea $D(z_0, r) = \{z \in C | d(z_0, z) < r\}$ este numită discul deschis de rază r şi centru z_0. $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in C | d(z_0, z) < r\}$ este numită discul închis de rază r. Propoziţiile următoare oferă condiţii echivalente pentru convergenţă.

Propoziţia 1. *Fie $(z_n)_{n\in N}$, $z_n = x_n + y_n i$, o secvenţă de numere complexe. Următoarele afirmaţii sunt adevărate*:

1. $z_n \to z = x + yi$
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in N$ *astfel încât* $\forall n > n_0$, $d(z_n, z) < \varepsilon$
3. $x_n \to x$, $y_n \to y$.

Demonstraţie. $1 \Leftrightarrow 2$ printr-un argument bine cunoscut într-un spaţiu metric (ca pentru secvenţele din R).

1 din 3

$$d(z_n, z) = |z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq |x_n - x| + |y_n - y|;$$
$$\max\{|x_n - x|,\ |y_n - y|\} \leq d(z_n, z).$$

$\diamondsuit$

Ştim că un câmp real este un spaţiu metric complet, că orice secvenţă Cauchy este convergentă. O secvenţă $(z_n)_{n\in N}$ este Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in N$, astfel încât $\forall n, m \geq n_\varepsilon$, $d(z_n, z_m) < \varepsilon$.

Utilizând inegalităţile din demonstraţia propoziţiei precedente observăm că $(z_n)_{n\in N}$ este Cauchy dacă $(x_n)_{n\in N}$ şi $(y_n)_{n\in N}$ sunt secvenţe Cauchy, de unde $x_n \to x$, $y_n \to y$, în consecinţă $z_n \to z$. Deci, câmpul C este un spaţiu metric complet.

Următoarele definiţii sunt standard pentru spaţiile metrice (aici spaţiul metric este C):

i) Mulţimea O din spaţiul metric C este deschisă dacă $\forall z \in O$, $\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $D(z, \varepsilon)\sigma O$, sau echivalentă pentru orice secvenţă $z_n \to z \in D$ există n_0 astfel încât $z_n \in D$ pentru $n > n_0$.

ii) Mulţimea A este închisă în spaţiul metric C dacă $C \setminus A$ este deschis, sau echivalent, orice secvenţă $z_n \to z$, $z_n \in A$ implică $z \in A$.

iii) Un punct z este aderent la B dacă $\forall \varepsilon > 0$, $D(z, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$, sau echivalent, z este limita unei secvenţe de elemente aparţinând lui B.

iv) Un punct z este punct de acumulare a lui B dacă $\forall \varepsilon > 0$, $D(z, \varepsilon)$ intersectează B într-un punct diferit de z, sau echivalent, z este limita unei secvenţe de puncte aparţinând lui B, diferite de z.

v) Închiderea lui B, notată $\bar{B}$ este mulţimea tuturor punctelor aderente ale lui B. $\bar{B}$ este întotdeauna închis şi este intersecţia tuturor mulţimilor închise ce conţin B.

vi) Interiorul lui B, notat cu $\overset{0}{B}$, este mulţimea de puncte $z \in B$ astfel încât să existe un $\varepsilon > 0$, depinzând de z, astfel încât $D(x, \varepsilon) \subset B$. B să fie mereu deschisă, şi este submulţimea maximă deschisă din B.

vii) Limita lui B, notată cu ∂B, este mulţimea $\bar{B} \setminus \overset{0}{B}$, este închisă, are interiorul gol şi coincide cu limita complementarului lui B (adică $C \setminus B$).

1.3 Planul complex extins

Se spune că o secvenţă de numere complexe converge la infinit, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ şi se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. Pentru secvenţele de numere complexe ce tind la infinit, sunt valabile următoarele proprietăţi:

a) $z_n \to \infty \Leftrightarrow \dfrac{1}{z_n} \to 0$ (dacă $z_n \neq 0$ pentru orice $n \in N$)

b) $z_n \to \infty$ şi $\xi_n \to a \neq 0$ rezultă $z_n \xi_n \to \infty$.

$z_n \to \infty$ înseamnă $\forall R > 0$, $\exists n_0 \in N$ astfel încât $n \geq n_0 \Rightarrow |z_n| > R$. Pentru a reprezenta simbolul ∞ printr-un punct de ceva finit se consideră o sferă de rază r şi centru $(0, 0, 0) \in R^3$. Fie planul complex reprezentat de planul xOy. Linia dreaptă ce uneşte polul nord $N = (0, 0, 1)$ cu punctul $P = (x, y, 0)$ al planului complex intersectează sfera în punctele

$$S(P) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Pe masură ce distanţa $(P, O) \to \infty$, $S(P)$ se apropie de polul nord N. Spunem că sub această corespondenţă polul nord corespunde simbolului

∞ şi $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ corespunde cu $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = N$ unde $P_n = S(z_n)$. Mulţimea $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$ este denumită planul complex extins (sau sfera lui Riemann) şi este într-o corespondentă de unu la unu cu sfera de rază 1 si centru $(0, 0, 0)$.

1.4 Serii complexe

O sumă formală $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_k + \ldots$, $z_k \in C$, este o serie complexă. Suma $s_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n$ este denumită suma partială de ordin n. Prin definiţie seria este convergentă dacă secvenţa sumelor parţiale $(s_n)_{n\in N}$ este convergentă. Limita lui s_n este numită suma seriei. Seria se numeşte absolut convergentă dacă seria $\sum |z_k|$ este convergentă.

Propoziţia 2. *Fie $\sum z_k$ o serie complexă.*

i) *Seria este convergentă dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_e \in N$ astfel încât pentru $n > n_\varepsilon$, $\left|\sum\limits_{k=n}^{k=m} z_k\right| |z_k|$.*

ii) *Dacă seria este absolut convergentă, atunci este convergentă.*

iii) $z_n \to 0$.

Demonstraţie. i) Condiţia din i) exprimă că secvenţa $(s_n)_{n\in N}$ este Cauchy, de unde şi convergentă.

ii) Evident, $\left|\sum\limits_{k=n}^{k=m} z_k\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{k=m} |z_k|$. Secvenţa $|z_0| + \ldots + |z_n|$ fiind convergentă (de unde Cauchy), inegalitatea implică că secvenţa $s_n = z_1 + \ldots + z_n$ este Cauchy, de unde şi convergentă.

$\diamondsuit$

1.5 Curbe în planul complex

O funcţie $f : [a, b] \to C$, continuă, este prin definiţie o curbă complexă. Continuitatea înseamnă $f(t) = u(t) + iv(t)$, cu funcţiile reale continue u şi v. Dacă u şi v sunt funcţii diferenţiabile, curba este denumită diferenţiabilă. Dacă $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b$ este o diviziune a lui $[a, b]$, şi restricţiile la $[x_{k-1}, x_k]$ funcţiilor continue f sunt diferenţiabile, spunem că f este diferenţiabilă pe porţiuni.

De exemplu: $f : [1, 2] \to C$,

$$f(t) = \begin{cases} t + ti; & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 + ti; & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

este o curbă diferenţiabilă pe porţiuni. Curba este de clasă C^k, dacă $f = u + iv$, cu u şi v de k ori continue diferenţiabile.

O mulţime deschisă $D \subset C$ astfel încât oricare două puncte să poată fi conectate printr-o curbă continuă (asta înseamnă $f(a) =$ primul punct, $f(b)=$ al doilea punct) este numită un domeniu complex.

1.6 Funcţii complexe

Fie $D \subset C$. O funcţie $f : D \to C$ este o funcţie complexă. Fiecare funcţie complexă are o parte reală si o parte imaginară: $f(z) = u(z)_i v(z)$, unde u şi v sunt funcţii reale. Adesea, vom scrie $u(x, y)$, în loc de $u(z)$, $z = x + iy$. Fiind o funcţie între spaţii metrice, f este continuă la z_0, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât $d(z, z_0) < \delta \Rightarrow d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$. Acest lucru este echivalent cu $(z_n \to z_0) \Rightarrow (f(z_n) \to f(z_0)$. f este continuă pe D dacă este continuă în orice punct al lui D. Următoarele propoziţii sunt imediate:

Propoziţia 3. *Fie $f : D \to C$, o funcţie complexă, $f(z) = u(z)+iv(z)$. Atunci:*

i) *f este continuă dacă u şi v sunt continue ca funcţii reale.*

ii) *dacă g este de asemenea o funcţie complexă, atunci $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$, sunt continue, arată că operaţiile au sens.*

Demonstraţie. Demonstraţia este la fel ca pentru funcţii reale.

$\diamondsuit$.

La fel ca şi secvenţele de puncte putem considera şi secvenţe de funcţii. O secvenţă (f_n) de funcţii, se spune că este convergentă dacă secvenţa $(f_n(z))$ este convergentă pentru orice $z \in D$ la anumite valori $f(z)$. Putem defini o distanţă (sau metric) între două funcţii prin $d(f, g) = \max_{z \in D} d(f(z), g(z))$. Cu privire la această distanţă setul tuturor funcţiilor $f : D \to C$ este un spaţiu metric. Dacă $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$

atunci spunem că convergenţa este uniformă. Acest lucru poate fi exprimat ca: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in N$ astfel încât $\forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \forall z \in D$, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Urmatoarea propoziţie este standard:
Propoziţia 4. Fie $(f_n)_{n\in N}$ o secvenţă de funcţii uniform convergente la f. Dacă f_n este continuă pentru orice n, atunci f este continuă.
Demonstraţie. Exerciţiu

$\diamondsuit$.

O secvenţă de funcţii este p secvenţă Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in N$, încât $\forall m > n > n_\varepsilon \Rightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon$. Atunci este uşor de văzut că pentru orice $z \in D$, $(f_n(z))$ este o secvenţă Cauchy de numere complexe, astfel, o secvenţă convergentă pentru anumite valori $f(z)$ şi (f_n) tind uniform către f. Acest lucru înseamnă că spaţiul tuturor funcţiilor continue $f : D \to C$ cu distanţa de mai sus, reprezintă un spaţiu metric complet. Din propoziţia anterioară reiese că spaţiul tuturor funcţiilor continue este de asemenea un spaţiu metric, cu aceiaşi dimensiune.

Următoarele teoreme oferă condiţii pentru convergenţa uniformă:
Teorema 5 (**Weierstrass**). *Fie $f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$ o serie de funcţii, $f_n : D \to C$ astfel încât $\max_{z\in D} |f_n(z)| \leq a_n \in R$, şi seria de numere pozitive $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ este convergentă. Atunci seria $f_1 + \ldots + f_n + \ldots$ este uniform convergentă.*
Demonstraţie. Fie $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ şi $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Fie $\varepsilon > 0$. Există $n_\varepsilon \in N$ astfel încât pentru $m > n > n_\varepsilon \Rightarrow |s_n - s_m| \leq \varepsilon$. Dar avem $d(S_n, S_m) = \max |f_{n+1}(z) + \ldots + f_m(z)|$, care este mai mic decât $\max |f_{n+1}(z)| + \ldots + |f_m(z)|$, care la rândul său este mai mic decât $a_{n+1} + \ldots + a_m \leq \varepsilon$.

Acest lucru demonstrează că (S_n) este o secvenţă Cauchy de funcţii, de unde şi uniform convergentă.
Observaţia 6. Din propoziţia anterioară dacă toate f_n sunt funcţii continue atunci şi suma f este de asemenea continuă.

1.7 Funţii complexe definite prin serii de puteri

Se consideră seria

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

O asemenea serie se numşte serie de puteri.

Teorema 7 (**Abel**). *Dacă seria de puteri este convergentă pentru* $z_0 \neq 0$*, atunci este absolut convergentă in* $D_0 = \{z | \, |z| < |z_0|\}$ *şi este uniform convergentă* $D_1 = \{z | \, |z| < r\}$*, pentru orice* $0 < r < |z_0|$.

Demonstraţie. Convergenţa pentru z_0 implică $a_n \cdot z_0^n \to 0$. Prin urmare, există o constantă pozitivă M astfel încât $|a_n z_0^n| \leq M$. Fie z un punct arbitrar in D_0. Atunci

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n < M \cdot q^n$$

unde $q = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$, şi acest lucru implică că seria este absolut convergentă. Dacă $z \in D_1$ atunci $|a_n z^n| \leq M q_1^n$, unde $q_1 = \left| \frac{r}{z_0} \right|$, nu depinde de $z \in D_1$, deci, din Teorema lui Weierstras, seria este uniform convergentă pe D_1.

$\diamondsuit$

Corolar 8. *Fie seria de puteri convergentă la* $D = |z| < R$*. Atunci funcţia dată de suma este continuă pe* D.

Demonstraţie. În orice disc mic de centru 0 avem, conform teoremei anterioare, o serie uniform convergentă de funcţii continue , astfel, suma este continuă.

$\diamondsuit$

Corolar 9. *Valoarea maximă a lui* R *pentru care seria este convergentă în* $|z| < R$ *este*:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Demonstraţie. După cum am vazut în demonstraţia teoremei lui Abel, dacă $|a_n z_0^n| \leq M$, pentru anumiţi M pozitivi şi orice n, atunci seria este convergentă în domeniul $|z| < |z_0|$. Astfel

$$R = \max\{r | \, |a_n r^n| \leq M_r \quad \text{for some} \quad M_r > 0 \quad \text{and any} \quad n \in N\}$$

$$= \max\{r | r \leq \frac{\sqrt[n]{M_r}}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{for some} \quad M_r > 0 \quad \text{and any} \quad n \in N\} =$$

$$= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$\diamondsuit$

Observaţia 10. Dacă $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to R$ atunci $\sqrt[n]{|a_n|} \to \dfrac{1}{R}$ şi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Fie $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m$ două polinomiale. Atunci:

$$p(z) \pm q(z) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)z + \ldots (a_k \pm b_k)z^k + \ldots, \ k \leq \max\{m, n\}$$
$$p(z)q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_k z^k + \ldots, \ k \leq m + n$$

unde

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$
$$\alpha p(z) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)z + \ldots + (\alpha a_k)z^k + \ldots, \ k \leq n.$$

Dacă p şi q sunt serii de puteri atunci suma, produsul şi înmulţirea cu scalar sunt definite ca mai sus cu $0 \leq k < \infty$.

Dacă $p(z)$ şi $q(z)$ sunt serii de puteri convergente cu sumele s_1 şi s_2 atunci se poate demonstra că $p(z) \pm q(z)$, $p(z)q(z)$ şi $\alpha p(z)$ sunt serii de puteri convergente cu $s_1 \pm s_2$, $s_1 \cdot s_2$ şi αs_1 ca fiind sumele lor. Demonstraţia nu este dificilă şi este lăsată ca exerciţiu.

Raţia $\dfrac{p(z)}{q(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots c_k z^k + \ldots = c(z)$ este definită prin condiţia $p(z) =\equiv c(z) \cdot q(z)$. Identificând coeficienţii din membrul stâng şi drept obţinem:

$$a_0 = c_0 b_0$$
$$a_1 = c_1 b_0 + c_0 b_1$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_k = c_k b_0 + c_{k-1} b_1 + \ldots + c_0 b_k$$

Dacă $b_0 = q(0) \neq 0$ sistemul de mai sus poate fi rezolvat pas cu pas şi se pot găsi coeficienţii c_k. Este mult mai dificil să se demonstreze că $c(z)$ este o serie de puteri convergentă dacă $p(z)$ şi $q(z)$ sunt convergente.

Dacă $q(0) = b_0 = 0$ atunci seria

$$p(q(z)) = a_0 + a_1 q(z) + a_2(q(z))^2 + \ldots + a_k(q(z))^k + \ldots$$

este bine definită deoarece $q(z)^k = d_k z^k + d_{k+1} z^{k+1} + \ldots$ şi pentru orice k numărul de coeficienţi $\neq 0$ din z^k este finit. Dacă $p(z)$ şi $q(z)$ sunt serii de puteri convergente atunci $p(q(z))$ este de asemenea convergentă în unele discuri de rază pozitivă.

1.8 Exerciţii

1. Calculaţi $(1+i)^{100}$, $\dfrac{3+4i}{2-i}$,, $(x+i)^3$, $1 + i + i^2 + \ldots + i^n$.
2. Reprezentaţi în planul complex numerele complexe
$2 + 3i$, $3i^{15} + (1+i)^3$.
3. Calculaţi $|2+i|$, $\overline{(4-5i)}^2$, $\left|\dfrac{2+i}{2-i}\right|$.
4. Gasiţi forma polară din $-3-4i$, $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{100}$, $(1 + i\cdot\tan\theta)^n$.
5. Calculaţi $\sqrt{-1+i}$, $\sqrt[3]{-2+2i}$.
6. Rezolvaţi ecuaţiile: $z^2 - z + i + 1 = 0$, $z^4 + 4(1-i)z^2 + 3 - 4i = 0$.
7. a) $|z-1+i| < 2$, b) $|z-i| = |z-1|$, c) $|z-2| < |z+1+2i|$, d) $|z-1| + |z-2| = 4$, e) $\left|\dfrac{z-1}{z-2}\right| < 2$, f) $\mathrm{Re}(z^2) < 4$.
8. Fie punctele A şi B reprezentând numerele complexe $z_A = 1+i$, $z_B = 2+3i$. Gasiţi coordonatele complexe ale punctului C astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral.
9. Demonstraţi că pentru orice trei numere complexe z_1, z_2, z_3 ?? avem: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$.
10. Demonstraţi că: $\mathrm{Im}(z) > 0$ implică $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1$.
11. Demonstraţi că: $\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n} = \dfrac{n}{2^n-1}$.

Indicaţie: Considerăm ecuaţia $\sin nx = 0$ cu rădăcinile $x = \dfrac{d\pi}{n}$, $k \in Z$. De la $\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n$ rezultă $nx = C_n^1 \sin x \cos^{n-1} x - C_n^3 \sin^3 x \cos^{n-2} x + \ldots$. Din aceasta obţinem ecuaţia algebrică cu o necunoscută $\sin x$. ??

12. Fie $z = x + iy$. Demonstraţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Indicaţie. Scrieţi forma polară a lui $z = x + iy$ folosind formula Moivre.

13. Gasiţi limitele: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} + i\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}{n^3} + i(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

14. ?? $\hat{C}$, $\hat{C}$. a) $f : C - \{0\} \to C$, $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, b) $f : C - \{0\} \to C$, $f(z) = \dfrac{2x+3}{z-1}$, c) $f : C - \{1, 2\} \to C$, $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z^2-3z+2}$.

15. ?? $1 + r\cos(x) + \dots r^k\cos(kx) + \dots$ şi $r\sin(x) + r^2\sin(2x) + \dots + r^k\sin(kx)\dots$, $0 \le r < 1$.

Indicaţie. Fie $z = r(\cos x + i\sin x)$ şi calculaţi $1 + z + z^2 + z^3 + \dots z^n + \dots$

16. Fie z_1, z_2, z_3 trei puncte necoliniare. Demonstraţi că $\left\{z?\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \dfrac{z-z_1}{z-z_2} = \text{real}\right\}$?? z_1, z_2, z_3.

17. ?? a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})z^n$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}z^n$.

18. Desenaţi următoarele curbe: a) $[0, 2\pi] \ni \theta \to \cos\theta + i\sin\theta$, b) $\{z|\,|z-1| = 2\}$, c) $[0, 1] \ni t \to t + t^2 i$, c) $\{z|\,|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = 1\}$, d) $[0, 2\pi] \ni \theta \to e^\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$.

19. Găsiţi părţile reale şi imaginare ale următoarelor funcţii complexe: a) $f(z) = z + z^2$, b) $f(z) = \dfrac{z-1}{z+2}$, c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

20. ?? $\sum\limits_n f_n(z)$?? $|z| < 1$: $a) f_n(z) = z^n$, b) $f_n(z) = \dfrac{z^n}{n^2}$, c) $f_n(z) = \dfrac{z+(-1)^n n}{n^2}$, d) $f_n(z) = \left(\dfrac{z-1}{z+2}\right)^n\dfrac{1}{2^n}$.

21. Fie $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $g(z) = 1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n$. Găsiţi puterea seriei $f(z) + g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$, $\dfrac{g(z)}{f(z)}$.

1.9 Funcţii diferenţiabile. Ecuaţiile Cauchy-Riemann

Fie f o funcţie complexă $f : D \to C$ unde D este un domeniu complex. Dacă există următoarea limită:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1}$$

atunci f se numeşte diferenţiabilă complexă (sau derivabilă complexă) la z_0 şi limita este notată cu $f'(z_0)$. Dacă f este o diferenţiabilă complexă în fiecare punct al lui D atunci f este diferenţiabilă complexă în D.

Următoarele proprietăţi sunt, valide pentru funcţii reale, sunt valabile şi în câmpul complex (se presupun f şi g derivabile complexe):

1. $(\alpha f + \beta g)'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z)$
2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, dacă $f(z) \neq 0$
4. $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$
5. $(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$, unde $w = f(z)$.

Funcţia $f(z) = z^n$ este derivabilă şi $(z^n)' = nz^{n-1}$, deoarece:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z \to z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \ldots + z_0^{n-1})}{z - z_0} = nz_0^{n-1}$$

Din 1.-4. funcţiile $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ (polinomiale) şi $\dfrac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 + \ldots + b_m z^m}$ (funcţii raţionale) sunt derivabile complexe.

Orice funcţie evaluată ca fiind complexă este suma dintre partea reală şi partea imaginară:

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x + iy) + iv(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

unde u şi v sunt reale. Se consideră funcţia $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Limita lui $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ când $z \to z_0$ este 1 în cazul $z = t + iy_0$ şi este -1 în cazul $z = x_0 + it$ (în ambele cazuri $t \in R$ şi $t \to 0$).

Următoarea teoremă explică când o funcţie complexă este o funcţie derivabilă:

Teorema 11. *Fie $f : D \to C$, $f = u + iv$ o funcţie complexă şi u, v diferenţiabile în $(x, y) \in D$. Atunci f este derivabilă complexă în $z = x + iy$ dacă şi numai dacă sunt adevărate următoarele ecuaţii:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{2}$$

În plus

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3}$$

Demonstraţie. *Necesitate.* Se presupune că u şi v sunt diferenţiabile în z şi f este diferenţiabilă complexă. Atunci pentru t real

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = f'(z), \quad t \in R.$$

Prima limită este

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i\frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Analog, a doua limită este $\dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Inegalitatea limitelor implică (2)

Suficient. Să presupunem că u şi v sunt diferenţiabile şi (2) este adevărată. Atunci

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) = \\ &= u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + e_1 + \\ &+ i\left(v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \Delta y + e_2\right) = \\ &= f(z) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + e_1 + e_2, \end{aligned}$$

unde $\dfrac{e_1}{\Delta|z|} \to 0$ şi $\dfrac{e_2}{\Delta|z|} \to 0$.

Prin urmare

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e_1 + e_2}{\Delta z} + \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Acest lucru demonstrează derivabilitatea complexă a lui f.

$\diamondsuit$

Exemplul 12. Fie $f(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$. Atunci $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin(y)$, astfel, f este derivabilă complexă şi prin $f'(z) = f(z)$. Această funcţie va fi notată cu e^z, şi este uşor de vazut că $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. Numărul complex $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ poate fi scris $re^{i\theta}$.

Exerciţiul 13. Fie

$$\sin(z) = \frac{e^{ix} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2},$$

$$\tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

Demonstraţi că sunt derivabile complexe şi

$$\begin{aligned}
&\cos'(z) = -\sin(z)\\
&\sin'(z) = \cos(z)\\
&\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1\\
&\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\\
&\sin(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right).
\end{aligned}$$

În general identităţile dintre funcţiile reale trigonometrice sunt adevărate şi pentru argumentele complexe.

Exerciţiul 14. Fie $\mathrm{sh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\mathrm{ch}(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$. Arătaţi că $\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$, $\mathrm{ch}(z) = \cos(iz)$, $\mathrm{sh}(z) = -i\sin(iz)$ sunt derivabile complexe şi $\mathrm{sh}'(z) = \mathrm{ch}(z)$, $\mathrm{ch}'(z) = \mathrm{sh}(z)$.

Exerciţiul 15. Fie $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$. Arătaţi că condiţiile Cauchy-Riemann sunt echivalente pentru $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(f) = 0$.

Exerciţiul 16. Fie $u(r,\theta) + i \cdot v(r,\theta)$ o funcţie complexă ($z = r \cdot e^{i\theta}$).

Demonstraţi condiţiile Cauchy-Riemann în coordonate polare:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Sugestie. De la $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, urmează

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -r \cdot \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + r \cdot \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Înlocuind aceste relaţii în formulele din exerciţiu observăm cu uşurinţă echivalenţa cu ecuaţiile Cauchy-Riemann.

Exerciţiul 17. Fie

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Demonstraţi că $\sqrt[n]{z}$ este derivabilă complexă pentru $0 < \theta < 2\pi$ şi $(\sqrt[n]{z})' = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{(\sqrt[n]{z})^{n-1}}$.

Sugestie. Folosiţi exerciţiul anterior sau 5).

Exerciţiul 18. Fie $\ln(z) = \ln(r) + i(\theta + 2k\pi)$, $z = re^{i\theta}$. Demonstraţi că $\ln(z)$ este derivabilă complexă pentru $0 < \theta = \arg(z) < 2\pi$, $\ln'(z) = \dfrac{1}{z}$ şi $e^{\ln(z)} = z$.

Sugestie. Utilizaţi Cauchy-Riemann pentru coordonate polare sau 5).

Corolar 19. *Fie $f = u + iv$ o derivabilă complexă în D, fie u şi v de două ori derivabile continuu. Atunci $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ şi $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Această consecinţă poate fi exprimată ca $\Delta u = 0$ şi $\Delta v = 0$ unde $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ (operatorul Laplace).*

Demonstraţie. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\right) \equiv 0.$
Similar pentru v.

$\diamondsuit$

Aceste funcţii u şi v sunt denumite conjugate armonice.
Teorema 20. *Fie D un domeniu simplu conex şi $u(x,y)$ armonic în D. Atunci există $v(x,y)$ armonic în D conjugat la $u(x,y)$ (acest lucru se întâplă dacă $f = u + iv$ este derivabilă complexă în D).*
Demonstraţie. Fie $(x_0, y_0$ orice punct în D. Integrala

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C$$

nu depinde de curba ce uneşte punctele de capăt deoarece

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

din ipoteză. În plus

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Din Cauchy-Riemann, $f = u + iv$ este derivabilă.
Exemplul 21. Găsiţi $v(x,y)$ dacă $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$.
Funcţia u este armonică în C, astfel, există v astfel încât

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy.$$

Prima ecuaţie oferă $v(x,y) = -3y^2x + x^3 + h(y)$. Înlocuind în a doua, se obţine

$$-6xy + h'(y) = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy$$

de unde $h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c \Rightarrow v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + c$ şi

$$f(x,y) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2) + c = i(x+iy)^3 + c = iz^3 + c.$$

Dacă f este o diferenţiabilă complexă în fiecare punct al lui D atunci f este diferenţiabilă complexă în D.

1.10 Ramuri de funcţii analitice

După cum am văzut funcţiile $\ln(z)$ şi $\sqrt[n]{z}$ nu sunt definite pe tot câmpul complex. Motivul este discontinuitatea argumentului pe $C - \{0\}$. ln este definită ca inversul funcţiei exponenţiale. Dându-se $z \in C$, $z = x + iy$ soluţiile ecuaţiei

$$Z = X + iY$$

$$e^X(\cos Y + i\sin Y) = e^Z = z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$$

sunt $X = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, $Y = \arg(z) + 2k\pi$. Prin urmare $\ln(z) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + i(\arg z + 2k\pi)$. Când z descrie o curbă închisă, ce parcurge originea în sensul invers acelor de ceasornic, $\arg(z)$ creşte cu 2π. Astfel, $\arg(z)$ şi $\ln z$ nu sunt continue pe acea curbă şi pe niciun domeniu ce deţine o asemenea curbă. Suntem forţaţi să scoatem unele mulţimi din C pentru a nu permite în rest, curbe închise în jurul lui zero. Îndepărtând $\{z | \arg(z) = \theta\}$ obţinem o funcţie logaritmică pentru care $\theta < \arg(z) < \theta + 2\pi$. Aceasta funcţie realizează o corespondenţă de unu la unu între $C - \{z | \arg(z) = \theta\}$ şi domeniul $\{Z | \theta < \mathrm{Im}(Z) < \theta + 2\pi\}$.

Funcţia radical $\sqrt[n]{z}$ definită mai sus depinde de $\arg(z)$ şi trebuie să scoatem unele mulţimi din C pentru a nu permite în rest curbe închise în jurul lui zero, pentru a avea o funcţie radical continuă. Îndepărtând, ca şi pentru funcţia logaritm, $\{z | \arg(z) = \theta\}$, obţinem o corespondenţă de unu la unu $\sqrt[n]{z}$ la zona $C - \{z | \arg(z) = \theta\}$.

Funcţia radical poate fi definită printr-un logaritm precum $\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}\ln(z)}$. Este mai uşor de verificat $(\sqrt[n]{z})^n = z$. În general una defineşte $z_1^{z_2} = e^{z_1 \ln(z_2)}$. Această expresie nu este nici unică doarece $\ln z$ nu este unic definită.

O funcţie olomorfă $f(z)$ definită într-un anumit domeniu, astfel încât $(f(z))^\alpha = z$ în acel domeniu este numită o ramură a lui z^α.

1.11 Transformări Conforme

Fie D o mulţime deschisă $R^2 = C$ şi $f : D \to C = R^2$, $f(x+iy) = (u(x,y), v(x,y))$. Fie $\gamma : t \to \gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) \in R^2$ o cale de derivabilitate, $t \in [0, a]$. Atunci $f(\gamma(t))$ are la $t = 0$ următoarea tangentă la

$t = 0$

$$\left(\frac{d}{dt}u(\alpha(t), \beta(t)\right), \quad \frac{d}{dt}v(\alpha(t), \beta(t))|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{du}{dx}(x_0, y_0)\alpha'(0) + \frac{du}{dy}(x_0, y_0)\beta'(0), \frac{dv}{dx}(x_0, y_0)\alpha'(0) + \frac{dv}{dy}(x_0, y_0)\beta'(0)\right)$$

sau în formă matricială

$$\left(\begin{array}{c} \frac{d}{dt}(u(\alpha(t), \beta(t)) \\ \frac{d}{dt}(v(\alpha(t), \beta(t)) \end{array}\right)_{t=0} = \left(\begin{array}{cc} \frac{du}{dx}(x_0, y_0) & \frac{du}{dy}(x_0, y_0) \\ \frac{dv}{dx}(x_0, y_0) & \frac{dv}{dy}(x_0, y_0) \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} \alpha'(0) \\ \beta'(0) \end{array}\right).$$

Pentru ca transformarea liniară dată de matricea de mai sus, să păstreze unghiurile dintre vectori şi să aibă un determinant pozitiv este necesar şi suficient ca matricea să fie (vezi lema de mai jos)

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{du}{dx}(x_0, y_0) & \frac{du}{dy}(x_0, y_0) \\ \frac{dv}{dx}(x_0, y_0) & \frac{dv}{dy}(x_0, y_0) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array}\right).$$

Acest lucru este echivalent cu $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$ la (x_0, y_0) aceasta este condiţia Cauchy-Riemann. Obţinem următoarea teoremă

Teorema 22. *Fie $D_1 \subset C$, $D_2 \subset C$ două domenii complexe şi f : $D_1 \to D_2$ o transformare cu Jacobian pozitiv C^1 (cu alte cuvinte C^1 este un diffeomorphism preserving orientation). Apoi f păstrează unghiul dintre curbe dacă f este o funcţie regulată.*

Demonstraţie. Demonstraţia urmăreşte consideraţiile de mai sus şi lema următoare

$\diamondsuit$

Lema 23. *Fie $T : R^2 \to R^2$ o transformare lineară care păstrează unghiurile dintre vectori şi are un determinant pozitiv. Apoi matricea lui T în conformitate cu baza naturală a lui R^2 este* $\left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array}\right)$.

Demonstraţie (pentru lemă). Fie $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to T(\vec{\imath}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Atunci $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \vec{\imath}$ de unde $T(\vec{\imath}) \perp T(\vec{\jmath})$, astfel $T(\vec{\jmath}) = \begin{pmatrix} -\rho b \\ \rho a \end{pmatrix}$. Dar $\angle(\vec{\imath}+\vec{\jmath}, \vec{\imath}) = \frac{\pi}{4} = \angle(T(\vec{\imath}) + T(\vec{\jmath}), T(\vec{\imath}))$. Acest lucru implică vectorii $\vec{0}$, $(\vec{\imath}) + T(\vec{\jmath})$, $T(j)$ fac un pătrat de unde $|\rho| = 1$ sau $\rho = \pm 1$. Matricea lui T este

$$(T(\vec{\imath})\ T(\vec{\jmath})) = \begin{pmatrix} a & -\rho b \\ \rho b & \rho a \end{pmatrix}.$$

Determinantul matricei este pozitiv doar pentru $\rho = 1$. Acest lucru termină demonstraţia teoremei şi a lemei.

$\diamondsuit$

Exemplul 24. Funcţia fracţională lineară

Se consideră funcţia $f(z) = \dfrac{ax+b}{cz+d}$ unde

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Această funcţie este definită pe $C - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ şi ia valori în C. Dacă $z \to -\dfrac{d}{c}$ atunci $f(z) \to \infty$ şi dacă $z \to \infty$ atunci $f(z) \to \dfrac{a}{c}$. Prin urmare f poate fi extinsă prin continuitate la $\hat{f} : \hat{C} \to \hat{C}$, $f - \left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$, $\hat{f}(\infty) = \dfrac{a}{c}$ şi $\hat{f}(z) = f(z)$ pentru $z \in C - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Raţia $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ este numită raţia nearmonică a numerelor z_1, z_2, z_3, z_4.

Teorema 25. Fie f o funcţie fracţională raţională. Atunci

a) $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$

b) z_1, z_2, z_3, z_4 aparţine aceluiaşi cerc sau aceleiaşi linii dreapte dacă $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in R$

c) Dacă z_1, z_2, z_3 aparţine aceluiaşi cerc sau aceleiaşi linii dreapte atunci $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ aparţin aceluiaşi cerc sau aceleiaşi linii drepte

d) Dându-se trei puncte distincte z_1, z_2, z_3 şi un al doilea set de trei puncte distincte w_1, w_2, w_3 există şi numai o transformare fracţională lineară f astfel încât $f(z_1) = w_1,\ f(z_2) = w_2,\ f(z_3) = w_3$.

Demonstraţie. a) Fie $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Demonstraţia pentru a) este un calcul direct.

b) z_1, z_2, z_3, z_4 aparţin aceluiaşi cerc sau aceleiaşi linii drepte dacă $\angle(z_1 - z_3, z_2 - z_3) = \angle(z_1 - z_4, z_2 - z_4)$ sau $\angle(z_1 - z_3, z_2 - z_3) + \angle(z_1 - z_4, z_2 - z_4) = \pi$ (aici $z_1 - z_3$ este un vector începând la z_3 şi sfârşind la z_1 etc). Prima condiţie este echivalentă cu $\arg\left(\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \arg\left(\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right)$ sau $\arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ sau $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in R_+$. A doua condiţie este echivalentă cu $\arg\left(\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \pi - \arg\left(\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}\right)$ sau $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \pi$ sau $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in R_-$.

c) Rezultă din b)

d) Ecuaţia $(z_1, z_2, z_3, z) = (w_1, w_2, w_3, f(z))$ oferă $f(z)$

$\diamondsuit$

Determinantul Jacobian al lui f este pozitiv. Acest lucru implică că partea dreaptă a curbei este transformată î n partea dreaptă a imaginii sale şi analog pentru partea stângă. Se consideră funcţia $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$. Această funcţie este fracţional lineară $f(-1) = i,\ f(0) = -1,\ f(1) = -i$. Cercul ce trece prin $-1, 0, 1$ (de fapt o linie dreaptă) se transformă într-un cerc, trecând prin $i, -1, -i, i, r$ cercul unitate. Partea stângă a liniei drepte (luând [...] ca orientare pozitivă) se transformă în partea stangă a cercului unitate (luând $i, -1, -i$ ca orientare pozitivă) i.e. discul unitate.

Exemplul 26. Transformarea fracţională lineară ce transformă semiplanul $\mathrm{Im}(z) > 0$ în semiplanul $\mathrm{Im}w > 0$ este $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ unde a, b, c, d sunt reale şi $ab - cd > 0$. Întradevăr, de la $(-1, 0, 1, z) = (\alpha, \beta, \psi, f(z))$, $\alpha, \beta, \psi \in R$ rezultă $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ cu $a, b, c, d \in R$. De la $\mathrm{Im}f(i) > 0$ rezultă $ad - bc > 0$.

Exemplul 27. Funcţia $w = f(z) = z^2$. Funcţia este o bijectivă între

$\{z|\mathrm{Im}(z) > 0\}$ şi $C - [0, \infty)$. Transformarea inversă este $z \to \sqrt{z}$.
Exemplul 28. Funcţia $w = f(z) = \exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$ urmează $\{z|z = x + iy, \theta < y < \theta + 2\pi\}$ conform cu $C - \{w|\arg(w) = \theta\}$ şi urmează intervalul $\{z|0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ până la semiplanul superior.
Exemplul 29. Funcţia $w = f(z) = z^\alpha$, $\alpha > 0$, urmează sectorul $0 < \arg(z) < \dfrac{\pi}{\alpha}$ până la semiplanul superior $\{w|\mathrm{Im}(w) > 0\}$.
Exemplul 30. Prin compunerea transformărilor conforme se pot obţine transformări interesante. Fie $D_1 = \{z|\mathrm{Im}(z) > 0\} - \{yi|0 \leq y \leq h\}$ este transformată în $\xi \in D_2 = C - [-h^2, \infty)$. Prin $\eta = \xi + h^2 D_2$ este transformat în $D_3 = C - [0, \infty)$. Funcţia $\eta \to w = \sqrt{n}$ transformă D_2 în $D_4 = \{w|\mathrm{Im}(w) > 0\}$. Compunerea celor trei transformări este $z \to \sqrt{z^2 + h^2}$ şi transformă D_1 în semiplanul superior.
Exemplul 31. Funcţia Zhukovskii, este funcţia $w = u + iv = J(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. Următoarele propoziţii aduc funcţiei nişte proprietăţi.
Propoziţia 32. a) f este univalentă într-un domeniu D dacă $z_1, z_2 \in D \Rightarrow z_1 z_2 \neq 1$

b) imaginea de rază $\left\{z|\arg(z) = \alpha, \alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}\right\}$ este o ramură a hiperbolei $\dfrac{u^2}{\cos^2(\alpha)} - \dfrac{v^2}{\sin^2(\alpha)} = 1$ ce corespunde cu $u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos(\alpha)$, $v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin(\alpha)$. Raza ce corespunde cu $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ este transformată în axa imaginară $u = 0$.

c) Cercul $|z| = r \neq 1$ este transformat în elipsa $\dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1$ unde $a = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$, $b = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)$

d) Cercul $|z| = 1$ este transformat în segmentul $[-1, 1]$ traversat de două ori.

e) Discul $|z| < 1$ este transformat conform în exteriorul segmentului $[-1, 1]$.

f) J transformă conform demicercul $|z| < 1$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ în semiplanul inferior $v = \mathrm{Im}(w) < 0$.

g) J transformă domeniul $|z| > 1$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ în semiplanul superior $\mathrm{Im}(w) > 0$.

Demonstraţie. a) Este uşor de văzut că $J(z_1) = J(z_2) \Leftrightarrow z_1 z_2 = 1$.

b-g) Dacă $z = re^{i\alpha}$ şi $w = J(z) = u+iv$, atunci $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\alpha)$, $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\alpha)$ şi rezultatul se află uşor.

$\diamondsuit$

1.12 Exerciţii

1. Calculaţi e^{1+2i}, $\sin(2+i)$, $\tan(i)$, $\ln(1+3i)$, $\mathrm{sh}(i+1)$.

2. Aflaţi partea reală şi partea imaginară a $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\tan(z)$, $\cot(z)$, $\mathrm{sh}(z)$, $\mathrm{ch}(z)$.

3. Demonstraţi că pentru $f = u + iv$ olomorfă, curbele $u(x, y) =$ const., $v(x, y) =$ const., sunt ortogonale.

4. Fie u armonică. Demonstraţi că $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ este armonică.

5. Găsiţi funcţiile olomorfe $f = u + iv$, astfel încât

a) u depinde numai de $x^2 + y^2$

b) $\frac{u}{v}$ depinde numai de y

c) $u(x, y) = \dfrac{x(1+x) + y^2}{1 + x^2 + y^2}$

d) $u(x, y) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$

e) $u(x, y) = \dfrac{\sin(2x)}{\mathrm{ch}(2y) - \cos(2y)}$

f) $u(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 3x + 2}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$

g) $u(x, y) = a \cdot \arg(z) + b, \quad z = x + iy.$

h) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

6. Aflaţi constantele astfel încât următoarele funcţii să fie olomorfe

a) $f(x + iy) = x + ay + i(bx_cy)$

b) $f(x + iy) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$.

7. Aflaţi imaginea $0 < x,\ y < 1$ din

a) $f(z) = (2 + i)z + i$

b) $f(z) = iz$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

8. Aflaţi transformarea fracţională lineară care transformă semiplanul superior $\mathrm{Im}(z) > 0$ în:

a) semiplanul $\{s + i\sigma | s > \sigma\}$

b) discul $[w|\ |w-1| < 1]$

c) semiplanul $\{w|\mathrm{Re}(w) > 1\}$.

9. Aflaţi o transformare fracţională lineară astfel încât $1 \to i$, $i \to 0$, $0 \to 2i$.

10. Găsiţi imaginile următoarelor domenii prin corespondenţa funcţiilor olomorfe:

a) $D = \{z|\mathrm{Re}z \in (-1/2, 1/2),\ \mathrm{Im}z > 0\},\ f(z) = \sin(\pi z)$

b) $D = \{z|\mathrm{Re}z \in (0,1),\ \mathrm{Im}z > 0\},\ f(z) = \cos(\pi z)$

c) $D = \{z|\ |z| > 1,\ \mathrm{Im}z > 0\},\ f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

d) $D = \{z|\ |z| < 1,\ \mathrm{Im}z > 0\},\ f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.

11. Găsiţi imaginea $\mathrm{Re}z = c$ (const.) la $f(z) = z^2$.

12. Demonstraţi că orice transformare fracţională lineară ce face din discul unitate, un disc unitate este $z \to f(z) = c\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, unde c şi a sunt complexe şi $|c| = 1$, $|a| < 1$.

1.13 Integrarea în câmpul complex

Fie $\gamma : [a,b] \to D \subset C$ a C^1 o clasă de curbe şi $f : D \to C$ continuă, $f = u + iv$. Se defineşte:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)\cdot(dx+idy) = \left(\int_\gamma udx - vdy\right) + i\left(\int_\gamma vdx + udy\right).$$

După cum ştim partea dreaptă din egalitatea de mai sus nu se schimbă dacă schimbăm parametrizarea lui γ.

Exemplul 33. Calculaţi $\displaystyle\int_{|z|=R} z^n dz$. Calea este orientată în sens invers acelor de ceasornic. Curba $|z| = 1$ poate fi parametrizată $t \to \mathrm{Re}^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Integrala este

$$\int_0^{2\pi} R^n(\cos nt + i\sin nt)\cdot R(-\sin t + i\cos t)dt =$$

$$= iR^{n+1}\int_0^{2\pi}(\cos(n+1)t + i\sin(n+1)t)dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Dacă curba γ este pe porţiuni C^1, integrala este definită ca o sumă de integrale de peste C^1 părţi de γ. Avem:

Propoziţia 34.

a) $\displaystyle\int_\gamma (af(z) + bg(z))dz = a\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz$

b) Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ o diviziune a $[a,b]$ (curba γ este definită pe $[a,b]$) şi fie $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $z_i = \gamma(t_i) = x(t_i) + \sqrt{-1}y(t_i)$, $\xi_i = \gamma(\zeta_i) = x(\zeta_i) + \sqrt{-1}y(\zeta_i)$. Atunci $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)(z_i - z_{i-1})$.

c) $\displaystyle\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$

d) $\displaystyle\int_{\gamma_1\cdot\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

e) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{z\in \mathrm{Image}(\gamma)} |f(z)| \cdot \mathrm{length}(\gamma)$

f) Fie $f_n \to f$ uniform pe γ. Atunci $\displaystyle\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$.

Demonstraţie. a) Este evidentă.

b) Fie $f = u + \sqrt{-1}v$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)(z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{i=n}(u(x(\zeta_i), y(\zeta_i)) - x(t_{i-1}))-$$
$$-\sum_{i=1}^{i=n} v(x(\zeta_i), y(\zeta_i))(x(t_i) - x(t_{i-1})+$$
$$+\sqrt{-1}\left[\sum_{i=1}^{i=n} v(x(\zeta_i), y(\zeta_i))(x(t_i) - x(t_{i-1}))+\right.$$
$$\left. +u(x(\zeta_i), y(\zeta_i))(x(t_i) - x(t_{i-1}))\right] \to$$
$$\to \int_\gamma udx - vdy + \sqrt{-1}\int_\gamma vdx + udy = \int_\gamma fdz.$$

c), d), f) sunt evidente datorită proprietăţilor integralei liniare.

e) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\lim_{|\delta|\to 0}\sum f(\xi_i)(z_i - z_{i-1})\right| \leq \lim_{|\delta|\to 0}\sum |f(\xi_i)||z_i - z_{i-1}| \leq$

$$\leq \max|f| \lim_{|\delta|\to 0}\sum |z_i - z_{i-1}| = \max|f| \cdot \text{length}(\gamma).$$

$\diamondsuit$

1.14 Teorema şi consecinţele integralei lui Cauchy

Teorema 35. Presupunem că o funcţie $f : D \to C$ este de clasă C^1 şi D este un domeniu simplu conex. Apoi f este olomorfă în D dacă $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pentru orice curba închisă ce se află în D.

Demonstraţie. $0 = \int_\gamma f(z)dz \Leftrightarrow \int_\gamma udx - vdy = 0, \int_\gamma vdx + udy = 0.$ Conform teoremei Riemann-Green ultimele două egalităţi sunt adevărate pentru orice γ dacă $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}$ şi $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(u)}{\partial x}$, sau ecuaţiile Riamann-Green.

$\diamondsuit$

Corolar 36. *Fie D un domeniu complex cu un număr finit de componente pe porţiuni pe graniţa sa. Dacă f este olomorfă în D şi continuă în $\bar{D}$, $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$. Graniţa lui D este orientată astfel încât D să se situeze în stânga lui ∂D. Notând cu Γ graniţa exterioară şi cu $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ graniţele interioare orientate în sens invers acelor de ceasornic, atunci*:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_i \int_{\Gamma_i} f(z)dz \qquad (4).$$

Demonstraţie. $\partial D = \Gamma \cup (-\Gamma_1) \cup \ldots \cup (-\Gamma_n)$, unde $-\Gamma_i$ reprezintă Γ_i cu orientare inversă. Fie $\gamma = A_0A \cdot \Gamma \cdot AA_0 \cdot A_0A_1 \cdot (-\Gamma_1) \cdot A_1A_0 \cdot \ldots c\dot{A}_0A_n \cdot A_nA_0$ unde A_0A_i căi de clasă C^1 în interiorul lui D ce conectează $A_0 \in D$ cu $A_i \in \Gamma_i$ şi A_0A conecteză pe A_0 la $A \in \Gamma$. Atunci γ este o cale închisă şi f este o funcţie olomorfă în D de unde $\int_\gamma f(z)dz = 0$ sau

$$\int_{A_0A} f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz + \int_{AA_0} f(z)dz + \int_{A_0A_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \ldots = 0.$$

Considerându-se că $\int_{AA_0} f(z)dz = -\int_{A_0A} f(z)dz$, se obţine rezultatul. $\diamondsuit$

Corolar 37. *Dacă o funcţie este olomorfă într-un domeniu simplu conex D, atunci $\int_\gamma f(z)dz$ depinde doar de punctele de capăt ale lui γ.*

Teorema 38. a) *Dacă o funcţie g este olomorfă în D, atunci există f în D astfel încât $\forall z \in D \Rightarrow F'(z) = f(z)$ şi $\int_{z_1}^{z_2} g(z)dz = f(z_2) - f(z_1)$.*

b) *Orice funcţie f dată de o serie de puteri convergentă pe $D(z_0, R)$, $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ este o funcţie olomorfă.*

c) *Î plus este infinit derivabilă şi f' se obţine derivând f termen cu termen.*

d) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ (5)

Demonstraţie. a) Fie $f(z) = \int_{z_0}^{z} g(t)dt$ integrala ce preia orice cale ce conectează z_0 şi z în interiorul lui D. Atunci $f(z)$ este bine definită şi

$$\frac{(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} g(t)dt = \frac{1}{h}\int_0^h g(z+t)dt = \frac{1}{h}\int_0^h (g(z)+w(z,t))dt$$

cu $|w(z,t)| \to 0$ când $t \to 0$. Astfel

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z) + \frac{1}{h}\int_0^h w(z,t)dt \to g(z) \quad \text{când} \quad h \to 0$$

întrucât

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h w(z,t)dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\max|w| \cdot |h| \to 0.$$

b) Fie $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ şi $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_0)^k$. Funcţia f este de clasă C^1, f_n este olomorfă în domeniul $D = \{z|\, |z - z_0| < R\}$ şi $f_n \to f$ uniformă în orice domeniu $D_1 = \{z|\, |z - z_0| < R_1 < R\}$. Fie γ orice cale închisă din D. Atunci γ există în D_1 pentru $R_1 < R$. Atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} = 0$$

deci, f este olomorfă.

c) Se consideră

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

care este convergentă în $|z - z_0| < R$.

Fie

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Atunci $g_n(z) = f_n'(z)$, $f_n(z) = a_0 + \int_{z_0}^{z} g(\xi) d\xi$, $g_n \to g$ uniform, de unde

$$a_0 + \int_{z_0}^{z} g(\xi) d\xi = a_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{z_0}^{z} g_n(\xi) d\xi = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

şi c) rezultă din a)

d) $f^{(n)}(z) = n! a_n + (n+1)n(n-1) \cdot \ldots 2 a_{n+1}(z - z_0) + \ldots$, la c), de unde $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$.

$\diamondsuit$

1.15 Reprezentarea integralelor şi extinderea seriilor de puteri

Teorema 39 (Formula integrală a lui Cauchy). *Fie $f : D \to C$ o funcţie olomorfă şi $D_1 \subset D$, $\Gamma = \partial D_1 \subset D$, ∂D_1 părţi conexe de clasă C^1, $z \in D_1$ (cu alte cuvinte Γ este o curbă închisă în D şi z este situată în interiorul lui Γ). Atunci* (*Formula integrală a lui Cauchy*):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{6}$$

Demonstraţie. Fie $D_\varepsilon = \{\eta | \, |\eta - z| < \varepsilon\} \subset D_1$ şi $\partial D_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon$. Funcţia $g(\eta) = \dfrac{f(n)}{\eta - z}$ este olomorfă în $D_1 - D_\varepsilon$ şi $\partial(D_1 - D_\varepsilon) = \Gamma \cup (-\Gamma_\varepsilon)$. Potrivit corolarului anterior

$$\int_{\Gamma} f(\eta) d\eta = \int_{\Gamma_\varepsilon} g(\eta) d\eta \tag{7}$$

$$f(\eta) = f(z) + \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z}(\eta - z) = f(z) + w(z, \eta) \cdot (\eta - z)$$

cu $|w(z, \eta)|$?? în D_1. Atunci

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} g(\eta) d\eta = f(z) \underbrace{\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{\eta - z} d\eta}_{=2\pi i} + \int_{\Gamma_\varepsilon} w(z, \eta) dz =$$

$$= f(z) \cdot 2\pi\sqrt{-1} + \int_{\Gamma_\varepsilon} w(z, \eta) d\eta.$$

Dar $\left|\int_{\Gamma_\varepsilon} w(z, \eta)\right| \leq \max |w| \cdot \text{length}(\Gamma_\varepsilon) = \max |w| \cdot 2\pi\varepsilon \to 0$, as $\varepsilon \to 0$. Luând în ambele părţi din 7 limita pentru $\varepsilon \to 0$ se verifică formula 6.

$\diamondsuit$

Corolar 40. Funcţia f de clasă C^1 este olomorfă în D dacă în jurul oricărui punct $z \in D$, f admite o reprezentare (6)
Demonstraţie. Dacă f este olomorfă atunci am demonstrat formula (6). Invers, formula (6) poate fi derivată sub integrală şi se obţine

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^2} d\eta.$$

$\diamondsuit$

Observaţia 41. Acest corolar oferă o nouă caracterizare pentru funcţiile olomorfe.

Se rescrie formula $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ utilizând parametrizarea $\xi = z + re^{i\theta}$. Obţinem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta$$

ce demonstrează următorul corolar.
Corolar 42. *Valoarea unei funcţii olomorfe în z este media valorilor lui f pe orice cerc cu centrul în z.*

O consecinţă imediată este
Corolar 43 (**principiul modulului maxim**). *Fie f olomorfă în D şi continuă în $\bar{D}$. Atunci $|f|$ atinge minimul şi maximul în ∂D. Dacă $|f|$ atinge un maxim în interiorul lui D atunci f este constantă.*

Anterior am demonstrat că orice serie de puteri convergentă oferă o funcţie olomorfă. Reciproca este de asemenea adevarată. Următoarea teoremă oferă o afirmaţie precisă.

Teorema 44 a) *Fie $f : D \to C$ o funcţie de clasă C^1. Atunci f este olomorfă în D dacă $\forall z_0 \in D$, într-o anumită vecinătate a lui z_0 f poate fi scrisă*

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$$

Coeficienţii a_n sunt definiţi de

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi$$

γ fiind orice curbă închisă pe porţiuni de clasă C^1 ce înconjoară z_0($\gamma = \partial D_1$, $D_1 \subset D$, $z \in D_1$)

b) *F este infinit derivabilă şi coeficienţii a_n sunt unic definiţi de*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} = n!a_n.$$

Demonstraţie a) Fie $D(z_0, r) \subset D$. Pentru $z \in D(z_0, r)$ avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)\left(1 + \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}d\xi = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}\left(1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^2} + \ldots\right) = \tag{10}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi}_{a_0} + \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}d\xi}_{a_1}\right)(z - z_0). \tag{11}$$

Am folosit aici $|z-z_0| < |\xi - z_0|$ şi progresia geometrică este uniform convergentă la $\{\xi| \, |\xi - z_0| = r\}$. Dacă $\gamma = \partial D_1$, $z \in D_1 \subset D$ şi r este suficient de mic astfel încât $D(z_0, r) \subset D_1$, atunci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} = a_n,$$

b) Este o consecinţă a lui a) şi (5).

◊

Observaţia 45. Dezvoltarea în jurul lui z_0 poate fi scrisă:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots$$

şi raza de convergenţă este cel puţin distanţa dintre z_0 şi graniţa lui D.
Exemplul 46. Fie $f(z) = e^z$, $z_0 = 0$, $f'(z) = f''(z) = \ldots = f^{(n)}(z) = e^z$ şi $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Atunci

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n + \ldots$$

Exemplul 47. Fie $f(z) = \sin(z)$, $z_0 = 0$. Folosind dezvoltarea pentru e^{iz} şi e^{-iz} obţinem

$$\sin(z) = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Exemplul 48. Analog

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Exemplul 49. $\ln'(1+z) = \dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$.
Integrând ambele părţi

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

$$\ln'(1-z) = -\frac{1}{1-z} = -1 - z - z^2 - \ldots - z^n.$$

Integrând
$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots - \frac{z^n}{n} \ldots$$
Exemplul 50. $f(z) = (1+z)^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}$, $f'(z) = \alpha \cdot \dfrac{1}{1+z} e^{\alpha \ln(1+z)} = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$. Prin introducerea $f^{(n)} = \alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$. Folosind proprietatea logaritmului pentru care $\ln(1) = 0$, atunci $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)$ şi
$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots$$
Mai jos sunt adunate unele caracterizări ale funcţiilor olomorfe, demonstrate în teoremele precedente.

Teorema 51. *Fie $f : D \to C$ o funcţie de clasă C^1, D fiind un domeniu complex. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

a) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ *există pentru orice $z_0 \in D$.*

b) *Dacă $f = u + iv$, u, v - funcţii reale, atunci $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$.*

c) $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ *pentru orice cale închisă, deformabilă într-un punct din D.*

d) $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ pentru orice $z \in D$, γ o cale din D, în jurul lui z (mai precis $\gamma = \partial D_1 \ni z$, $D_1 \subset D$. γ poate avea una sau mai multe componente).

e) Pentru orice $z_0 \in D$, $\exists r > 0$, astfel încât pentru $|z - z_0| < r$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

f) Dacă f este un diffeomorfism între D şi $f(D)$, atunci a-e) sunt echivalente cu faptul că f este o transformare conformă şi menţine orientarea.

1.16 Serii Laurent

Teorema 52 (**Dezvoltarea Laurent**). *Fie f olomorfă pe domeniul*

$D = \{z | r < |z - z_0| < R\}$. *Atunci*

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots \quad (12)$$

unde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (13)$$

γ *este o cale închisă în* D *în jurul lui* z_0. *Dezvoltarea este unică.*
Demonstraţie. Fie $D_1 = \{r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R\}$. Atunci

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned}$$

Prima integrală este

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

unde a_n sunt date (11). Pentru cea de-a doua integrală obţinem

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)}{(z - z_0)\left(1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \left(1 + \frac{\xi - z_0}{z - z_0} + \frac{(\xi - z_0)^2}{(z - z_0)^2} + \ d\right) =$$

$$= a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi$$

deoarece $\left|\dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| < 1$ pe $|\xi - z_0| = r_1$. Împreaună aceste două extinderi demonstrează existenţa extinderii Laurent. Convergenţa este uniformă pe D_1. Se ia în considerare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{d\xi}{(\xi - z_0)^n} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad n = 1 \\ 0 & \text{for} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

şi presupunând (12) atunci se obţine uşor (13) demonstrându-se unicitatea lui a_n.

$\diamondsuit$

Exemplul 53. Fie $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$. Rădăcinile numitorului sunt 1 şi 2. În discul $|z| < 1$ funcţia este olomorfă şi avem o dezvoltare Taylor.

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = (1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) z^n.$$

În intervalul $1 < |z| < 2$ dezvoltarea se schimbă deoarece $|z|$ nu mai este mai mic decât 1 şi se foloseşte $|1/z| < 1$ în progresia geometrică.

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$$

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{2^n} + \ldots\right) - \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) =$$

$$= \ldots - \frac{1}{z^2} + \ldots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}z + \ldots - \frac{1}{2^{n+1}}z^n + \ldots$$

În domeniul $|z| > 2$, avem $\left|\frac{1}{z} < 1\right|$ şi $\left|\frac{2}{z} < 1\right|$, astfel, dezvoltările progresiei geometrice trebuie să utilizeze ca raţii $\frac{1}{z}$ şi $\frac{2}{z}$

$$f(z) = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) +$$

$$+\frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1 + 2^{n-1})\frac{1}{z^n}.$$

1.17 Exerciţii

1. Calculaţi $\int_{|z|=r} \left(z^2 + 3z + \frac{4}{z}\right) dz$.
2. Calculaţi $\int_g (z^2 + z - 1)dz$ unde $\gamma : [0, 1] \to C$, $\gamma(t) = t + it^2$.
3. Găsiţi dezvoltările funcţiilor

   a) $f(z) = \sin^3 z$, $z_0 = 0$.

   b) $f(z) = \sqrt[3]{1+z}$, $z_0 = 0$, $f(0) = 0$.

   c) $f(z) = \ln \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$, $z_0 = 0$, $f(1) = 0$.

   d) $f(z) = \cos^2 z$, $z_0 = 0$.

   e) $f(z) = \arctan z$, $z_0 = 0$, $f(0) = 0$.

   f) $f(z) = \arcsin z$, $z_0 = 0$, $f(0) = 0$.

   g) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, $z_0 = 0$.

   h) $f(z) = \sqrt{z^2 - 3z + 2}$, $z_0 = 0$, $f(0) > 0$.
4. Găsiţi dezvoltările funcţiilor

   a) $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)}$ în jurul lui $z_0 = 0$.

   b) $f(z) = \frac{1}{(z^3 - 2z^2 + z - 2)}$ în jurul lui $z_0 = 2$.

   c) $f(z) = \frac{e^{1/}}{1 - z}$ în jurul lui $z_0 = 2$.

   d) $f(z) = e^{\frac{z+i}{z-i}}$ în jurul lui $z_0 = i$.

   f) $f(z) = \tan z$ în jurul lui $z_0 = 2$.
5. Folosind formula integrală Cauchy, calculaţi

   a) $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz$.

   b) $\int_{|z|=2} \frac{z - 4}{z^2 - 4z + 3} dz$.

c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^4}{(z-1)^3} dz.$

6. Demonstraţi că pentru orice funcţie derivabilă complexă $f : D \to C$, D simplu conex şi f diferit de zero, există $F : D \to C$, derivabilă complexă, astfel încât $f = e^F$.

Sugestie: $\dfrac{f'}{f}$ admite o primitivă G. De la $G' = \dfrac{f'}{f}$ rezultă $\left(\dfrac{e^G}{f}\right)' = 0$ de unde $f = \text{const} \cdot e^G$.

7. Demonstraţi că pentru orice funcţie derivabilă complexă $F : D \to C$, D simplu conex şi f diferit de zero, există $g : D \to C$, derivabilă complexă, astfel încât $g^2 = f$.

Soluţie: $f = e^F$, deci $g = e^{\frac{F}{2}}$.

8. Demonstraţi că pentru o funcţie olomorfă f din interiorul discului $|z| < R$, astfel încât $|f(z)| < M_r$ pe $\{z|\, |z| = r\}$, coeficienţii dezvoltării $f(z) = \sum a_n z^n$ satisfac inegalităţile $|a_n| \leq \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{M_r}{r^n}$ (Inegalităţile lui Cauchy).

Sugestie: Folosiţi $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$ şi propoziţia 34.

9. Fie $f : C \to C$ olomorfă şi $|f(z)| \leq M$ pentru orice $z \in C$. Demonstraţi că f este constant. (Liouville).

Sugestie: $f(z) = \displaystyle\sum_n a_n z^n$ şi folosiţi exerciţiul anterior pentru a estima $|a_n|$.

10. Fie $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_k z^k + \ldots + a_0$, $n \geq 1$ o funcţie polinomială cu coeficienţi complecşi. Demonstraţi că există $z_0 \in C$ cu $p(z_0) = 0$.

Sugestie: Presupuneţi că $p(z)$ este diferit de 0. Atunci $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ este o funcţie olomorfă mărginită $f : C \to C$, şi din exerciţiul anterior este constantă. Contradicţie.

11. Presupuneţi că f transformă discul unitate în el însuşi şi $f(0) = 0$. Demonstraţi că $|f(z)| \leq |z|$ şi dacă $|f(z)| = |z|$ pentru $z \neq 0$ atunci $f(z) = cz$ pentru anumite constante c cu $|c| = 1$.

Soluţie: Fie $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ pentru $z \neq 0$ şi $g(0) = f'(0)$. g este olomorfă şi $|g(z)| = \dfrac{f(z)}{z} \leq \dfrac{1}{r}$ pe orice cerc de rază $r < 1$. Principiul modulului maxim implică $|g(z)| \leq \dfrac{1}{r}$ pe discul de rază r. Lu ând $r \to 1$ rezultă $|g(z)| \leq 1$ pe discul unitate. Dacă $|g(z)| = 1$ undeva în interiorul discului unitate, atunci principiul modulului maxim implică $|g(z)| \equiv 1$ şi g este constant.

1.18 Puncte singulare

Fie $f : D - \{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n\} \to C$ olomorfă în D (D - domeniu în C) cu excepţia punctelor $z_1, z_2, \ldots, z_n \in D$. Punctele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sunt numite puncte singulare ale lui f. În jurul lui z_0, în intervalul $0 < |z - z_0| < r$, f poate fi dezvoltată în serie Laurent

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} a_i (z - z_0)^i. \tag{14}$$

Evident că, pentru $z = z_0$, f nu este definită. Se pot întâmpla mai multe lucruri în jurul lui z_0. Mai jos z_0 există pentru orice punct singular al lui f.

Teorema 54. *Fie f cu dezvoltarea* (14) *în jurul lui z_0. Atunci*

a) *Dacă $|f(z)|$ este delimitată într-o vecinătate a lui z_0, atunci dezvoltarea* (14) *are numai puteri pozitive de $(z - z_0)$, $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$, şi luând $f(z_0) = a_0$, funcţia devine regulară la z_0. z_0 este denumit punct singular mobil.*

b) *Dacă $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ atunci dezvoltarea* (14) *este de forma*

$$\sum_{i=-n}^{\infty} a_i (z - z_0)^i \quad a_{-n} \neq 0 \quad n \in N \quad n \neq 0.$$

Punctul z_0 se numeşte pol de ordinul n.

c) *Dacă nu sunt valabile* a) *sau* b) *atunci dezvoltarea* (14) *este infinită în ambele direcţii şi pentru orice $w \in C$ există o secvenţă $z_n \to z_0$ astfel încât $f(z_k) \to w$. z_0 este numit punct singular esenţial.*

Demonstraţie. a) $a_n = \int_{|z-z_0|=r} f(\xi)(\xi - z_0)^{-n-1} d\xi$, deci, pentru $n \leq -1$, $|f(\xi)| \leq M$?? $r \to 0$ găsim $|a_n| \leq Mr^{-n-1} \cdot 2\pi r = 2\pi M r^{-n} \to 0$. ?? $a_n = 0$ pentru $n \leq 0$. ??

b) Dacă

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + a_0 + \ldots =$$

$$= \frac{a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \ldots + a_0(z-z_0)^n + \ldots}{(z-z_0)^n} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$$

unde $g(z)$ este olomorfic ?? z_0 atunci

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} \right| = \infty.$$

??, if $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$?? $z_0 |f(z)| \geq 1$, deci $h(x) = \dfrac{1}{f(z)}$ este olomorfic, atunci

$$\frac{1}{f(z)} = b_n(z-z_0)^n + b_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \ldots, \quad n \geq 1, \quad b_n \neq 0.$$

??

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n (b_n + b_{n+1}(z-z_0) + b_{n+2}(z-z_0)^2 + \ldots)}.$$

Dar $\dfrac{1}{b_n + b_{n+1}(z-z_0) + \ldots} = c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots$, este olomorfic în jurul lui z_0. În final, $f(z) = \dfrac{c_0}{(z-z_0)^n} + \dfrac{c_1}{(z-z_0)^{n_1}} + \ldots + c_n + \ldots$, ?? z_0 ?? n.

c) În contrast cu a) şi b) $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)|$ nu există, este echivalent cu o infinitate de puteri negative ale dezvoltării Laurent. Se presupune că z_0 este un punct singular esenţial şi $a \in C$ nu este limita unei secvenţe $(f(z_n))_{n \in N}$ unde $z_n \to z_0$. Atunci pe anumite vecinătăţi U la z_0, $|f(z) - a| \geq \varepsilon > 0$. Acest lucru implică că

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a} = a_p(z-z_0)^p + a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \ldots p \geq 0, \quad a_p \neq 0$$

este olomorfă în jurul lui z_0. De unde

$$\begin{aligned} f(z) &= a+\frac{1}{g(z)} = a+\frac{1}{(z-z_0)^p(a_p+a_{p+1}(z-z_0)+\ldots)} = \\ &= \frac{z_0}{(z-z_0)^p}+\frac{c_1}{(z-z_0)^{p-1}}+\ldots \end{aligned}$$

după cum am văzut la b), contrazicerea lui z_0 este o singularitate esenţială.

$\diamondsuit$

Observaţia 55. Demonstraţia lui b) arată că $h(z_0)=h'(z_0)=\ldots=h^{(n-1)}(z_0)=0$, $h^{(n)}\neq 0$ sau $h(z)=(z-z_0)^n h_1(z)$, $h_1(z_0)\neq 0$ implică că z_0 este un pol de ordinul n pentru $f(z)=\dfrac{1}{h(z)}$. Analog dacă $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, $g(z_0)\neq 0$.

Observaţia 56. Dacă z_0 este un punct singular pentru f atunci într-o anumită vecinătate a lui z_0 nu mai sunt alte puncte singulare deoarece $\sum\limits_{i=-\infty}^{i=\infty} a_i(z-z_0)^i$ este convergentă pentru $z\neq z_0$.

Fie acum o funcţie f periodică într-o vecinătate punctată z_0 (vecinătate cu z_0 îndepărtată) şi se consideră integrala lui f pe un cerc mic în jurul lui z_0.

$$\begin{aligned} &\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz = \int_{|z-z_0|=r}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\cdot dz = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\int_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^n dz\right) = a_{-1}\int_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^{-1}dz = 2\pi i\cdot a_{-1}. \end{aligned}$$

Definiţia 57. Numărul

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz$$

este numit reziduul lui f în punctul z_0 şi este notat cu $Res(f,z_0)$.

Exemplul 58. Fie $f(z)=e^{1/z}$. Atunci la $z_0=0$ dezvoltarea lui $f(z)$ este

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z!}\frac{1}{z^n}=\ldots+frac1/n!z^n+\ldots+\frac{1}{z}+1.$$

Prin urmare $Res(f,0) = Res(e^{1/z},0) = -1$.
Teorema 59. *Fie f o funcţie periodică într-o vecinătate punctată $z_0 \in C$. Dacă z_0 este pol de ordin n atunci*

$$Res(f,z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z - z_0} ((z-z_0)^n \cdot f(z))^{(n-1)}.$$

În particular dacă $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, $g(z_0) = 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ atunci z_0 este pol de ordinul 1 şi

$$Res(f,z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Demonstraţie. $f(z) = \dfrac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dfrac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + a_0 + \ldots$ şi

$$((z-z_0)^n f(z))^{(n-1)} = (a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} +$$
$$+ a_0(z-z_0)^n + \ldots)^{(n-1)} = (n-1)! a_{-1} + n! a_0 (z-z_0) + \ldots$$

şi reiese rezultatul.

$\diamondsuit$

Exemplul 60.

$$Res\left(\frac{1}{(z^2+1)^2}, i\right) = \lim_{z \to i} \frac{1}{1!} \left((z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z^2+1)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z \to i} \left(\frac{1}{(z^2+1)^2}\right)' = -2 \cdot \frac{1}{(z^2+i)^3}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{4i}$$

Exemplul 61. Fie z_0 una dintre rădăcinile lui $z^n + 1 = 0$. Apoi z_0 este pol de ordinul 1 al funcţiei $f(z) = \dfrac{1}{z^n+1}$ şi

$$Res\left(\frac{1}{z^n+1}, z_0\right) = \frac{1}{nz^{n-1}}\bigg|_{z=z_0} = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = -\frac{z_0}{n}.$$

Exemplul 62. Pentru funcţii ca $f(z) = e^{1/z} \cdot \dfrac{1}{1-z}$, reziduul la $z_0 = 0$ poate fi calculat doar prin dezvoltare în jurul acestui punct

$$f(z) = \left(\ldots + \frac{1/n!}{z^n} + \ldots + \frac{1/2!}{z^2} + \frac{1/1!}{z} + 1\right) \cdot (1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots) =$$

$$\ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\right) \cdot \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots$$

Apoi $Res(f,0) = a_{-1} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots = e - 1 = 1.71828$.

În contradicţie cu $z_0 = 0$ care este o singularitate esenţială, punctul $z_1 = 1$ este un pol de ordinul 1, de unde $Res(f,1) = \frac{e^{1/1}}{-1} = -e$.

Definiţia 63. O funcţie olomorfă definită în D cu excepţia unui set de puncte izolate de puncte polare, se numeşte meromorfă în D.

Teorema 64 (**Teorema Reziduurilor**). *Presupunem că $f(z)$ este periodică în domeniul simplu conex D cu excepţia unui set finit de puncte singulare $z_1, z_2, \ldots, z_n$ şi presupunem că γ o curbă simplă închisă în D (fără puncte autointersectate), pe porţiuni C^1, ce conţine $z_1, \ldots, z_n$ în interiorul său şi orientată pozitiv (domeniul închis de γ se află la stânga lui γ). Atunci*

$$\int_\gamma = f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Demonstraţie. Fie E domeniul închis de γ cu discuri mici D_k în jurul lui z_k îndepărtat. Apoi γ este marginea exterioară a lui E şi ∂D_k sunt marginile interioare. Prin urmare

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_k \int_{\partial D_k} f(z)dz = \sum_k 2\pi i \cdot Res(f, z_k).$$

$\diamondsuit$

1.19 Folosirea reziduurilor pentru evaluarea integralelor definite

19.1. Integralele $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta, \quad R = \text{funcţie raţională}$$

Propoziţia 65. Integrala este

$$I = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{iz}\right) dz.$$

Demonstraţie. Fie $z = e^{i\theta}$. Atunci

$$\cos\theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2}, \quad \sin\theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{(2i)}, \quad d\theta = -i\frac{dz}{2}.$$

Dacă θ ia valori de la 0 la 2π, z ia valori pe cercul $|z| = 1$ şi

$$I = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{iz}\right) dz = \int_{|z|=1} R_1(z)dz.$$

După teorema reziduurilor

$$I = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} Res(R_1, z_k)$$

unde $z_1, z_2, \ldots$ sunt polii lui R_1 pe discul $|z| < 1$.

$\diamondsuit$

Exemplul 66. Fie $|a| < 1$. Atunci

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - 2a\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2} \cdot \frac{1}{iz} dz =$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{1}{az^2 - (a^2+1)z + a} idz = 2\pi i \cdot Res(f, a) =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{i}{(az^2 - (a^2+1)z + a)'_{z=a}} = \frac{2\pi}{1-a}.$$

19.2. Integralele $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx, \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \ P, Q \text{ polinoame } \deg Q \geq \deg P + 2.$$

Propoziţia 67. Integrala este

$$I = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,(z_k)>0} Res(R, z_k).$$

Demonstraţie. Fie $\gamma_R = [-R, R] \cdot \Gamma_R$, unde Γ este demicercul din semiplanul superior ce conectează $(R, 0)$ cu $(-R, 0)$. Fie D_R domeniul închis de γ. Atunci

$$2\pi i \sum_{z_k \in D_R} Res(f, z_k) = \int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz.$$

Pe măsură ce $R \to \infty$ partea din stânga tinde către suma tuturor reziduurilor din semiplanul superior. Prima integrală din partea dreaptă tinde la $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$. Cea de-a doua integrală din partea stângă este marginită de

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| \cdot \pi R \leq \frac{A}{R^2}\pi R = \frac{\pi A}{R} \to 0$$

datorită ipotezei $\deg(Q) \geq 2+\deg(P)$. Acum luând limitele din ambele părţi obţinem rezultatul.

$\diamondsuit$

Exemplul 68.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{100}}dx = 2\pi i \sum_{Im(z_k)>0} Res\left(\frac{1}{1+z^{100}}, z_z\right) =$$

$$= 2\pi i \sum_{Im(z_k)>0} \frac{1}{100 z_k^{99}} = 2\pi i \sum_{Im(z_k)>0} \left(-\frac{z_k}{100}\right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{50} \sum_{k=0}^{k=49} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{100}} = \frac{\pi}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{100}\right)}.$$

19.3. Integralele $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} R(x)dx$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} R(x)dx, \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

$a > 0$, P and Q polinoame $\deg P < \deg Q$.
Propoziţia 69. *Integrala este*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} R(x)dx = 2\pi i \sum_{Im(z_k)>0} Res(e^{iaz}R(z), z_k).$$

Pentru a evalua integrale de acest tip folosim
Lema 70 (**Lema lui Jordan**). *Fie $a > 0$ şi următoarele condiţii să fie îndeplinite*:

1. *O funcţie $g(z)$ este continuă pe domeniul $Im(z) \geq 0$, $|z| \geq R_0$*

2. $M(R) = \max_{z \in C_R} |g(z)| \to 0$ as $R \to \infty$,
unde Γ_R este demicercul $|z| = R$, $Im(z) \geq 0$. Atunci

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} g(z) \cdot e^{iaz} dz = 0.$$

Demonstraţie. Presupunem $z \in \Gamma_R$, $z = Re^{i\theta}$, $dz = iRe^{i\theta} d\theta$, şi

$$|e^{iaz}| = |e^{ia(R\cos\theta + i\sin\theta)}| = e^{-aR\sin\theta}.$$

Deoarece

$$\frac{1}{\pi}\theta \leq \sin\theta \leq \theta \quad \text{for} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Atunci

$$0 \leq \left| \int_{\Gamma_R} e^{iaz} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in C_R} |g(z)| \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} R d\theta \leq$$

$$\leq M(R) \cdot 2R \cdot \int_0^{2\pi} e^{-aR\sin\theta} d\theta \leq 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-aR\frac{2}{\pi}\theta} d\theta =$$

$$= M(R)\frac{\pi}{a}(1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R\to 0} 0$$

$\diamondsuit$

Observaţia 71. Dacă $a < 0$ atunci suma se prelungeşte peste reziduuri cu partea negativă imaginară.
Observaţia 72. Dacă ipoteza ce priveşte dezvoltarea lui g este valabilă pentru $\{z | 0 \leq \alpha \leq \arg(z) \leq \beta \leq \pi\}$ atunci limita superioară este zero pentru integrala luată peste $C_R = \{z | \, |z| = R, \ \alpha \leq \arg(z) \leq \beta\}$.
Demonstraţie (a propoziţiei). Se consideră contorul $\gamma_R = [-R, R]$. Atunci

$$2\pi i \sum_{z_k \ inside \ \gamma_R} Res(e^{iaz} g(z), z_k) = \int_{-R}^{R} e^{iax} g(x) dx + \int_{\Gamma_R} e^{iaz} g(z) dz$$

unde $g(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

Pe masură ce $R \to \infty$ partea stângă tinde la

$$2\pi i \sum_{Im(z_k)>0} Res\left(e^{iaz}\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)$$

şi cea dreaptă la $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}\frac{P(x)}{Q(x)}dx + 0$ datorită lemei lui Jordan.

$\diamondsuit$

Exemplul 73. Pentru a evalua $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos(5x)}{x^2-2x+5}dx$ se consideră simultan integrala $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin(5x)}{x^2-2x+5}dx$. Atunci

$$I + iJ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{i5x}}{x^2-2x+5}dx = 2\pi i \cdot Res\left(\frac{(z-1)e^{i5z}}{z^2-2z+5}, 1+2i\right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \left.\frac{(z-1)e^{i5z}}{2z-2}\right|_{z=1+2i} = \pi e^{-10}(-\sin 5 + i\cos 5).$$

Integrala este $I = -\pi e^{-10}\sin 5$.

19.4. Integralele $\int_0^{\infty} x^a R(x)dx$, $I = \int_0^{\infty} x^a R(x)dx$, $R =$ funcţie raţională

$$\lim_{z\to 0} |z^{a+1}R(z)| = \lim_{z\to\infty} |z^{a+1}R(z)| = 0$$

$a =$??, R ?? $[0,\infty)$.

Propoziţia 74. Integrala este

$$I = \frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi a}} \sum_{z_k \in C-[0,\infty)} Res(z^a R(z), z_k). \tag{15}$$

Demonstraţie. Avem nevoie de ipoteza de convergenţă. Fie $\gamma_{R,\varepsilon}$ calea $[\varepsilon, R]\cdot\Gamma_R\cdot[R,\varepsilon]$, unde $\arg(z)$ pe primul interval este 0, Γ_R este cercul de rază R şi centru 0, orientat în sens invers acelor de ceasornic, $\arg(z)$ pe cel de-al doilea interval este 2π şi Γ_ε este cercul de rază ε şi centru 0, orientat în sens orar. Funcţia $z^\alpha R(z)$ este bine definită pe $C-[0,\infty)$ luând $(\rho e^{i\theta}) = \rho^a e^{i\theta a}$ pentru $0 < \theta < 2\pi$. Această definiţie z^α poate fi extinsă continuu pe $\gamma_{R,\varepsilon}$, pentru $\theta = 0$ sau $\theta = 2\pi$ (ρ şi $\rho e^{i2\pi}$ reprezintă diferite puncte ale γ_R). Fie $D_{R,\varepsilon}$ domeniul închis de $\gamma_{R,\varepsilon}$. Atunci

$$2\pi i \sum_{z_k\in D_{R,\varepsilon}} Res(z^a R(z), z_k) = \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} z^a R(z)dz =$$

$$= \int_{[\varepsilon,R]} z^a R(z)dz + \int_{\Gamma_R} z^a R(z)dz + \int_{[R,\varepsilon]} z^a R(z)dz + \int_{\Gamma_\varepsilon} z^a R(z)dz.$$

Când $R \to \infty$ şi $\varepsilon \to 0$ suma se prelungeşte peste toate reziduurile pe $C - [0, \infty)$. Prima integrală tinde la I. A doua integrală tinde la 0 deoarece

$$\left| \int_{\Gamma_R} z^a R(z) dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma_R} |z^a R(z)| \cdot 2\pi R = 2\pi \max_{z \in \Gamma_R} |z^{a+1} R(z)| \to 0. \quad (16)$$

A treia integrală oferă

$$\int_{[R,\varepsilon]} z^a R(z) dz = - \int_\varepsilon^R \rho^a e^{i2\pi a} R(\rho) d\rho =$$

$$= -e^{i2\pi a} \int_\varepsilon^R x^a R(x) dx \to -e^{i2\pi a} I.$$

A patra integrală tinde la 0 datorită unei inegalităţi precum (16).

De unde, luând limitele în ambele părţi obţinem rezultatul.

$\diamondsuit$

Exemplul 75. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x(x+1)} dx$, $0 < \alpha < 1$. Integrala este convergentă. Atunci

$$I(1 - e^{i2\pi\alpha} = 2\pi i \cdot Res \left(\frac{z^\alpha}{z(z-1)}, -1 \right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{(-1)^\alpha}{-1} = 2\pi i \cdot \frac{\cos\alpha + i \sin\alpha}{-1}.$$

După un calcul scurt $I = \dfrac{\pi}{\sin\alpha}$.

19.5. Integralele

$$\int x^a (\ln(x))^m R(x) dx, \quad I = \int x^a (\ln(x))^m R(x) dx, \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

integrala este convergentă, $m \in N$, $a \notin Z$.

Propoziţia 76. Fie integrala $I_{m,a}$. Atunci

$$I_{m,a} - e^{i2\pi a}(I_{m,a} + 2\pi m i I_{m-1,a} + \ldots) =$$

$$= 2\pi i \sum_{z_k \in C - [0,\infty)} Res(z^a (\ln(z))^m R(z), z_k).$$

Paranteza este

$$\int_0^\infty x^a(2\pi i + \ln(x))^m R(x)dx = I_{m,a} + 2\pi I_{m-1,a} + \ldots$$

Demonstraţie. Se consideră $\gamma_{R,\varepsilon}$ pentru integrala anterioară şi se integrează $z^a(\ln z)^m R(z)$ peste $\gamma_{R,\varepsilon}$. Pentru $z = \rho e^{i\theta}$, $\ln(z) = \ln(\rho) + i\theta$, $0 < \theta < 2\pi$ şi definiţia este extinsă pe $\gamma_{R,\varepsilon}$, luând $\theta = 0$ pe $[0, R]$ şi $\theta = 2\pi$ pe $[R, 0]$. Pentru limitele $\varepsilon \to 0$ şi $R \to \infty$ integralele peste Γ_R şi Γ_ε, tind la zero şi teorema reziduurilor oferă rezultatul ca şi pentru (15)

$\diamondsuit$

Exemplul 77. Se evaluează integrala $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x)dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$. Potrivit formulei de mai sus $\left(1 = -\dfrac{1}{2}, m = 1\right)$

$$I_{1,\frac{1}{2}} - e^{-i2\pi\frac{1}{2}} + 2\pi i I_{0,-\frac{1}{2}} = 2\pi i \cdot Res\left(\frac{z^{-\frac{1}{2}}\ln(z)}{(z+1)^2}, -1\right) =$$

$$= 2\pi i \cdot (z^{-\frac{1}{2}}\ln(z))'_{z=-1} = \frac{\pi}{2} + i.$$

Integrala noastră este

$$I_{1,-\frac{1}{2}} \cdot I_{0,-\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Înlocuind $I_{0,-\frac{1}{2}}$ mai sus obţinem $I = I_{1,-\frac{1}{2}} = -\pi$.

19.6. Integralele

$$\int_0^\infty (\ln x)^m \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \quad I_m = \int_0^\infty (\ln x)^m \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Propoziţia 78. Integala rezultă din

$$I_{m+1} - \int_0^\infty (2\pi i + \ln x)^{m+1}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum Res\left((\ln z)^{m+1} \cdot \frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)$$

sau

$$-2\pi i(m+1)I_m + 4\pi^2\frac{(m+1)m}{2}I_{m-1} + \ldots - (2\pi i)^{m+1}I_0 =$$

$$= 2\pi i \sum Res\left((\ln z)^{m+1} \cdot \frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right).$$

Demonstraţie. Demonstraţia este în esenţă la fel ca şi pentru cele două propoziţii anterioare, integrând $(\ln z)^{m+1} \cdot \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ peste $\gamma_{R,\varepsilon}$.

$\diamondsuit$

Exemplul 79. Se evaluează integrala $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

Se poate folosi metoda precedentă ($m = 0$) şi obţinem

$$-2\pi i I_0 = 2\pi i \sum Res\left(\frac{\ln z}{(z^3+1)^2}, z_k\right)$$

unde

$$z_k = \sqrt[3]{-1} \in \{-1, e^{i\pi/3}, e^{i\pi/3}, e^{i5\pi/3}\}.$$

$$Res\left(\frac{\ln z}{(z^3+1)^2}, -1\right) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\left((z+1)^2 \frac{\ln z}{(z+1)^2(z-e^{i\pi/3})^2(z-e^{i5\pi/3})^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\ln z}{(z^2-z+1)^2}\right)_{z=-1} = \frac{2\pi i - 1}{9}.$$

Analog se află reziduurile pentru $e^{i\pi/3}$ şi $e^{i5\pi/3}$. Înlocuind în formula de mai sus rezultă $I = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{27}$.

1.20 Exerciţii

1. Găsiţi şi clasificaţi punctele singulare ale funcţiilor

a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z - z^2}$.

b) $f(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}(z - z^2)$.

c) $f(z) = \dfrac{z-2}{z^2 - 2z + 1}$.

d) $f(z) = \dfrac{z - \pi}{\sin z - 1}$.

e) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{(z^1+1)^2(z-1)}$.

2. Calculaţi

a) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{\sin z}{z-z^2}dz.$

b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{1/z}}{z-1}dz.$

c) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{1}{\sin z}dz.$

d) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz.$

3. Calculaţi

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}d\theta.$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{5+3\cos\theta}d\theta,\ n \in N.$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{2+\cos\theta}d\theta.$

4. Calculaţi

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{100}+1}dx.$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx.$

5. Calculaţi

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx.$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos nx}{(x^2+1)^2}dx,\ n \in N.$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 2ix - 2} dx.$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + x + 1} dx.$

6. Arătaţi că

a) $\int_0^{\infty} x^{1/3} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{6}\pi\sqrt{3}.$

b) $\int_0^{\infty} x^{-1/3} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \pi + \frac{1}{3}\pi\sqrt{3}.$

7. Arătaţi că

a) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{x^4 + 1} dx = 0$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln^2 x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{64}\pi^3$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln^2 x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{24}\pi$

8. Arătaţi că

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3} \ln x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{6}\pi^2$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3} \ln x}{x^4 + 1} dx = -\frac{\pi^2}{24}$

9. Fie $f : D \to C$ olomorfă în D. Fie $z_0 \in D$ şi $f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots$, este un zero de ordin n a lui $f(z)$. Demonstraţi că $Res\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) = n.$

10. Fie $D_1 \subset D$ cu $\partial D_1 \subset D$ pe porţiuni C^1 şi $f : D \to C$ olomorfă şi diferită de zero ∂D_1. Demonstraţi că $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_a n_a$ unde suma se prelungeşte peste toate zerourile ale lui f din interiorul lui D_1 şi n_a semnifică ordinul rădăcinii a.

Sugestie: Se aplică teorema reziduurilor $\frac{f'}{f}$ şi se foloseşte exerciţiul precedent.

11. Fie f ca în exerciţiul precedent. Demonstraţi că

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_1} d(\arg f) = \sum_a n_a.$$

Sugestie: $\ln f = \ln|f| + i\arg f$, de unde $\frac{f'}{f}dz = d\ln|f| + i d\arg f$ pe ∂D_1. Se aplică exerciţiul precedent.

Capitolul 2

Transformatele Fourier şi Laplace

2.1 Serii Fourier pentru funcţii 2π periodice

Fie $f : R \to C$ o funcţie 2π periodică, integrabilă Riemann sau echivalent, $f : [-\pi, \pi) \to C$ este extinsă prin periodicitate la R. Seria Fourier a lui f este suma

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \tag{1}$$

unde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi} \pi f(\theta) d\theta \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi} \pi f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi} \pi f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \ n \geq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Mai multe consideraţii conduc la formulele de mai sus.

• Se consideră seria (1) uniform convergentă. Apoi multiplicând (1) cu $\cos(n\theta)$ şi integrând de la π la π obşinem:

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}\pi f(\theta)\cos(n\theta)d\theta=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}\pi 1d\theta+\\&+\sum_{k=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}\pi\cos(k\theta)\cdot\cos(n\theta)d\theta+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}\pi\sin(k\theta)\cdot\cos(n\theta)d\theta.\end{aligned}\tag{3}$$

Dar

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}\pi 1\cdot\cos(n\theta)d\theta=0;\quad\int_{-\pi}\pi\cos(k\theta)\cos(n\theta)=\pi\delta_{kn};\\&\int_{-\pi}\pi\sin(k\theta)\cos(n\theta)=0,\quad\int_{-\pi}\pi 1\cdot\sin(n\theta)d\theta=0;\\&\int_{-\pi}\pi\cos(k\theta)\sin(n\theta)d\theta=0;\quad\int_{-\pi}\pi\sin(k\theta)\sigma(n\theta)d\theta=\pi\delta_{kn}.\end{aligned}\tag{4}$$

Folosind (4) în (3) se obţine formula pentru a_n. Multiplicând [...] cu $\sin(n\theta)$ şi integrând de la $-\pi$ la π se obţine formula pentru b_n. Integrând (1) de la $-\pi$ la π se obţine formula a_0.

• Expresia

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}\pi f(x)\bar{g}(x)dx$$

este un produs scalar pe spaţiul funcţiilor complexe continue $f:[-\pi,\pi]\to C$. Folosind acest produs scalar se obţine norma

$$||f||=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\int_{-\pi}\pi f(x)\bar{f}(x)dx}\overset{(for\ real\ f}{=}\sqrt{\int_{-\pi}\pi f^2(x)dx}$$

şi se obţine distanţa dintre două funcţii

$$d(f,g)=||f-g||=\sqrt{\int_{-\pi}\pi(f(x)-g(x))\overline{(f(x)-g(x))dx}}=$$

$$=\sqrt{\int_{-\pi}\pi|f(x)-g(x)|^2dx}.$$

Se consideră spaţiul V înmulţit cu $1,\cos(\theta)\sin(\theta),\ldots,\cos(n\theta),\sin(n\theta)$. O funcţie $g\in V$ astfel încât

$$d(f,g)=\min_{h\in V}d(f,h)$$

este de forma

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

şi coeficienţii sunt astfel încât

$$E(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = \int_{-\pi} \pi |f(x) - g(x)|^2 dx = d^2(f, g) = \lim_{h \in V} d^2(f, h).$$

Se consideră spaţiul real vectorial V, şi prin urmare $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ reale. Folosind (4) expresia pentru E devine:

$$\begin{gathered} E(a_0, a_1, b_1, \ldots, b_n) = \int_{-\pi} \pi f^2(x) dx + \\ + \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k^2 + b_k^2) \right) - a_0 \int_{-\pi} \pi f(x) dx - \\ -2 \sum_{k=1}^{k=n} \left(a_k \int_{-\pi} \pi f(x) \cos(kx) dx + b_k \int_{-\pi} \pi f(x) \sin(kx) dx \right) \end{gathered} \tag{5}$$

Sistemul (pentru E minim)

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} =; \quad \frac{\partial E}{\partial a_k} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial b_k} = 0; \quad 1 \le k \le n$$

are (2) ca soluţie. Înlocuind (2) în (5) obţinem

$$0 \le E = \int_{-\pi} \pi f^2(x) ds - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k^2 + b_k^2) \right) \tag{6}$$

Luând $n \to \infty$ se obţine

$$0 \le \int_{-\pi} \pi f^2(x) dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right) \tag{7}$$

cunoscută ca inegalitatea lui Bassel.

În lemele de mai jos, se dau demonstraţiile doar pentru $\cos(nx)$. Pentru $\sin(nx)$ se procedează analog. Aceste leme sunt necesare pentru demonstrarea teoremei lui Dirichlet.

Lema 1. *Fie $f : [a,b] \to C$ de clasă C^1. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)=0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)=0. \tag{8}$$

Demonstraţie.

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = f(x)\left|\frac{\sin(nx)}{n}\right|_a^b - \int_a^b \frac{\sin(nx)}{n} f'(x)dx \to 0$$

când $n\to\infty$ (n nu este neapărat natural).

$\diamondsuit$

Lema 2. *Dacă f ca mai sus este doar pe porţiuni de clasă C^1 atunci* (8) *este adevărat.*

Demontraţie. Integrala se împarte într-o sumă finite de integrale ca mai sus.

$\diamondsuit$

Lema 3. *Dacă $f : [a,b] \to C$ este continua atunci* (8) *este adevarată.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Există o partiţie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ astfel încât

$$\max_{x_i\le x<x_{i+1}}\left|f(x) - f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right| < \varepsilon.$$

Se consideră $f\varepsilon(x) : [a,b] \to C$ egală cu $f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$ pentru $x \in [x_i, x_{i+1})$ şi $f\varepsilon(b) = f(b)$. Atunci $|f(x) - f\varepsilon(x)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in [a,b]$ şi prin urmare

$$\left|\int_a^b (f(x)\cos(nx)dx - \int_a^b f\varepsilon(x)\cos(nx)dx\right| \le \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a).$$

Dar $f\varepsilon$ este pe porţiuni de clasă C^1, deci pentru anumite valori $n\varepsilon \in R \left|\int_a^b f\varepsilon(x)\cos(nx)dx\right| \le \varepsilon$ pentru orice $n \ge n\varepsilon$. De unde

$$\left|\int_a^b f(x)\cos nx\,dx\right| \le \left|\int_a^b (f(x) - f\varepsilon(x))\cos nx\,dx\right| +$$

$$+\left|\int_a^b f\varepsilon(x)dx\right| \le \varepsilon(b-a+1)$$

pentru $n \geq n\varepsilon$. Acest lucru demonstrază lema. $\diamondsuit$

Lema 4. Dacă $f : [a,b] \to C$ este continuă pe porţiuni cu limite laterale atunci (8) este adevărată.

Demonstraţie. $\displaystyle\int_a^b f(x)\cos nx\; dx$ se împarte într-o sumă finite de integrale ca în lema de mai sus. $\diamondsuit$

Teorema 5 (**Dirichlet**). *Fie $f : R \to C$ o funcţie 2π periodică, continuă pe porţiuni, cu limite laterale în fiecare punct. Atunci în fiecare punct unde există limita*

$$\lim_{h\to 0, h>0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}, \quad \lim_{h\to 0, h<0}\frac{f(x+h)-f(x-0)}{h} \tag{9}$$

seria Fourier (1) *a lui f este convergentă la* $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Demonstraţie. Următoarea identitate va fi folosită în continuare:

$$\frac{1}{2}+\cos(x)+\cos(2x)+\ldots+\cos(nx)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

care este uşor de demonstrat prin multiplicarea ambelor părţi cu $2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ şi prin transformarea produselor în sume. Acum

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}=\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}\pi f(x)dx+$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(kx)\cdot\int_{-\pi}\pi f(t)\cos(kt)dt+\sin(kx)\cdot\int_{-\pi}\pi f(t)\sin(kt)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}\pi f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}\pi f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\left(\dfrac{t-x}{2}\right)}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)u}{2\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}\pi f(x+u)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)u}{2\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}du.$$

Pentru $f(x) \equiv 1$, $a_0 = 2$ şi $a_n = b_n = 0$ pentru $n \geq 1$ de unde $s_n(x) \equiv 1$ şi formula de mai sus oferă

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}du = \frac{1}{\pi}\int_{0} \pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}du.$$

Putem scrie

$$s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{f(x+u)-f(x-0)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}\pi\left(\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du.$$

Potrivit ipotezei

$$\frac{f(x+u)-f(x-0)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}\cdot\frac{u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

este continuă pe porţiuni pe $[-\pi, 0)$ cu limite laterale şi analog pentru a doua expresie pe $(0, \pi]$. Prin urmare, potrivit ultimei leme, partea stângă a egalităţii de mai sus tinde la zero pe măsură ce $n \to \infty$. Acest lucru demonstrează teorema.

$\diamondsuit$

Corolar 6. *Dacă $f : R \to C$ este de clasă C^1 şi perioadă 2π atunci seria Fouriei a lui f tinde la f.*

Exemplul 1. Fie $f : R \to R$ o funcţie 2π periodică dată pe intervalul $[-\pi, \pi)$ de $f(x) = x^2$. Atunci

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}\pi x^2\cos(nx)dx = \frac{(-1)^n 4}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}\pi x^2\sin(nx)dx = 0.$$

Acest lucru implică (deoarece $f(x+0) = f(x-0) = f(x) = x^2$)

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Luând $x = \pi$ obţinem

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pentru $x = 0$, egalitatea devine

$$\frac{x^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots$$

Observaţia 1. Există funcţii continue fară serii Fourier convergente. Punctul (9) nu este satisfăcut.

În unele cazuri convergenţa este uniformă. Următoarea teoremă oferă o afirmaţie precisă.

Teorema 7. *Presupunem că $f: R \to R$ este periodică cu 2π, de clasă C^1. Atunci seria Fourier a lui f este uniform convergentă la f.*

Demonstraţie. Fie f de clasă C^2. Atunci

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}\pi f(x)\cos\ nxdx = (\text{ integrând în 2 părţi})\\
&= \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}\pi f''(x)\cos nx\,dx\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}\pi f(x)\sin\ nxdx = (\text{ integrând în 2 părţi})\\
&= -\frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}\pi f''(x)\sin nx\,dx.
\end{aligned}$$

Dar $\left|\int_{-\pi}\pi f''(x)\cos nx\,dx\right| \to 0$ şi $\left|\int_{-\pi}\pi f''(x)\sin nx\,dx\right| \to 0$ datorită lemei 3, şi prin urmare sunt delimitate de un număr M. De unde $|a_k\cos kx + b_k\sin kx| \leq \frac{M}{\pi n^2}$ şi seria $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$ este dominată de seria $|a_0| + \frac{M}{\pi}\sum\frac{1}{n^2} < \infty$. Conform teoremei lui Weierstrass, seria Fourier a lui f, este uniform convergentă la o funcţie continuă F. Datorită teoremei lui Dirichlet $F = f$.

2.2 Serii Fouriei pentru funcţii T periodice

Se consideră $f : R \to C$ o funcţie T periodică, integrabilă Riemann sau echivalent $f : [-T, T) \to C$ este extinsă prin periodicitate T la $f : R \to C$. Atunci $g : R \to C$ definită de $g(\theta) = f\left(\frac{T}{2\pi}\theta\right)$ este 2π periodică şi putem scrie $\left(x = \frac{T}{2\pi}\theta\right)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) \end{aligned} \tag{10}$$

unde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(\theta)d\theta = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(\theta)\cos(n\theta)d\theta = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{n}x\right)dx \\ n_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(\theta)\sin(n\theta)d\theta = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{n}x\right)dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Formula (10) este numită seria Fourier a funcţiei T periodice şi formula (11) oferă coeficienţii.

Teoremele de convergenţă de mai sus sunt încă valabile. Inegalitatea lui Bessel devine

$$0 \leq \int_{-T/2}^{T/2} f^2(x)dx - \frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right).$$

2.3 Serii Fourier pentru funcţii pare şi impare

Dacă $f(-x) = -f(x)$ atunci f este impară şi

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx = 0$$

deoarece funcţia de sub integrală este impară, deci dezvoltarea lui f are numai termenii sin

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right). \tag{12}$$

Dacă f este funcţie pară, ceea ce înseamnă $f(-x) = f(x)$ atunci

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx = 0$$

deoarece funcţia de sub integral este impară. Atunci

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} n_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right). \tag{13}$$

2.4 Serii Fourier ale funcţiilor $f : (0, l) \to C$

Fie $f : [0, l) \to C$ şi extindem f la o funcţie de la R la C pentru care menţinem notaţia f astfel încât extensia să fie impară şi periodică $T = 2l$. Acest lucru se poate face unic. Atunci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$$

şi

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)}_{even\ function} dx =$$

$$= \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{2l}x\right)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)dx.$$

Analog, dacă extindem f la o funcţie pară şi periodică $T = 2\pi$ obţinem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) \tag{15}$$

cu

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)dx. \tag{16}$$

2.5 Exerciţii

1. Fie $f : [-\pi, \pi) \to R$, $f(x) = |x|$. Găsiţi seria Fourier a acestei funcţii. Ce spune teorema lui Dirichlet pentru $x = 0$.

2. Fie $f : [0, l) \to R$ dată de formula

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{l}{2} \\ l - x & \text{dacă} \quad \dfrac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

Aflaţi dezvoltarea sin a acesteia.

3. Pentru ce valori ale lui x următoarea serie Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ este convergentă.

4. Ştiind că

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{k!} + \ldots$$

şi luând $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, găsiţi suma Fourier $\sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)\theta}{k!}$ şi $\sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\theta}{k!}$.

5. Ce devine Inegalitatea Bessel pentru dezvoltarea sin a unei funcţii definite pe intervalul $[0, l)$.

6. Folosind teorema demonstrate că Inegalitatea Bessel

$$\int_{-\pi} \pi f^2(x) ds \geq \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k=n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

devine Egalitatea Parceval

$$\int_{-\pi} \pi f^2(x) ds = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

cel puţin pentru funcţii periodice C^2.

2.6 Dezvoltări generale Fourier în spaţii Hilbert

Un produs scalar într-un spaţiu vectorial real H este o funcţie $(\cdot,\cdot)$: $H \times H \to H$ astfel încât pentru orice x, y, z în H:

$$\begin{aligned}
(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha(x, y) + \beta(y, z) \\
(x, y) &= (y, x) \\
(x, x) &\geq 0 \text{ and } (x, x) = 0 \text{ if and only if } x = 0.
\end{aligned}$$

Pentru spaţii vectoriale complexe a doua condiţie este $(x, y) = \overline{y, x}$, unde ?? înseamnă conjugate complex. Prima şi a doua condiţie implică $(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}(z, x) + \overline{\beta}(z, y)$. De exemplu $C([a, b])$ spaţiul funcţiilor reale continue pe intervalul $[a, b]$ cu asocierea

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

este un spaţiu vectorial real cu produs scalar. Un spaţiu vectorial înzestrat cu un produs scalar este denumit spaţiu prehilbert.

Inegalitatea de bază este cea Cauchy-Buniakovski care afirmă

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y).$$

Această inegalitate exprimă că funcţia polinomială de gradul doi $t \to (tx + y, tx + y)$ pentru $t \in R$ ia doar valori pozitive, deci discriminantul trebuie să fie nepozitiv. O consecinţă direct a inegalităţii Cauchy-Buniakovski este inegalitatea Minkovski

$$\sqrt{(x + y, x + y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}$$

care poate fi demonstrată după cum urmează

$$\begin{aligned}
(x + y, x + y) &= (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) \\
&\leq \sqrt{(x, x)^2} + \sqrt{(y, y)^2} + 2|(x, y)| \\
&\leq \sqrt{(x, x)^2} + \sqrt{(y, y)^2} + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(x, y)}, \\
&= \left(\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}\right)^2
\end{aligned}$$

Orice produs scalar permite definirea unei norme

$$||x|| = \sqrt{(x,x)}.$$

Proprietăţile produsului scalar conduc la următoarele proprietăţi ale normei: $||x|| \geq 0$ şi $||x|| =$ dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned} ||x+y|| &\leq ||x|| + ||y|| \\ ||\alpha x|| &= |\alpha| \cdot ||x|| \end{aligned}$$

care sunt la fel ca proprietăţile modulului şi rezultă din inegalitatea Minkovski şi din proprietăţile produsului scalar.

Norma permite definirea distanţei dintre doi vectori

$$\mathrm{dist}(x,y) = ||x-y||$$

şi următoarele proprietăţi ale distanţei sunt consecinţe directe ale proprietăţilor normei

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x,y) &\geq 0 \text{ şi } \mathrm{dist}(x,y) = 0 \text{ dacă şi numai dacă } x = y \\ \mathrm{dist}(x,y) &= \mathrm{dist}(y,x) \\ \mathrm{dist}(x,z) &\leq \mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(y,z), \end{aligned}$$

Aşadar, un spaţiul prehilbert este un spaţiu metric. Conform produsului scalar definit anterior pentru funcţii continue pe $[a,b]$, distanţa dintre doua funcţii este

$$\mathrm{dist}(f,g) = ||f-g|| = \sqrt{(f-g, f-g)} = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

Distanţa permite definirea şirurilor convergente: un şir $(x_n)_{n\in N}$, $x_n \in H$ este numit convergent la $(\bar{x} \in H$ dacă şirul numerelor pozitive reale $\mathrm{dist}(x_n, \bar{x})$ converg către 0, sau echivalent $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n\varepsilon \in N$ astfel încât $n \geq n_e \Rightarrow ||x_n - \bar{x}|| \leq \varepsilon$. Orice şir convergent este un şir Cauchy: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n\varepsilon \in N$ astfel încât $\forall n, m \geq n\varepsilon \Rightarrow \mathrm{dist}(x_n, x_m) \leq \varepsilon$. Reciproca nu este mereu adevărată. Un spaţiu metric unde orice şir Cauchy este convergent este numit complet. Un spaţiu prehilbert care este complet ca spaţiu metric este numit spaţiu Hilbert. Spaţiul funcţiilor continue pe $[a,b]$ cu distanţa definită mai sus nu este complet. Şirul de funcţii $\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n$ este un şir Cauchy care nu converge către nici o funcţie pe $[a,b]$.

Pentru orice spaţiu prehilbert V există un spaţiu Hilbert canonic H astfel încât $V \subset H$. H este definit ca setul tuturor şirurilor Cauchy din V, unde şirurile (x_n) şi (y_n) sunt numite echivalente dacă $\mathrm{dist}(x_n, y_n) \to 0$. Clasa şirului (x_n) va fi notată cu $\widetilde{(x_n)}$. Suma sau multiplicarea cu scalar a şirurilor echivalente conduc la şiruri echivalente astfel încât spaţiul claselor echivalente este un spaţiu vectorial cu operaţiile

$$\widetilde{(x_n)} + \widetilde{(y_n)} = \widetilde{(x_n + y_n)}$$

$$\alpha\widetilde{(x_n)} = \widetilde{(\alpha x_n)}.$$

Un produs scalar pe acest spaţiu de clase de şiruri este definit de

$$\left(\widetilde{(x_n)}, \widetilde{(y_n)}\right) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n).$$

Limita există deoarece (x_n) şi (y_n) sunt şiruri Cauchy. Şiruri echivalente conduc la aceiaşi limită. Se verifică uşor că produsul definit mai sus este un produs scalar. Spaţiul original V poate fi indentificat cu şirul de forma

$$V \ni x \text{ este identificat cu şirul } (x_n)_{n\in N}, x_n = x \text{ pentru orice } n.$$

Fie această identitate notată cu $i : V \to H$. Atunci $\mathrm{dist}(x,y) = \mathrm{dist}(i(x), i(y))$ care este izometric, V este compact în H, care este $\forall h \in H$ şi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in V$ astfel încât $\mathrm{dist}(i(x), h) \leq \varepsilon$. De fapt dacă $h = \widetilde{(x_n)}$ atunci putem alege x ca fiind x_n pentru n suficient de mare (x_n este un element din V, (x_n) este un şir Cauchy de elemente ale lui V şi $\widetilde{(x_n)} \in H$ este clasa şirului (x_n)). De obicei se identifică $x \in V$ cu $i(x) \in H$. Spaţiul H cu cele două proprietăţi de mai sus este unic în sensul că pentru oricare două asemenea spaţii H şi H' cu izometricele $i : V \to H$ şi $i' : V \to H'$ există un izomorfism izometric $f : H \to H'$ astfel încât $f \circ i = i'$. H este numit completarea lui V.

Dacă V este spaţiul funcţiilor continue definit pe $[a,b]$ atunci completarea lui V este numită $L_2[(a,b)]$ şi fiecare element al acestui spaţiu poate fi reprezentat printr-o funcţie pe $[a, b]$ care este integrabilă într-un anumit sens generalizat Riemman, numită integral Lebesgue, şi astfel încât integral pătratului lui f este finit $\int_a^b f^2(x)dx < \infty$. O asemenea funcţie este numită integral pătrată. Integral este în sensul Lebesgue. Reprezentarea unui element $L_2[(a, b)]$ printr-o funcţie integrală pătrată nu este unică. Dacă două funcţii diferă pe o mulţime finită atunci ele definesc acelaşi element $L_2[(a, b)]$. În general dacă două funcţii f şi g diferă prin h astfel încât $\int_a^b h^2(x) = 0$ atunci f şi g definesc acelaşi element de $L_2[(a, b)]$.

Un set de elemente $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\} \subset H$ este denumit set ortogonal dacă $(e_i, e_j) = 0$ pentru fiecare pereche $i \neq j$ şi $(e_i, e_j) \neq 0$. Dacă în plus $(e_i, e_i) = 1$ pentru fiecare i atunci mulţimea este numită ortonormală, unde coeficienţii a_i aparţin mulţimii R pentru spaţii reale Hilbert sau lui C pentru spaţii complexe Hilbert. Dacă este adevărată relaţia 17 atunci este denumită dezvoltarea generală Fourier a lui x. Avem următorul rezultat:

Propoziţia 8. *Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ o mulţime ortogonală în spaţiul Hilbert H. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente*:

i) *Pentru fiecare $x \in H$ există coeficienţi a_i astfel încât*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i e_i. \tag{17}$$

ii) *Dacă $x \in H$ şi $(x, e_i) = 0$ pentru orice e_i din familie, atunci $x = 0$.*

Pentru a demonstra acest lucru avem nevoie de următoarea lemă.

Lema 9. *Dacă $x_n \to x$ şi $y_n \to y$ atunci $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

Demonstraţia lemei:

$$|(x, y)) - (x_n, y_n)| = |(x - x_n, y) + (x_n, y - y_n)|$$
$$= ||x - x_n|| \cdot ||y|| + ||x|| \cdot ||y - y_n|| \to 0$$

deoarece $||x - x_n|| \to 0$, $||y - y_n|| \to 0$, din ipoteză, şi $||y||$, $||x||$ sunt delimitate.

Demonstraţia propoziţiei. i) $\to$ ii). Presupunem că $(x, e_k) = 0$ pentru fiecare e_k. Deoarece $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \to x$ rezultă $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_k\right) \to (x, e_k)$, acest lucru este $(e_k, e_k) = (x, e_k) = 0$ pentru fiecare k de unde $a_k = 0$ pentru fiecare k şi $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$.

ii) $\to$ i). Presupunem că $x \in H$. Fie $a_k = \dfrac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}$ şi se consideră seria $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$. Atunci

$$0 \le \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) = (x, x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{a}_k (e_k, e_k). \qquad (18)$$

Acest lucru arată că seria numerelor pozitive $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{a}_k (e_k, e_k)$ este convergentă, aşa că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n\varepsilon \in N$ astfel încât $\forall n \ge m \ge \varepsilon$ avem $\sum_{k=n}^{m} a_k \bar{a}_k (e_k, e_k) \le \varepsilon$ sau $\left(\sum_{k=m}^{n} e_k, e_k, \sum_{k=m}^{n} a_k e_k \right) \le \varepsilon$ sau $\left\| \sum_{k=m}^{n} a_k e_k \right\| \le \sqrt{\varepsilon}$. Acest lucru arată că şirul $\sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ este Cauchy şi într-un spaţiu Hilbert este convergent la anumite elemente x'. Acum

$$(x - x', e_i) = (x, e_i) - (x', e_i) = (x, e_i) - \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_i \right) =$$

$$= (x, e_i) - a_i (e_i, e_i) = 0.$$

Din ii) rezultă $x - x' = 0$ deci $x = x' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ acest lucru arată că i) este adevărată.

$\diamondsuit$

Corolarul 10. *Dezvoltarea* $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ *a unui element* $x \in H$ *este unică şi coeficienţii sunt daţi de*

$$a_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}. \qquad (19)$$

Demonstraţia este conţinuta în demonstraţia implicaţiei ii) $\to$ i) din propoziţia anterioară.

O mulţime de elemente a spaţiului Hilbert H cu proprietatea i) sau echivalenta ii) a propoziţiei de mai sus este numită familie ortogonală completă sau bază ortogonală.

2.7 Dezvoltări Fourier pe $L_2([-\pi, \pi])$

Ne întoarcem la spaţiul $L_2([-\pi, \pi])$ de funcţii integrale pătrate pe $[-\pi, \pi]$ şi se consideră şirul de funcţii (elemente ale $L_2([-\pi, \pi])$)

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}.$$

Atunci relaţia 4 arată că această mulţime este ortogonală. Lemele dinaintea teoremei lui Dirichlet arată că $(f, e_k) = 0$ pentru f continuă şi e_k din familia de mai sus. Dar, prin definiţie fiecare $f \in L_2([-\pi, \pi])$ este o limită de funcţii continue $f_n \to f$ de unde $(f, e_k) = \lim\limits_{n\to\infty}, (f_n, e_k) = 0$. Deci, familia $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ este o bază ortogonală a spaţiului Hilbert $L_2([-\pi, \pi])$. Coeficienţii $f(x) = a_0 + \sum\limits_k a_k \cos kx + b_k \sin kx$ sunt

$$a_k = \frac{(f(x), \cos kx)}{(\cos kx, \cos kx)} = \frac{\int_{-\pi} \pi f(x) \cos kx}{\int_{-\pi} \pi \cos^2 kx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi} \pi f(x) \cos(kx) dx.$$

Aşadar obţinem coeficienţii 2. Analog obţinem alţi coeficienţi. Observăm că Fourier classic este un caz particular de dezvoltări generale într-un spaţiu Hilbert.

2.8 Aproximările funcţiilor prin polinoame

În acest paragraf vom demonstra următoarea teoremă:

Teorema 11. *Pe orice interval $[a, b]$ orice funcţie continuă $f : [a, b] \to R$ poate fi aproximată uniform prin polinoame, dacă $\forall \varepsilon > 0$ polinom astfel încât* $\max\limits_{\varepsilon\in[a,b]} |f(x) - p\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

Demonstraţie. Funcţia liniară $x \to t = \dfrac{1}{b-a}(x - a)$ transformă intervalul $[a, b]$ în intervalul $[0, 1]$ şi este suficient să demonstrăm că orice funcţie continuă $f : [0,1] \to R$ poate fi aproximată uniform prin polinoame. Acum $t \to \theta = \arccos t$ transformă $[0,1]$ în intervalul $[0,\pi]$ şi este suficient să demonstrăm că orice funcţie continuă $g : [0,\pi] \to R$ poate fi aproximată uniform prin funcţiile

$$p(\theta) = c_0 + c_1 \cos\theta + c_2 \cos^2\theta + \ldots + c_n \cos^n\theta.$$

Dar $\cos^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^3\theta = \dfrac{1}{4}\cos 3\theta + \dfrac{3}{4}\cos\theta$, de unde

$$p(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta.$$

Funcţia continuă $g : [0,\pi] \to R$ poate fi extinsă la o funcţie pară continua $g_1 : [-\pi,\pi] \to R$ şi aceasta la 2π o funcţie periodică $\tilde{g} : R \to R$. Este suficient să demonstrăm că orice funcţie 2π pară, continuă şi periodică $\tilde{g} : R \to R$ poate fi aproximată uniform prin polinoame trigonometrice $p(\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta$. Dacă $\tilde{g}$ este de clasă C^2 acest lucru rezultă din teorema 7. Dacă $\tilde{g}$ este doar continuă atunci se foloseşte următoarea lemă pentru a aproxima $\tilde{g}$ cu o funcţie C^2.

$\diamondsuit$

Lema 12. *Fie $\tilde{g} : R \to R$ o funcţie 2π periodică şi continuă. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcţie periodică 2π de clasă C^2 definită pe $h : R \to R$ astfel încât $\max\limits_{x\in R} |\tilde{g}(x) - h(x)| < \varepsilon$.*

Demonstraţie. Fie

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{35}{32}(1-x^2)^3 & \text{dacă} \quad x \in [-1,1] \\ \quad 0 & \text{dacă} \quad x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Atunci ϕ este de clasă C^2, este diferită de zero doar pentru $x \in (-1,1)$ şi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$. Funcţia $\phi\eta(x) = \dfrac{1}{\eta}\left(\dfrac{x}{\eta}\right)$ este de clasă C^1, este diferită de zero doar pentru $x \in (-\eta,\eta)$ şi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi\eta(x)dx = \int_{-\eta} \eta\phi\eta(x)dx = 1$. Se consideră funcţia $f \star \phi\eta$ definită ca

$$\begin{aligned} f \star \phi\eta(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\phi\eta(y)dy = \int \eta^{-\eta} f(x-y)\phi\eta(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\phi\eta(x-u)du = \int_{x-\eta}^{x+\eta} f(u)\phi\eta(x-u)du. \end{aligned}$$

Dându-se $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ astfel încât $|x-y| < \eta$ rezultă $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Aceasta este o consecinţă a continuităţii lui f şi a faptului că $f(x+2\pi) = f(x)$ ce implică faptul că f este definită esenţial pe intervalul compact $[0, 2\pi]$. Acum pentru orice $x \in R$ avem

$$\begin{aligned}
|f(x) - f \star \phi\eta(x)| &= \left| \int_{x-\eta}^{x+\eta} f(x)\phi\eta(x-u)du - \int_{x-\eta}^{x+\eta} f(u)\phi\eta(x-u)du \right| \\
&= \left| \int_{x-\eta}^{x+\eta} (f(x) - f(u))\phi\eta(x-u)du \right| \\
&\leq \int_{x-\eta}^{x+\eta} |f(x) - f(u)|\phi\eta(x-u)du \\
&\leq \int_{x-\eta}^{x+\eta} \varepsilon \cdot \phi\eta(x-u)du = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Inegalităţile de mai sus demonstrează că f poate fi aproximată după cum dorim prin funcţiile $f \star \phi\eta$. Aceste funcţii sunt de clasă C^2 deoarece integral $\int_{x-\eta}^{x+\eta} f(u)\phi\eta(x-u)du$ poate fi derivată de două ori în funcţie de parametrul x după cum ştim de la Analiză. În plus adăugând 2π la x în integrala $\int_{\infty}^{-\infty} f(x-y)\phi\eta(y)dy$ nu schimbă rezultatul pentru că f este periodică 2π, deci $f \star \phi\eta$ este 2π periodică. Lema este demonstrată.

$\diamondsuit$

2.9 Polinoamele Legendre

Fie

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{20}$$

Atunci avem

Teorema 13. i). *L_n este un polinom de gradul n.*

ii). $\int_{-1}^{1} L_n(x)p(x)dx = 0$ *dacă $p(x)$ este un polinom de grad $< n$.*

iii). $\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \dfrac{2}{2n+1}$.

iv). *Mulţimea $\{L_n(x) | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ este o bază ortonormală în $L_2([-1,1])$.*

Demonstraţie

i). L_n este polinom de gradul n (evident) şi orice polinom de gradul n poate fi scris ca o combinaţie liniară de $L_n, L_{n-1}, \ldots, L_1, L_0$. Primele polinoame Legendre sunt: $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $L_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}((x^2-1)^2) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $L_3(x) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

ii). $(x^2-1)^n$ are -1 şi $+1$ rădăcini de multiplicitate n. Din aceasta rezultă $\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n$ pentru $k < n$ rădăcini de cel puţin gradul 1. Acum

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n p(x)dx =$$

$$= \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)p(x)\Big|_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n p'(x)$$

$$= \underbrace{-\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n p'(x)\Big|_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n p''(x) = \ldots\ldots =$$

$$= \pm \underbrace{(x^2-1)^n p^{(n-1)}(x)|_{-1}^{1}}_{=0} + (-1)^n \underbrace{\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n p^{(n)}(x)dx}_{=0}.$$

Ultima integrală este zero deoarece $\deg(p) < n$ implică $p^{(n)}(x) = 0$.

iii). Integrând prin părţi ca mai sus obţinem

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (-1)^n \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n((x^2-1)^n)^{(2n)}dx \\
&= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (-1)^n \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n (2n)!dx \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \\
&= 2\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2n+1}\theta d\theta, \text{ by substitution } x = \cos\theta \\
&= 2\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots(2n-2)(2n)}{3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}
\end{aligned}$$

Integrala

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta d\theta = -\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \cdot (\cos x)' dx$$

este obţinută integrând prin părţi. Obţinem

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

de unde rezultatul.

iv). Orice funcţie continuă poate fi aproximată uniform prin polinoame şi orice polinom poate fi exprimat ca o combinaţie liniară de polinoame Legendre, deci orice funcţie continuă poate fi aproximată uniform printr-o combinaţie liniară de polinoame Legendre. Dacă $(f, L_n) = 0$ pentru orice polinom Legendre atunci $(f, g) = 0$ pentru orice funcţie continuă g de unde $(f, g) = 0$ pentru orice $g \in L_2([-1, 1])$, în particular $(f, f) = 0$, dacă $f = 0$. Conform toeriei generale mulţimea $\{L_0, L_1, \ldots, L_n, \ldots\}$ este o bază ortonormală.

Dezvoltarea funcţiei f este dată de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x) \tag{21}$$

unde

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) L_n(x) dx. \tag{22}$$

$\diamondsuit$

Observaţia 2. Se poate demonstra că 21, care este întotdeauna convergent în norma L_2, este de fapt pentru fiecare $x =$ punct de derivabilitate a lui f, o serie convergentă la $f(x)$.

Observaţia 3. Pentru n mare este dificil să se calculeze $L_n(x)$ prin definiţia 20. Este mult mai uşor să calculezi polinomul prin $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$, şi

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0.$$

Demonstraţia acestei relaţii este lăsată ca exerciţiu.

2.10 Polinoame Tchebyshev

Fie pentru $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$.
Propoziţia 14. Funcţiile definite mai sus au proprietăţile:

1. $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$.

2. $T_n(x)$ este un polinom de gradul n.

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$ pentru $n \neq m$ şi

$$\int_{-1}^{1} T_n^2(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

4. Rădăcinile lui T_n aparţin intervalului $(-1, 1)$, acestea sunt $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

5. Mulţimea $\{T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots\}$ este o bază ortonormală în spaţiul Hilbert $L = L_2\left([-1, 1], \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ obţinut prin completarea spaţiului funcţiilor continue pe $[-1, 1]$ cu produsul scalar

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Demonstraţie. 1. Fie $x = \cos\theta$. $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ este echivalent cu $\cos(n\theta) = 2\cos\theta \cdot \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$.

2. De la $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ şi $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ rezultă prin inducţie că $T_n(x)$ este polinom de gradul n, pentru orice n.

3. Folosind substituţia $x = \cos\theta$ obţinem

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

de unde rezultă 3.

4. $T_n(x_k) = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$.

5. Orice funcţie continuă pe $[-1,1]$ poate fi aproximată uniform prin polinoame şi fiecare polinom este o combinaţie liniară de $T_n(x)$. Dacă $\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$ pentru orice T_n rezultă

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

pentru orice funcţie continuă g de unde $(f,g) = 0$ pentru orice $g \in L$ şi acest lucru implică $f = 0$. Acest lucru demonstrează că mulţimea $\{T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots\}$ este o bază ortogonală.

$\diamondsuit$

Observaţia 4. Dacă $f \in L$ atunci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \tag{23}$$

cu

$$a_n = \frac{(f,T_n)}{(T_n,T_n)} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)dx. \tag{24}$$

Convergenţa este în norma dată de produsul scalar şi nu este necesar ca pentru $x \in [-1,1]$ să avem $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x) = f(x)$. Dacă luăm $x = \cos\theta$ atunci 23 devine $f(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$ cu coeficienţii $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0 \pi f(\cos\theta)\cos(n\theta)d\theta$. Aceasta este dezvoltarea Fourier cosinus pentru $f(\cos\theta)$ şi ştim că $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \cos\theta = f(\cos\theta)$ dacă f este derivabilă în $x = \cos\theta$ de unde $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x) = f(x)$, dacă f este derivabilă în x.

2.11 Transformata Fourier

Învatând seriile Fouriei am descoperit că $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx \cdot dx = 0$ şi $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx \cdot dx = 0$ pentru orice funcţie continuă pe porţiuni având limite laterale în punctual de discontinuitate şi $a \in R$, $b \in R$. Le vom numi funcţii de tipul $\mathcal{F}$. În aceste limite $n \in R$ nu este în mod necesar un număr natural.

Lema 15. *Fie* $f : R \to C$ *de tipul* $\mathcal{F}$ *şi* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|ds < \infty$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos nx \cdot dx = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin nx \cdot dx = 0.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Există $R > 0$ astfel încât

$$\int_{-\infty}^{-R} |f(x)|dx + \int_{R}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observaţia de mai sus înseamnă că există $n\varepsilon$ şi pentru toate valorile $n > n\varepsilon$

$$\left|\int_{-R}^{R} f(x) \cos nx \cdot dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left|\int_{-R}^{R} f(x) \sin nx \cdot dx\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Acum avem, pentru $n > n\varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos nx \cdot dx\right| \\
&= \int_{-\infty}^{-R} f(x) \cos nx \cdot dx + \int_{R}^{\infty} f(x) \cos nx \cdot dx + \int_{-R}^{R} f(x) \cos nx \cdot dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{-R} |f(x)|dx + \int_{R}^{\infty} |f(x)|dx + \left|\int_{-R}^{R} f(x) \cos nx \cdot dx\right| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos nx \cdot dx = 0$.

$\diamondsuit$

Pentru a introduce Transformata Fourier considerăm $f : R \to C$ astfel încât f este zero în afara intervalului $[-R, R]$, şi este derivabilă. Pentru orice $l > R$, conform teoriei seriilor Fourier, avem pentru orice $x \in [-l, l]$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x \quad \text{unde } \omega = \frac{\pi}{l} \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{l} f(\xi) \cos k\omega\xi \cdot d\xi\right) \cos k\omega x \\
&+ \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{l} f(\xi) \sin k\omega\xi \cdot d\xi\right) \sin k\omega x = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos k\omega(\xi - x)\cdot d\xi = \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&+ \quad \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}(\xi - x)\cdot d\xi\right)\left(\frac{k\pi}{l} - \frac{(k-1)\pi}{l}\right).
\end{aligned}$$

Pe masură ce $l \to \infty$ primul termen tinde la 0 şi al doilea termen tinde la $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\cdot d\xi\right)\cdot d\lambda$ deoarece suma este suma Riemman a funcţiei $\lambda \to \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\cdot d\xi$ care corespunde cu diviziunea $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 0, 1, ld$,

Următoarea formula

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\cdot d\xi\right)\cdot d\lambda$$

este adevărată pentru $f : R \to C$ astfel încât f să fie zero în afara intervalului $[-R, R]$ şi să fie derivabilă. Mai precis avem:

Teorema 16. *Fie $f : R \to C$ o funcţie continuă pe porţiuni cu limite laterale în punctele de discontinuitate şi $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Atunci în fiecare punct în care f este derivabilă sau există derivate laterale în sensul*

$$\lim_{\substack{h\to 0,\\ k>0}} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} = f'_d(x) \text{ şi } \lim_{\substack{h\to 0,\\ k<0}} \frac{f(x+h) - f(x-0)}{h} = f'_s(x)$$

rezultă

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\cdot d\xi\right)\cdot d\lambda.$$

Demonstraţie. Se va omite demonstraţia.

Să se transforme integrala Fourier. Într-un punct de continuitate

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\cdot d\xi\right)\cdot d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(-\xi + x)\cdot d\xi\right)\cdot d\lambda
\end{aligned}$$

deoarece $\lambda \to \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(-\xi + x) \cdot d\xi$ este pară.

Bineînteles

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda(-\xi + x) \cdot d\xi \right) \cdot d\lambda = 0$$

înţeleasă ca

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda(-\xi + x) \cdot d\xi \right) \cdot d\lambda$$

deoarece $\lambda \to \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(-\xi + x) \cdot d\xi$ este pară.

Multiplicând a doua egalitate cu $\sqrt{-1} = i$ şi adăugând-o rezultă

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)(\cos \lambda(\xi + x) + i \sin \lambda(-\xi + x)) \cdot d\xi \right) \cdot d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda(-\xi+x)} \cdot d\xi \right) \cdot d\lambda \qquad (25) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} \cdot d\xi \right) \cdot d\lambda \end{aligned}$$

Definiţia 1. Fie $f : R \to C$ de tipul $\mathcal{F}$, şi $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot dx < \infty$. Funcţia $\hat{f} : R \to C$ definită de

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} \cdot d\xi \qquad (26)$$

este numită Transformata Fourier a lui f.

Dacă x este punct de continuitate a lui f şi condiţiile teoremei de mai sus sunt adevărate, atunci prin 25

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} \cdot d\lambda. \qquad (27)$$

Integrala 27 nu este absolut convergentă şi este înţeleasă ca

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} \cdot d\lambda.$$

Definiţia 2. Integala 27 este numită Transformata Fourier Inversă a lui $\hat{f}$. Pentru o funcţie g, Transformata Fourier Inversă este $\check{g}$, unde

$$(\check{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ix\xi} \cdot dx.$$

Exemplul 2. Fie $f : R \to C$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Atunci

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\lambda} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+i\lambda)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Pentru a demonstra 23 se consideră următoarea cale închisă.

Pentru a evita unele dificultăţi asupra convergenţei integralelor implicate în transformata Fourier, vom considera în continuare că toate funcţiile sunt $\varphi : R \to C$ de clasă C^∞ şi descrescătoare, pentru care: $\forall \alpha, n \in \mathbf{N}$, $\exists c_{\alpha,n}$ astfel încât

$$|\varphi(x)^{(\alpha)}| \leq c_{\alpha,n}(1 + |x|)^{-n}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Pentru aceste funcţii se poate demonstra:

i. $\widehat{\varphi\alpha}(\xi) = (i\xi)\alpha\hat{\varphi}(\xi)$;

ii. $\widehat{\varphi_1 * \varphi_2}(\xi) = \sqrt{2\pi}\widehat{\varphi_1}(\xi)\widehat{\varphi_2}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\varphi_2(x-t)dt$

unde

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x-y)\varphi_2(y)dy.$$

Aceste afirmaţii sunt oferite în felul următor:

i.

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi\alpha}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \varphi^{(\alpha)}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \varphi^{(\alpha-1)}(\xi) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \varphi^{(\alpha-1)}(x) dx \\ &= \frac{(i\xi)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx = (i\xi)\alpha\hat{\varphi}(\xi); \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi_1 \star \varphi_2}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} (\varphi_1 \star \varphi_2)(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(y) \varphi_2(x-y) dy \right) dx \\
&\overset{x-y=t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(y+t)\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(y) \varphi_2(t) dy \right) dt \\
&= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi} \varphi_1(y) dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi} \varphi_2(t) dt \\
&= \sqrt{2\pi} \widehat{\varphi_1}(\xi) \widehat{\varphi_2}(\xi).
\end{aligned}$$

2.12 Transformata Laplace

De-a lungul acestui capitol vom considera funcţii complexe evaluate $f : R \to C$ astfel încât:

a) $f(t) < 0$ pentru $t < 0$;

b) Există constant $C > 0$ şi $a \in R$ astfel încât $|f(t)| \leq Ce^{at}$ pentru $t \in R$;

c) f este continuă cu excepţia, probabil, a unei mulţimi discrete unde f are limite la stânga şi la dreapta, ceea ce înseamnă că orice interval finit are doar un set finit de discontinuităţi.

O funcţie f ce satisface condiţiile a)-c) este numită funcţie obiect. Vom nota cu $\mathcal{O}$ mulţimea funcţiilor obiect.

Transformata Laplace a unei funcţii $f \in \mathcal{O}$ este funcţia

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

şi va fi denumită câteodată funcţia rezultat. În locul $F(p)$ vom folosi câteodată $\mathcal{L}(f)(p)$ sau $\mathcal{L}(f(t))(p)$.

2.13 Proprietăţile funcţiilor Laplace

1. Dacă $|f(t)| \leq C\, e^{at}$ atunci transformata Laplace a lui f este definită pentru $p \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(p) > a$, este olomorfă în acest domeniu şi $\lim\limits_{\mathrm{Re}\,(\mathrm{p}) \to \infty} F(p) = 0$.

Întradevăr, dacă $p = s + i\sigma$, $\text{Re}(p) = s > a$ atunci

$$|F(p)| \leq \int_0^\infty C\, e^{at} e^{-st} |e^{-i\sigma t}| = \int_0^\infty C\, e^{-(s-a)t} = \frac{C}{s-a}$$

şi deoarece $|tf(t)| \leq C_1 e^{at}$ putem deriva sub semnul integrală sign

$$F'(p) = -\int_0^t t f(t) e^{-pt} dt.$$

2. $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f)(p) + \beta \mathcal{L}(g)(p)$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.
Demonstraţia este evidentă.

În exerciţiile de mai jos toate funcţiile variabilei t sunt funcţii obiect, chiar dacă nu este precizat explicit. De exemplu $f(t) = e^{\lambda t}$ înseamnă

$$f(t) = \begin{cases} e^{\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Exemplul 3. $f(t) = e^{\lambda t}$, atunci $F(p) = \int_0^\infty e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \dfrac{1}{p - \lambda}$ pentru Re (p) $> \lambda$. Pentru $\lambda = 0$ găsim $\mathcal{L}(1)(p) = \dfrac{1}{p}$ şi pentru $\lambda = i\omega$ găsim $\mathcal{L}(e^{i\omega t})(p) = \dfrac{1}{p - i\omega}$.

Exemplul 4. $f(t) = \sin \omega t = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin(\omega t))(p) &= \frac{1}{2i}(\mathcal{L}(e^{i\omega t})(p) - \mathcal{L}(e^{-i\omega t})(p)) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Analog

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

3. Fie α o constantă pozitivă. Atunci

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}(f(t)) \left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

(teorema similarităţii).

Într-adevăr

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{p}{\alpha} t} dt = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}(f(t)) \left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

4. Fie $a > 0$. Atunci $\mathcal{L}(f(t-a))(p) = e^{-pa} \mathcal{L}(f(t))(p)$ (rezultatul translaţiei). Într-adevăr, după cum se vede în figura următoare, $f(t-a)$ este o funcţie obiect dacă f este una.

Graficul pentru $f(t)$ şi $f(t-a)$

Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t-a))(p) &= \int_0^\infty e^{-pt} f(t-a) dt = \int_a^\infty e^{-pt} f(t-a) dt = \\ &= e^{-pa} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = e^{-pa} \mathcal{L}(f(t))(p). \end{aligned}$$

5. Dacă $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ sunt funcţii obiect atunci

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) - (p^{n-1} \cdot f(0) + p^{n-2} \cdot f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0))$$

(diferenţierea funcţiei obiect).

Demonstraţie. Pentru $n = 1$, dacă $|f(t)| \leq C\, e^{at}$ şi $\mathrm{Re}(p) > 0$, integrând prin părţi obţinem

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt$$

$$= e^{-pt} f(t)|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + p\mathcal{L}(f(t))(p).$$

Pentru orice $n \geq 2$ formula rezultă prin inducţie.

$\diamondsuit$

6. $\mathcal{L}((-t)^n f(t))(p) = (\mathcal{L}(f(t)))^{(n)}(p)$ (derivând funcţia rezultat).

Într-adevăr derivând $\mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ de n ori în funcţie de p obţinem formula de mai sus.

7. $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right)(p) = \dfrac{\mathcal{L}(f(t))(p)}{p}$ (integrând funcţia obiect).

Pentru a face acest lucru se consideră $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ şi se aplică proprietatea 5 pentru g

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}(g')(p) = p\mathcal{L}(g)(p) - g(0) = p \cdot \mathcal{L}(g)(p)$$

ceea ce înseamnă

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)(p) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(p)}{p}.$$

8. $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p) = \int_p^\infty \mathcal{L}(f(t))(\xi)d\xi$ (integrând funcţia rezultat).

Pentru a demonstra acest lucru se consideră $F_1(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$. Atunci conform proprietăţii 6 cu $n = 1$ obţinem

$$\mathcal{L}(f(t))(\xi) = \mathcal{L}\left(t\cdot\frac{f(t)}{t}\right)(\xi) = -\left(\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)\right)'(\xi).$$

Integrând ambele părţi de la $\xi = p$ la $\xi = \infty$ obţinem

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p) - \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(\infty) = \int_p^\infty \mathcal{L}(f(t))(\xi)d\xi.$$

Conform primei proprietăţi $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(\infty) = 0$. Acest lucru finalizează demonstraţia.

9. $\mathcal{L}(e^{\lambda t}f(t))(p) = \mathcal{L}(f(t))(p-\lambda)$.

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}f(t))(p) = \int_0^\infty e^{-pt}e^{\lambda t}f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t}f(t)dt = \mathcal{L}(f(t))(p-\lambda).$$

$\diamondsuit$

10. Convoluţia a două funcţii obiect f şi g este funcţia $f\star g$ definită de

$$(f\star g)(t) = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Atunci

i) $f\star g = g\star f$ şi $f\star g$ este o funcţie obiect

ii) $\mathcal{L}(f\star g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\cdot\mathcal{L}(g)(p)$

Demonstraţie. i) $f \star g = g \star f$ este evident. Dacă $|f(t)| \leq Ae^{at}$ şi $|g(t)| \leq Be^{bt}$ atunci pentru $t > 0$

$$|(f \star g)(t)| \leq AB \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau = ABe^{bt} \frac{1}{a-b}(e^{(a-b)t} - 1) \leq Ce^{ct}$$

pentru C şi c adecvate.

ii) Din definiţia transformatei Laplace

$$\mathcal{L}(f \star g)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \iint_D e^{-pt} f(\tau) g(t-\tau) dt\, d\tau$$

unde D este domeniul desenat mai jos

Fig. 1 Domeniu dublu integral

Schimbând ordinea integrării obţinem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f \star g)(p) \quad &= \quad \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau) dt \\
\text{schimbând } t \quad &- \quad \tau = u \text{ în a doua integrală} \\
&= \quad \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-p\tau} e^{-pu} g(u) du \\
&= \quad \textstyle\int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-pu} g(u) du = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p).
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

În continuare oferim o listă cu transformatele Laplace uzuale folosite în calcule practice:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(p)$	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos h\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin h\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$

2.14 Reconstrucţia funcţiilor obiect

Teorema următoare oferă o formulă de a găsi funcţia obiect din transformata Laplace.

Teorema 17. *Fie f o funcţie obiect astfel încât $|f(t)| \leq Ce^{at}$ şi F transformata Laplace a lui f. Atunci pentru orice $b > a$.*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt}F(p)dp.$$

Demonstraţie. Fie $g(t) = f(t)e^{-bt}$. Atunci $|g(t)| \leq Ce^{-(b-a)t}$ şi putem aplica teoria transformatelor Fourier funcţiei g. Avem

$$\begin{aligned}
e^{-bt}f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)e^{it\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-bu}f(u)e^{-iu\xi}du\right)e^{it\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-(b+i\xi)u}f(u)du\right)e^{it\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(b+i\xi)e^{it\xi}d\xi \\
&= e^{-bt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(b+i\xi)e^{(b+i\xi)t}d\xi = e^{-bt}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}F(p)dp
\end{aligned}$$

Primul şi ultimul termen dau formula.

$\diamondsuit$

Observaţia 5. Formula trebuie interpretată $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt}F(p)dp$ în punctual t unde f este continuă şi derivabilă,

$$\frac{f(t-0)-f(t+0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt}F(p)dp$$

unde f nu este continuă dar are limită la sânga şi la dreapta şi există

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(t+h)-f(t+0)}{h}, \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(t-h)-f(t-0)}{h}.$$

Integral formulei inverse este adesea calculate folosind teoria reziduurilor. Mai precis

Teorema 18. *Fie $F = \mathcal{L}(f)$ şi F se extinde peste planul complex, cu excepţia unui număr finit de puncte singular şi $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$. Atunci*

$$f(t) = \sum Re\, s(e^{pt}F(p), p_k).$$

Suma se extinde peste toate punctele singulare ale lui F.
Demonstraţie. Fie în planul $sO\sigma$ unde coordonatele complexe sunt $s + i\sigma$, se consideră linia dreaptă $s = b$ şi semicercul Γ de centru b şi rază R ca în figura următoare

Fig. 2 ????

Fie γ conturul integralei compusă din segmental $[b - Ri, b + Ri$ urmată de semicercul Γ. Atunci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iR}^{b+iR} e^{pt}F(p)dp$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{pt}F(p)dp - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{pt}F(p)dp\right)$$
$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\underbrace{\int_\gamma e^{pt}F(p)dp}_{\mathrm{useresidues}} - \lim_{R\to\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{pt}F(p)dp}_{\mathrm{makethechangeb-ip=p'}}$$
$$\sum \mathrm{Re}\, s(e^{pt}F(p), p_k) - \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\underbrace{\int_{\Gamma'} e^{p't}F(p')dp'}_{\mathrm{=0thankstoJordan'slemma}}$$
$$= \sum \mathrm{Re}s(e^{pt}F(p), p_k).$$

$\diamondsuit$

Dându-se orice funcţie $F(p)$ având proprietatea 1 din lista de proprietăţi ale transformatei Laplace, există o funcţie obiect $f(t)$ a carei transformate Laplace ar trebui sa fie $F(p)$? Răspunsul este

Teorema 19. *Fie $F(p)$ o funcţie olomorfă pe domeniul $Re(p) > a$ astfel încât*

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(b + i\sigma)|d\sigma < \infty$, *pentru orice $b > a$ şi*

ii) $\max\limits_{p\in\Gamma_R} |F(p)| \to 0$ *când $R \to \infty$. Γ_R este arcul* $\{p \in C|\mathrm{Re}\,(p) \geq b > a, |p| = R\}$. Atunci există o funcţie obiect (t) astfel încât $F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$.

Fără demonstraţie

2.15 Aplicaţii

2.15.1 Ecuaţii diferenţiale

Fie o ecuaţie diferenţială liniară (sau un sistem) cu coeficienţi constanţi. Îndepărtând transformata Laplace a ecuaţiei obţinem un sistem algebric pentru transformata Laplace a necunoscutelor. Rezolvând acest sistem şi folosind transformata Laplace inversă obţinem soluţia. Procedeul este ilustrat mai bine prin exemple.

Exemplul 5. Să se rezolve următoarea problemă Cauchy: $x'''(t) + x'(t) = \sin(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -1$.

Transformata Laplace a acestei ecuaţii este

$$X(p)p^3 - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) + pX(p) - x(0) = \frac{1}{1+p^2}.$$

Folosind condiţiile iniţiale obţinem

$$X(p)p^3 + pX(p) - p^2 = \frac{1}{1+p^2}.$$

Această ecuaţie dă $X(p)$ ce poate fi descompus în fracţii simple

$$X(p) = \frac{p^4+p^2+1}{p(p^2+1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{i}{4}\left(\frac{1}{(p-i)^4} - \frac{1}{(p+i)^4}\right).$$

Folosind tabelul transformatelor Laplace obţinem

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}t\sin t.$$

Exemplul 6. Să se rezolve următorul sistem

$$\begin{cases} x'(t) + y'(t) + x(t) + y(t) = t \\ x''(t) - y'(t) + 2x(t) = 3(e^{-t}+1) \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

Pentru a se rezolva exerciţiul se consideră X şi Y transformatele Laplace ale lui x şi y. Atunci

$$\begin{cases} pX(p) + pY(p) + X(p) + Y(p) = \dfrac{1}{p^2} \\ p^2X(p) + 1 - pY(p) + 2X(p) = 3\left(\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p}\right). \end{cases}$$

Din acest sistem rezultă $X(p) = \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p}$ şi $Y(p) = \dfrac{1}{p^2}$. Prin transformata Laplace inversă obţinem $x(t) = e^{-t} - 1$ şi $y(t) = t$.

2.15.2 Ecuaţii Convolution

Exemplul 7. Să se rezolve ecuaţia

$$x(t) - 2\int_0^t x(\tau)d\tau = \frac{1}{9}(1 - \cos 3t).$$

Folosind transformata Laplace se obţine $X(p) - 2\dfrac{X(p)}{p} = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{p}{p^2-9}\right)$ de unde $X(p) = \dfrac{1}{(p-2)(p^2+9)}$. Transformata Laplace inversă oferă

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} s\left(\frac{e^{pt}}{(p-2)(p^2+9)}, 2\right) + \operatorname{Re} s\left(\frac{e^{pt}}{(p-2)(p^2+9)}, 3i\right) \\ &+ \operatorname{Re} s\left(\frac{e^{pt}}{(p-2)(p^2+9)}, -3i\right) = \frac{1}{13}e^{2t} + \frac{1}{13}\cos 3t - \frac{2}{39}\sin 3t. \end{aligned}$$

2.15.3 Integrale improprii

Exemplul 8. Calculaţi $i(t) = \displaystyle\int_0^\infty \sin(tx^2)dx$. Luându-se transformatele Laplace în ambele părţi (ca funcţii de t) se obţine

$$\begin{aligned} I(p) &= \mathcal{L}\left(\int_0^\infty \sin(tx^2)dx\right)(p) = \int_0^\infty \left(e^{-pt}\int_0^\infty \sin(tx^2)dx\right)dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-pt}\sin(tx^2)dt\right)dx = \int_0^\infty \mathcal{L}(\sin(tx^2))(p)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^2}{p^2+x^4}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Transformata Laplace inversă oferă

$$i(t) = ??$$

2.16 Exerciţii

1. Să se găsească transformata Laplace pentru

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{for} \quad t < 0 \\ (t-k)(k+1-t), & \text{for} \quad t \in [k, k+1], k \in N \end{cases}$$

2. Să se găsească transformata Laplace pentru $\sin(2t)\cos(t)$.
3. Să se găsească transformata Laplace inversă pentru $\dfrac{p}{(p-1)^2(p+1)}$.
4. Să se găsească soluţia ecuaţiei $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
5. Să se găsească soluţia sistemului

$$\begin{cases} x'(t) - y'(t) + x(t) = t \\ x''(t) + y(t) = 1 \\ x(0) = x'(0) = 0, \ y(0) = 1. \end{cases}$$

Capitolul 3

Ecuaţii diferenţiale parţiale

3.1 Forma canonică

Fie

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

$(x,y) \in D_{xy}$ şi se face schimbarea de coordinate:

$$\begin{cases} \xi = \phi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$$

unde

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Câteodată se scrie $\xi(x,y)$ şi $\eta(x,y)$ în loc de $\phi(x,y)$ şi $\psi(x,y)$. Următoarea imagine arată că funcţiile u şi $\bar{u}$ definite pe D_{xy} şi $D_{\xi\eta}$.

Avem $u(x,y) = \bar{u}(\xi(x,y), \eta(x,y))$ şi regula înlănţuirii ne oferă:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (3)$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Operatorii din stânga se aplică pentru funcţiile $u(x, y)$ şi operatorii din dreapta se aplică funcţiilor corespondente $\bar{u}(\xi, \eta)$.

Acum

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Analog

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

Înlocuind în (1) obţinem

$$\bar{a}(x, y)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2\bar{b}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \bar{c}(x, y)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \bar{f}\left(\xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (4)$$

unde

$$\bar{a}(\xi, \eta) = a \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \qquad (5)$$

$$\bar{b}(\xi, \eta) = a \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (6)$$

$$\bar{c}(\xi, \eta) = a \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \qquad (7)$$

Prin calcul direct obţinem

$$\bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 = (ac - b^2)\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right)^2. \tag{8}$$

Putem simplifica (4) dacă $\xi(x,y)$ şi $\eta(x,y)$ sunt alese astfel încât $\bar{a} = 0$. Fie $\xi(x,y) = \text{const.}$ familia de curbe definită pe ξ. Teorema funcţiei implicite implică de-a lungul curbei

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}}.$$

Ecuaţia $\bar{a}(\xi,\eta) = 0$ devine

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + x(x,y) = 0 \tag{9}$$

şi este cunoscută ca ecuaţia caracteristică.

3.1.1 Ecuaţii hiperbolice

Cazul I. $b^2 - ac > 0$ (cazul hzperbolic).

Ecuaţia (9) are două rădăcini reale

$$\frac{dy}{dx} = r_1(x,y) \Rightarrow \phi(x,y) = \text{const.}$$

$$\frac{dy}{dx} = r_2(x,y) \Rightarrow \psi(x,y) = \text{const.}$$

Schimbarea de coordonate $\xi = \phi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ oferită de (5) şi (7) $\bar{a} = 0$, $\bar{c} = 0$ şi ecuaţia devine

$$2\bar{b}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{f}\left(\xi,\eta,\bar{u},\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi},\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right) = 0. \tag{10}$$

O substituţie viitoare $\xi' = \xi + \eta$, $\eta' = \xi - \eta$ oferă

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi'^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta'^2} + \tilde{f}\left(\xi',\eta',\tilde{u},\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi'},\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta'}\right). \tag{11}$$

Ecuaţia (1) este numită hiperbolică şi (10) şi (11) sunt numite formele canonice ale ecuaţiilor hiperbolice.

Exemplul 1. Să se afle forma canonică a ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos(x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin(x)\frac{dy}{dx} - \cos^2(x) = 0$, ceea ce implică $\frac{dy}{dx} = \pm 1 - \sin(x)$ sau $y = \pm x + \cos(x) + C$ sau $y \mp x - \cos(x) = C$. Schimbarea de coordonate este

$$\begin{cases} \xi = y - x - \cos(x) \\ \eta = y + x - \cos(x). \end{cases}$$

Acum se face un calcul greoi: 2 şi 3 implică

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \cdot (-1 + \sin(x)) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \cdot (1 + \sin(x))$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \cdot 1.$$

Aceste expresii pot fi scrise ca

$$\frac{\partial}{\partial x} = (-1 + \sin(x)) + \frac{\partial}{\partial \xi} + (1 + \sin(x))\frac{\partial}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Derivatele de ordinal doi devin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\cdot(-1+\sin(x)) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\cdot(1+\sin(x))\right)$$
$$= \left((-1+\sin(x))\frac{\partial}{\partial \xi} + (1+\sin(x))\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\right)\cdot$$
$$\cdot(-1+\sin(x)) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\cdot\cos(x)+$$
$$+\left((-1+\sin(x))\frac{\partial}{\partial \xi} + (1+\sin(x))\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)\cdot$$
$$\cdot(1+\sin(x)) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\cdot\cos(x)$$
$$= (-1+\sin(x))^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2(\sin^2(x)-1)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + (1+\sin(x))^2+$$
$$+\cos(x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \cos(x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}.$$

Analog

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (-1+\sin(x))\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2\sin(x)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + (1+\sin(x))\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}$$

Înlocuind derivatele în ecuaţia originală obţinem

$$-4\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

ceea ce este forma canonică. Soluţia ecuaţiei $\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ este $\bar{u}(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, a se vedea ecuaţia dimensională a undelor.

3.1.2 Ecuaţii parabolice

Cazul II. $b^2 - ac = 0$ (cazul parabolic)

Ecuaţia 9 dă o singură soluţie $\frac{dy}{dx} = r(x, y)$ sau $\xi(x, y) = C$. Apoi efectuăm schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

unde $\eta(x, y)$ este o funcţie C^2 arbitrară astfel încât $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$. Din 9 rezultă $\bar{a} = 0$ şi din 8 rezultă $\bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 = 0$ de unde $\bar{b} = 0$. Ecuaţia pentru $\bar{u}$ devine

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} + \bar{f}\left(\xi, \eta, \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right) = 0$$

care este denumită forma canonică a ecuaţiilor parabolice.
Exemplul 2. Ecuaţia diferenţială este

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + x^2 = 0.$$

Din această ecuaţie rezultă $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ sau $x^2 + y^2 = C$. Alegem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} \xi = x^2 + y^2 \\ \eta = x \end{cases}$$

S-a făcut alegerea $\eta(x) = x$ deoarece $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ şi este foarte simplu. Un calcul ca în exemplul anterior ne oferă

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \frac{\eta}{\xi - \eta^2} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = 0.$$

3.1.3 Ecuaţii eliptice

Cazul III. $b^2 - ac < 0$ (cazul eliptic).

În acest caz $\dfrac{dy}{dx} = r_{1,2}(x,y) =$ complex. Dacă $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ sunt funcţii analitice (ce pot fi extinse în serii de puteri), atunci $r_{1,2}(x,y)$ sunt funcţii analitice complexe ale (x,y) şi ecuaţia $\dfrac{dy}{dx} = r_1(x,y)$ are o soluţie analitică complex $\xi(x,y) = \xi_1(x,y) + i\xi_2(x,y) =$ const., unde ξ_1 şi ξ_2 sunt funcţii analitice reale. Atunci

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + i\frac{\partial \xi_2}{\partial x}}{\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + i\frac{\partial \xi_2}{\partial y}} = -\frac{b}{a} + i\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}$$

de unde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x} = -\dfrac{b}{a}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial y} - \dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x} = -\dfrac{b}{a}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} - \dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{a}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial y}. \end{cases} \tag{12}$$

Schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x' = \xi_1(x,y) \\ y' = \xi_2(x,y) \end{cases}$$

oferă

$$\bar{b} = a \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + b \cdot \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial y}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}\right) + c \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial y}\frac{\partial \xi_2}{\partial y}.$$

Dacă schimbăm $\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial \xi_2}{\partial x}$ de la 12 obţinem $\bar{b} = 0$. Analog

$$\bar{a} = \bar{c} = (ac - b^2)\left(\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right)^2\right)$$

şi în final noua formă a ecuaţiei este

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y'^2} + \bar{f}\left(x', y', \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y'}\right) = 0$$

(forma canonică a ecuaţiilor eliptice).

Exemplul 3. Ecuaţia $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ este eliptică pe domeniul $\{(x,y)|y>0\}$. Ecuaţia caracteristică $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$ oferă $\dfrac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{y}$ de unde $\dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \pm i\, dx$ sau $2\sqrt{y} \pm ix = C$. Schimbarea de coordinate $\begin{cases} \xi = 2\sqrt{y} \\ \eta = x \end{cases}$ oferă $\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \dfrac{1}{\xi}\cdot\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = 0.$

3.2 Exerciţii

1. Să se găsească forma canonică a următoarelor ecuaţii

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Răspuns: $\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} - \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right) = 0$, unde $\xi = x - y$, $\eta = 3x + y$.

b) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Răspuns: $\dfrac{\partial^2 \bar{u}^2}{\partial \eta^2} - \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = 0$, unde $\xi = xe^y$, $\eta = y$.

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (2+\cos x)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = 0.$

Răspuns: $\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} + \cos\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = 0$, unde $\xi = x$, $\eta = y - \cos x$.

2. Să se găsească soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$

Răspuns: $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$

b) $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2.$

Răspuns: Schimbarea $\xi = x - 3y$, $\eta = 2x + y$?? $49\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\bar{u}(\xi,\eta) + 7\dfrac{\partial}{\partial\eta}\bar{u}(\xi,\eta) = 2$ cu soluţia $\bar{u}(\xi,\eta) = \dfrac{2}{7}\eta + f(\xi) + g(\eta)e^{-\frac{\xi}{7}}$.

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} + 6u = 2e^{x+y}$.

Răspuns: Ecuaţia este $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - 2\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y) = 2e^x e^y$. Integrând două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi în final găsim $u(x,y) = e^{x+y} + (f(x) + g(y))e^{3x+2y}$.

3. Să se demonstreze că soluţia generală a ecuaţiei $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = f(x,y)$ cu (x_0, y_0) este $u(x,y) = \alpha(x) + \beta(x) + \displaystyle\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)dsdt$ cu funcţiile arbitrare α, β de clasă C^2.

3.3 Probleme cu condiţii iniţiale

3.3.1 Ecuaţia dimensională a undelor

Ecuaţia coardei vibrante este

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (-\infty, +\infty) \\ \text{condiţiile iniţiale} & \begin{cases} u_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \end{cases}$$

Condiţiile iniţiale reprezintă poziţia iniţială şi respective viteza iniţială.
Teorema 1. *Dacă φ este de clasă C^2 şi ψ de clasă C^1 atunci soluţia problemei de mai sus este unică, de clasă C^2 şi este dată de*:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(x)dz.$$

Demonstraţie. Se aduce ecuaţia $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ la forma sa canonică.

Ecuaţia caracteristică este $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - c^2 = 0$ de unde $\frac{dx}{dt} = \pm c$ şi caracteristicile sunt $\begin{cases} x - ct = \text{constant} \\ x + ct = \text{constant} \end{cases}$. Se face schimbarea de variabilă $\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}$. Rezultă $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ deci $\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$ de unde $\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)$ şi $u = \int f(\eta) d\eta + c(\xi) = v_1(\eta) + v_2(\xi)$. Aceasta este

$$u(x,t) = v_1(x + ct) + v_2(x - ct).$$

Dacă v_1 şi v_2 sunt de clasă C^2 atunci rezultă că u este de asemenea de clasă C^2. Condiţiile iniţiale (pentru $t = 0$) conduc la următoarele rezultate

$$\begin{cases} \varphi(x) = u(x,0) = v_1(x) + v_2(x) \\ \psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = cv_1'(x) = cv_2'(x) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} v_1(x) + v_2(x) = \varphi(x) \\ v_1(x) + v_2(x) = c + \frac{1}{c}\int_0^x \psi(z)dz, \ c = v_1(0) - v_2(0). \end{cases}$$

Rezultă că

$$\begin{cases} v_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{c}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(x)dz \\ v_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{c}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(x)dz \end{cases}$$

Aceasta este

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v_1(x+ct) + v_2(x-ct) = \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \\ &+ \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} \psi(z)dz - \int_0^{x-ct} \psi(x)dz\right) \\ &= \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(z)dz \end{aligned}$$

care este o funcţie de clasă C^2.
Notă. Se poate observa din formula pentru $u(x,t)$ că valoarea pentru (x,t) depinde de condiţiile iniţiale doar în interiorul intervalului $[x-ct, x+ct]$. Orice schimbare în condiţiile iniţiale în afara intervalului nu influenţează valoarea lui u pentru (x,t), pentru punctele situate la o distanţă mai mare de ct faţa de x schimbările în condiţiile iniţiale nu influenţează soluţia. Propagarea efectelor perturbării condiţiilor iniţiale este realizată cu o viteză egală cu c. $\varphi(x-ct)$ reprezintă o undă care propagă de-a lungul direcţiei pozitive a axei Ox în timp ce $\varphi(x+ct)$ corespunde unei propagări în direcţia negativă.

Exemplul 4. Să se rezolve $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(x,0) = \sin(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x$. Formula D' Alembert oferă

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\sin(x+ct)+\sin(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} z dz \\ &= \sin x \cdot \cos ct + tx. \end{aligned}$$

3.4 Probleme ce conţin condiţii la limită

Fie ecuaţia

$$(Lu)(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda u(x)$$

pentru $0 < x < l$ şi $p(x) > 0$, $\forall x \in (0,l)$, $q(x) \geq 0$.

Se cere să se determine funcţiile de clasă $C^2(0,l) \cap C^1([0,l])$ care verifică ecuaţia şi în plus:

$$\begin{cases} h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \\ H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0 \end{cases}$$

$h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0$, $h_1 + h_2 > 0$, $H_1 + H_2 > 0$. Acestea sunt condiţiile la limită.

Se vor parcurge anumiţi paşi atunci când se va rezolva această problemă. Se va considera cazul $q(x) \neq 0$, $p \in C^1([0,l])$, $\in C([0,l])$.

Pasul 1. Se va rezolva ecuaţia liniară omogenă de gradul 2

$$(Lu)(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0$$

cu următoarele condiţii la limită

$$\begin{cases} h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0 \\ H_1 v_2(l) + H_2 v_2'(l) = 0. \end{cases}$$

Se ştie că v_1 şi v_2 există din teoria ecuaţiilor diferenţiale liniare ordinare de gradul 2. Este demonstrat că dacă $q(x) \neq 0$ atunci implică că v_1 este independentă de v_2 deci

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

pentru $x \in [0, l]$ şi $p(x)w(x) = p(0)w(0)$.

Acestea sunt situaţii în care v_2 este independentă de v_1 chiar dacă $q(x) = 0$.

Pasul 2. Se va rezolva problema $(Lu)(x) = f(x)$ prin metoda variaţiei constantelor căutându-se o funcţie $u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$ care satisface cele două condiţii la limită. După ce se calculează şi se aranjează condiţiile la limită se obţine:

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{p(0)w(0)}\left[v_2(x)\int_0^x v_1(y)f(y)dy + v_1(x)di\int_x^l v_2(y)f(y)dy\right] \\ &= \int_0^l G(x,y)f(y)dy \text{ unde } G(x,y) \\ &= -\frac{1}{p(0)w(0)}\begin{cases} v_1(x)v_2(x), & 0 \le x \le y \le l \\ v_2(x)v_1(x), & 0 \le y \le x \le l, \end{cases} \end{aligned}$$

$G(x, y)$ este numită funcţia Green o problemei date.

Pasul 3. Este rezolvată problema iniţială: $(Lu)(x) = \lambda u(x)$, u satisface condiţia la limită. Conform pasului 2, $2u(x) = \lambda \int_0^l G(x, y)u(y)dy$ unde $f(x)$ este înlocuit cu $\lambda u(x)$ şi $\int_0^l G(x, y)f(y)dy$.

Se poate verifica prin calcul direct că funcţia $G(x, y)$ are următoarele proprietăţi:

1. Simetrie $G(x, y) = G(y, x)$.

2. Pentru $y \in (0, l)$ constanta $G(x, y)$ satisface, ca funcţie de argument x, condiţiile la limită.

3. Pentru $x \neq y$, $L_x(G) = 0$ unde G este considerată ca funcţie de x şi L_x este operatorul 3 (de mai sus) care este aplicat funcţiilor de x.

4. Derivata lui G, pentru $x = y$ este conformă cu

$$\frac{\partial G(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial G(y-0, y)}{\partial x} = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0, l).$$

Aceste proprietăţi derivă din definiţia lui G.

Pasul 4. Pentru $G(x, y)$ real, simetric şi continuu pe $[0, l] \times [0, l]$ se poate demonstra că următoarea ecuaţie $u(x) = \lambda \int_0^l G(x, y)u(y)dy$ are următoarele proprietăţi:

1. Valorile proprii λ (valorile proprii sunt valorile lui λ, constant, pentru care există o soluţie $u(x)$ în $L^2([0, l])$) sunt discrete şi pot forma un şir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ astfel încât $|\lambda_n| \to \infty$.

2. Pentru fiecare λ_i există $k_i \in \mathbf{N}$ şi $u_{i1}(x), \ldots, u_{ik_i}(x)$ astfel încât orice altă soluţie care verifică

$$v(x) = c_1 u_{i1}(x) + c_2 u_{i2}(x) + \ldots + c_{k_i} u_{ik_i}(x).$$

Acest lucru este exprimat în felul următor: λ_i sunt valorile proprii de ordinul de multiplicitate k_i. Soluţia $u_i(x)$ ce corespunde lui λ_i este numită funcţie proprie.

3. Funcţiile proprii sunt continue, şi în plus pentru două valori proprii $\lambda_i + \lambda_j$ funcţiile proprii sunt ortogonale $v_i \perp v_j$ sau $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ în $L^2([0, l])$, sau $\int_0^l v_i(x)v_j(x)dx = 0$.

4. Funcţiile proprii $v_i(x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ formează un sistem complet astfel încât pentru orice funcţie $f \in L^2([0, l])$, există $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(x)$ unde

$$a_i = \frac{\langle f, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\int_0^l f(x)v_i(x)dx}{\int_0^l v_i^2(x)dx}$$

(transformatele Fourier generalizate).

5. Dacă $G(x,y)$ este obţinută din problema Sturm-Liouville, ca în cazul pasului 2, este valabilă şi teorema lui Steklov.

Teorema 1. *Dacă $f \in C^2(0,l) \cap C^1([0,l])$ şi $f'' \in L^2(0,l)$ şi f satisface condiţiile la limită atunci seria $\sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(x)$ este uniform convergentă şi în plus, pentru orice λ_i ordinul de multiplicitate este $k_i = 1$, este esenţială o singură valoare proprie. Mai mult, valorile proprii sunt pozitive.*

Exemplul 1. $-(1u')' = \lambda(u)$, $u(0) = 0$ şi $u(l) = 0$.

Soluţie. Soluţia generală este $u(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x$, $u(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ şi $u(l) = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}l = 0$, so $\sqrt{\lambda}l = k\pi$, deci $\lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{l^2}$, $u_k(x) = \sin\dfrac{k\pi x}{l}$ şi transformata Fourier după valorile proprii devine $f(x) = \sum A_k \sin\dfrac{k\pi x}{l}$, $A_k = \dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\dfrac{k\pi x}{l}$.

Exemplul 2. $(-u')' = \lambda u$, $u(0) = 0$, $h[u(l)] + u'(l) = 0$, $h > 0$.

Soluţie. Conform teoriei ecuaţiilor liniare $u(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x$, $u(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ şi condiţiei $h[u(l)] + u'(l) = 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{h}\sqrt{\lambda} = \tan(\sqrt{\lambda}l)$.

Soluţiile ecuaţiei sunt date de $\sqrt{\lambda_k} = N_k$ unde $\left| N_k - \dfrac{(2k-1)\pi}{2l} \right| \to 0$ deci $u_k(x) = \sin N_k x$ şi orice funcţie pe $[0,l]$, de la $L^2([0,l])$ are următoarea expresie

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin N_k x, \quad a_k = \frac{\int_0^l f(x)\sin N_k x dx}{\int_0^l \sin^2 N_k x dx}.$$

3.5 Funcţiile Bessel

Funcţiile Bessel au fost studiate în primul an şi de aceea vom studia în aceasta secţiune doar proprietăţile lor.

1. Se consideră ca funcţie Bessel soluţia ecuaţiei

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - v^2)u = 0.$$

Este dată de seria

$$J\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+v+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}$$

unde $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ este funcţia Euler Γ, $\Gamma(k+1) = k!$,

$$\Gamma(k+v+1) = (k+v)(k+v-1)\dots v\Gamma(v).$$

2. Pentru $v = \frac{1}{2}$ şi luându-se în consideraţie faptul că $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ se găseşte $I_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ şi dacă $v = -\frac{1}{2}$ atunci $I_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

3. $v = n \Rightarrow I_{-n} = (-1)^n I_n$. $v \neq n \in \mathbf{Z} \Rightarrow I_v(x)$ şi $I_{-v}(x)$ sunt independente deoarece

$$I_v(x) = \frac{x^2}{2^v \Gamma(v+1)}(1 + 0(x^2)); \quad I_{-v}(x) = \frac{-x^2}{2^{-v}\Gamma(-v+1)}(1+0(x^2))$$

şi

$$\begin{vmatrix} I_v & I_{-v} \\ I_v' & I_{-v}' \end{vmatrix} = -\frac{2v}{\Gamma(1+v)\Gamma(1-v)x} \frac{1}{x}(1+\dots) \neq 0.$$

În concluzie orice soluţie a ecuaţiei Bessel are următoarea formă

$$c_1 I_v(x) + c_2 I_{-v}(x).$$

4. Se pot stabili următoarele relaţii pornind de la definiţie

$$\begin{cases} I_v'(x) = I_{v-1}(x) - \frac{v}{x} I_v(x) \\ I_v'(x) = -I_{v+1}(x) + \frac{v}{x} I_v(x). \end{cases}$$

Pot fi scrise şi sub forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(x^2 I_v(x)) = x^2 I_{v-1}(x) \\ \frac{d}{dx}(x^{-2} I_v(x)) = -x^{-2} I_{v+1}(x) \end{cases}$$

5. Dacă $v > -1$ atunci rădăcinile ecuaţiei $I_v(x) = 0$ (sau în cazul general ale ecuaţiei $\alpha I_v(x) + \beta\mu I'_v(x) = 0$; $\alpha, \beta \geq 0$; $\alpha + \beta > 0$) sunt reale, simple (cu excepţia lui 0, câteodată) sunt simetrice fată de origine şi pot fi notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu $|x_n| \to \infty$. Demonstraţia nu va fi dată.

6. Fie $v > -2$ atunci dacă μ_1 şi μ_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $\alpha I_v(\mu) + \beta\mu I'_v(\mu) = 0$ se cunosc:

i) $\displaystyle\int_0^1 xI_v(\mu_1 x)I_v(\mu_2 x)dx = 0$ dacă $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$.

ii) $\displaystyle\int_0^1 xI_v(\mu_1 x)dx = \frac{1}{2}(I'_v(\mu_1))^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{\mu_1^2}\right)^2 I_v^2(\mu_1)$. Acest lucru înseamnă că dacă se consideră produsul scalar $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ cele două funcţii $I_v(\mu_1)$, $I_v(\mu_2)$ sunt ortogonale.

Ca un indiciu pentru demonstraţie se foloseşte ecuaţia Bessel care demonstrează că

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{d}{dx}I_v(\mu_1 x)\right) + \left(\mu_1^2 x - \dfrac{v^2}{x}\right) I_v(\mu_1 x) = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{d}{dx}I_v(\mu_2 x)\right) + \left(\mu_2^2 x - \dfrac{v^2}{x}\right) I_v(\mu_2 x) = 0. \end{cases}$$

Prima relaţie este multiplicată cu $I_v(\mu_2 x)$ şi a doua cu $I_v(\mu_1 x)$. Noile relaţii sunt scăzute şi integrate pe $(0, 1)$. Rezultă

$$\int_0^1 xI_v(\mu_1 x)I_v(\mu_2 x)dx = \frac{1}{\mu_2^2 - \mu_1^2}(\mu_1 I_v(\mu_2)I'_v(\mu_1) - \mu_2 I_v(\mu_1)I'_v(\mu_2)) \quad (1)$$

Ştiindu-se că μ_1 şi μ_2 verifică

$$\begin{cases} \alpha I_v(\mu_1) + \beta\mu_1 I'_v(\mu_1) = 0 \\ \alpha I_v(\mu_2) + \beta\mu_2 I'_v(\mu_2) = 0 \end{cases}$$

cu $[\alpha, \beta \neq [0, 0)$ rezultă că determinantul sistemului este zero, pentru că $\mu_1 I_v(\mu_2)I'_v(\mu_1) - \mu_2 I_v(\mu_1)I'_v(\mu_2) = 0$, deci rezultă i). Trecând la limita $\mu_2 \to \mu_1$ în ecuaţia (1) $\Rightarrow$ ii).

7. Funcţiile $I_v(\mu_k x)$, $k = 1, 2, \ldots$ formează un sistem complet în $L_x^2([0, 1])$ = spaţiul de funcţii pe $[0, 1]$ pentru care $\displaystyle\int_0^1 xf^2(x)dx < \infty$

măsurabilă. Acest lucru înseamnă că respectându-se produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_0^1 xf(x)g(x)dx$ orice funcţie din $L_x^2([0,1])$ pot fi dezvoltate sub forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k I_v(\mu_k x), a_k = \frac{\langle f, I_v(\mu_k)\rangle}{\langle I_v(\mu_k), I_v(\mu_k)\rangle} = \frac{\int_0^1 xf(x)I_v(\mu_k x)dx}{\int_0^1 xI_v^2(\mu_k x)dx}.$$

În plus, dacă $f(x) = \sqrt{x}u(x)$, $u \in C^2([0,1])$, $u(x) = 0(x\gamma)$ unde $\gamma = \min(v,1)$, $\alpha u(1)+\beta u'(1) = 0$ atunci convergenţa seriei $\sum a_k I_v(\mu_k x)$ este uniformă.

Soluţiile pot fi găsite ca serii de funcţii Bessel dar există şi cazuri în care sunt găsite ca serii care conţin sinus sau cosinus.

3.6 Probleme cu condiţii la limită

Ecuaţiile cu derivate parţiale eliptice descriu fenomene statice, evoluţia cărora depinde schimbările ce au loc la graniţa domeniului pe care ecuaţia descrie fenomenul.

Un fel de a rezolva acest tip de probleme este metoda separării variabilelor (numită metoda Fourier). În ansamblu aceasta constă î (pentru ecuaţii liniare):

1. Soluţia $u(x,y)$ este pusă sub forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ şi după ce este înlocuită în ecuaţie se poate pune ecuaţia sub forma $F(X) = G(Y)$, aceasta situaţie este valabilă doar pentru $F \equiv G \equiv \lambda \equiv$ constant;

2. Una dintre ecuaţiile $F(X) = \lambda$ sau $G(Y) = \lambda$ este rezolvată şi din condiţiile la limită rezultă $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ şi $X = X_1(x), \ldots, X_k(x), \ldots$;

3. Pentru orice $X_k(x)$ corespund $Y_k(y)$ şi $u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y)$. În general apare o constantă sau mai multe în $X_k(x)$;

4. $\sum X_k(x)Y_k(y)$ este din nou soluţie. Constantele arbitrare rezultă din condiţiile la limită sau pot rezulta din condiţiile iniţiale.

Exemplul 3. Să se determine $u(x, y)$ astfel încât

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad r < x^2 + y^2 < R \\ u(x, y)|_{x^2+y^2=R} = \varphi_1(x, y) \\ u(x, y)|_{x^2+y^2=r} = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

Se trece la coordonate polare $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Ecuaţiile Laplace devin

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad u(R, \theta) = \varphi_1(\theta),\ u(r, \theta) = \varphi_2(\theta).$$

1. Se separă variabilele $u(\rho, \theta) = \alpha(\rho)\beta(\theta)$ si înlocuindu-le se obţine $\rho^2\alpha''\beta + \rho\alpha'\beta + \alpha\beta'' = 0$, se împarte cu $\alpha\beta$ şi rezultă

$$\frac{\rho^2\alpha''(\rho) + \rho\alpha'(\rho)}{\alpha} = -\frac{\beta''(\theta)}{\beta(\theta)} = \lambda.$$

2. Se rezolvă a doua ecuaţie $\beta''9\theta) + \lambda\beta(\theta) = 0$ cu $\beta(\theta) = c_1e^{\sqrt{\lambda}\theta} + c_2e^{-\sqrt{\lambda}\theta}$ dacă $\lambda \neq 0$ sau $\beta(\theta) = a\theta + b$ dacă $\lambda = 0$. Deoarece $\beta(\theta)$ trebuie să fie periodică de perioadă 2π, atunci $\lambda = -\mu^2$ (pentru a avea $\sqrt{\lambda} = \pm i\mu$ şi $\beta(\theta) = D_1\cos\mu x + D_2\sin\mu x$). Această funcţie are o perioadă egală cu $T = \dfrac{2\pi}{\mu}$ şi toate celelalte perioade sunt egale cu $T_k = \dfrac{2\pi}{\mu}k$. O perioadă este 2π deci $\dfrac{2\pi}{\mu}k = 2\pi \Rightarrow \mu = k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ deci

$$\lambda = -k^2,\ \beta(\theta) = \beta_k(\theta) = D_k\cos k\theta + E_k\sin k\theta \text{ for } k \neq 0.$$

Dacă $\lambda = 0$ atunci $\beta(\theta) = a\theta + b, \quad a = 0.$

3. Se rezolvă ecuaţia

$$\frac{\rho^2\alpha''(\rho) + \rho\alpha'(\rho)}{\alpha} = \lambda = -k^2$$

ceea ce înseamnă

$$\rho^2\alpha''(\rho) + \rho\alpha'(\rho) + k^2\alpha(\rho) = 0.$$

Aceasta este ecuaţia Euler aşadar $\alpha(\rho) = \rho^r$ de unde $r(r-1)+r+k^2 = 0$, deci $r^2 = -k^2$ ceea ce implică $r = \pm k$ şi $\alpha_k(\rho) = F_k\rho^k + G_k\rho^{-k}$. Dacă $\lambda = 0$ atunci $r_1 = r_2 = 0$ deci

$$\alpha_0(\rho) = F_0\rho^0 + G_0\rho^0 \ln \rho = F_0 + G_0 \ln \rho.$$

4. Soluţia

$$u_k(\rho, \theta) = \alpha_k(\rho)\beta_k(\theta) = A_0 + B_0 \ln \rho \quad \text{dacă} \quad k = 0$$

sau

$$(A_k\rho^k + C_k\rho^{-k}) \cos k\theta + (B_k\rho^k + D_k\rho^{-k}) \sin k\theta \quad \text{dacă} \quad k \neq 0.$$

Suprapunerea soluţiilor conduce la

$$u(\rho, \theta) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty}[(A_k\rho^k + C_k\rho^{-k}) \cos k\theta + (B_k\rho^k + D_k\rho^{-k}) \sin k\theta].$$

Condiţiile la limită dau: pentru $\rho = r$,

$$\varphi_2(\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty}[(A_k r^k + C_k r^{-k}) \cos k\theta + (B_k r^k + D_k r^{-k}) \sin k\theta],$$

pentru $\rho = R$

$$\varphi_1(\theta) = A_0 + B_0 \ln R + \sum_{k=1}^{\infty}[(A_k R^k + C_k R^{-k}) \cos k\theta + (B_k R^k + D_k R^{-k}) \sin k\theta].$$

Din aceasta se obţine luând în considerare expresiile Fourier

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln r = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta) d\theta \\ A_0 + B_0 \ln R = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_k r^k + C_k r^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta) \cos k\theta d\theta \\ A_k R^k + C_k R^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) \cos k\theta d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_k r^k + D_k r^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta)\sin k\theta d\theta \\ B_k R^k + D_k R^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta)\sin k\theta d\theta \end{cases}$$

De aici se obţine toţi coeficienţii necesari şi soluţia. Dacă inelul este înlocuit cu un cerc atunci din condiţia de continuitate pentru $\rho = 0$ rezultă

$$u(\rho,\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos k\theta + B_k \sin\theta)\rho^k.$$

Eliminându-se $\ln\rho$ şi ρ^{-k} care nu sunt continue în $\rho = 0$. Din condiţia la limită

$$\varphi_1(\theta) = u(R,\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)R^k$$

deci

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_1(\theta)d\theta; \\ A_k R^k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_1(\theta)\cos k\theta d\theta; \\ B_k R^k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_1(\theta)\sin k\theta d\theta. \end{aligned}$$

Aceasta problemă constă în determinarea unei funcţii de clasă C^2 din interiorul lui D, $\Delta u = 0$ din interiorul lui D şi $u|_{\partial D} = \varphi =$ dat, u este continuă pe $\bar{D}$ şi este numită *problema Dirichlet*.

Se poate demonstra că are soluţii pentru domeniul D chiar dacă φ nu este continuă şi deci $\bar{u}$ nu este continuă pe $\bar{D}$. Funcţia u poate fi exprimată doar în unele cazuri particulare, mai sus a fost exprimată pentru un cerc (disc) sau un inel circular. $\Delta u = 0$ în intervalul $1 < x^2 + y^2 < 4$ şi $u|_{x^2+y^2=1} = y$, $u|_{x^2+y^2=4} = x^2 - y^2$. Să se găsească $u(x,y)$.
Exemplul 4. În acest caz $R_1 = 1$ şi $R_2 = 2$. Pentru $\rho = 1$ avem $y = \sin(\theta)$ şi pentru $\rho = 2$ avem $x^2 - y^2 = 4\cos(2\theta)$. Condiţia la frontieră pentru $\rho = R_1$ ne dă

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + C_k)\cos(k\theta) + (B_k + D_k)\sin(k\theta) = \sin(\theta)$$

şi condiţia la frontieră pentru $\rho = R_2 = 2$ ne dă

$$A_0 + C_0 \ln(2) + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k 2^k + C_k 2^{-k})\cos(k\theta) +$$

$$+(B_k 2^k + D_k 2^{-k})\sin(k\theta) = 4\cos(2\theta).$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_0 + C_0 \ln(2) = 0 \end{cases}$$

de unde $A_0 = C_0 = 0$

$$\begin{cases} A_2 + C_2 = 0 \\ A_2 \cdot 4 + C_0 \cdot \dfrac{1}{4} = 4 \end{cases}$$

de unde $A_2 = \dfrac{15}{16}$, $C_2 = -\dfrac{16}{15}$

$$\begin{cases} B_1 + D_1 = 1 \\ B_1 \cdot 2 + D_1 \cdot \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

de unde $B_1 = -\dfrac{1}{3}$, $D_1 = \dfrac{4}{3}$. Celelalte ecuaţii au 0 părţi stângi şi dă 0 pentru restul coeficienţilor. Prin urmare soluţia este:

$$u(\rho,\theta) = \left(\frac{16}{15}\rho^2 - \frac{16}{15}\frac{1}{\rho^2}\right)\cos(2\theta) + \left(-\frac{1}{3}\rho + \frac{4}{3}\frac{1}{\rho}\right)\sin(\theta).$$

Exemplul 5. Să se găsească soluţia problemei

$$\begin{cases} \Delta(u) = 0 \text{ interiorul lui D} \quad x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y)|_{x^2+y^2=1} = x^2. \end{cases}$$

Soluţie. În coordonate polare

$$u(\rho,\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)\rho^k.$$

Pentru $\rho = 1$ există

$$\frac{1+\cos 2\theta}{2} = \cos^2\theta = A_0 + \sum A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta$$

de unde $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$ şi restul coeficienţilor sunt egali cu zero. Deci

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho^2 \cos 2\theta.$$

În variabilele x şi y avem:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

3.7 Cazul Dreptunghiului $D = [0, p] \times [0, q]$

Se consideră problema: să se găsească $u(x, y)$ astfel încât $\Delta u = 0$ în interiorul lui D şi $u|_{\partial D} = u_0$.

Pasul 1. Fie $u(x, y) = \alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot y + \delta \cdot xy + v(x, y)$, unde

$$\begin{aligned} &\text{coeficienţii } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ sunt aleşi astfel încât} \\ &v(x, y) \text{ să fie zero în punctele } (0, 0), (p, 0), (p, q), (0, q) \end{aligned} \tag{1}$$

Apoi $\Delta v = 0$ în interiorul lui D şi

$$v|_{\partial D} = u_0 - (\alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot y + \delta \cdot xy) \overset{def}{=} v_0 \tag{2}$$

Fie $v(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y)$ unde v_1 şi v_2 sunt armonice astfel încât $v_1 = 0$ pentru $x = 0$, $x = p$ şi $v_2 = 0$ pentru $y = 0$, $y = 1$. Se consideră problemele

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0 \text{ interiorul lui D} \\ v_1(0, y) = v_1(p, y) = 0 \\ v_1(x, 0) = v_0(x, 0),\ v_1(x, q) = v_0(x, q) \end{cases} \tag{3}$$

şi

$$\begin{cases} \Delta v_2 = 0 \text{ interiorul lui D} \\ v_2(x, 0) = v_2(x, p) = 0 \\ v_2(0, y) = v_0(0, y),\ v_2(p, y) = v_0(p, y) \end{cases} \tag{4}$$

Fig. 2

Se poate vedea uşor că

$$u(x,y) = \alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot y + \delta \cdot xy + v_1(x,y) + v_2(x,y) \tag{5}$$

este soluţia cerută.

Pasul 2. Ne uităm după $v_1(x,y) = X(x)Y(y)$. Înlocuind aceasta în ecuaţie şi împărţind cu $X(x)Y(y)$ obţinem

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{const.}$$

Fie λ constanta din formula precedent. Atunci $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ pentru $\lambda \neq 0$ şi $X(x) = ax+b$ pentru $\lambda = 0$. Condiţiile $X(0) = X(p) = 0$ şi $X(x)$ nu este identic cu 0 implică $\lambda = -\dfrac{k^2\pi^2}{p^2}$ şi $X(x) = C\sin\left(\dfrac{k\pi x}{p}\right)$, $k \in N \setminus \{0\}$. Prin urmare $Y(y) = C_k e^{\frac{k\pi y}{p}} + D_k e^{-\frac{k\pi y}{p}}$ şi $X(x)Y(y) = \left(C_k e^{\frac{k\pi y}{p}} + D_k e^{-\frac{k\pi y}{p}}\right)\sin\left(\dfrac{k\pi x}{p}\right)$. Acum căutăm o soluţie $v_1(x,y)$ obţinută prin suprapunerea unor asemenea funcţii

$$v_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k e^{\frac{k\pi y}{p}} + D_k e^{-\frac{k\pi y}{p}}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right). \tag{6}$$

Condiţiile la limită implică

$$\begin{cases} C_k + D_k = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p v_0(x,0)\cdot\sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)dx & \text{pentru} \quad y=0 \\ C_k e^{\frac{k\pi y}{p}} + D_k e^{-\frac{k\pi y}{p}} = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p v[0]\sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)dx & \text{pentru} \quad y=q. \end{cases} \tag{7}$$

Analog

$$v_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(E_k e^{\frac{k\pi y}{q}} + F_k e^{-\frac{k\pi y}{q}}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{q}\right). \tag{8}$$

şi

$$\begin{cases} E_k + F_k = \dfrac{2}{q}\displaystyle\int_0^q v_0(0,y)\cdot\sin\left(\dfrac{k\pi y}{q}\right)dy & \text{pentru} \quad x=0 \\ C_k e^{\frac{k\pi p}{q}} + D_k e^{-\frac{k\pi p}{q}} = \dfrac{2}{q}\displaystyle\int_0^q v_0(q,y)\sin\left(\dfrac{k\pi y}{q}\right)dy & \text{pentru} \quad x=p. \end{cases} \tag{9}$$

În final (1), (2), (7), (9) oferă soluţiile

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha+\beta\cdot x+\gamma\cdot y+\delta\cdot xy+ \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k e^{\frac{k\pi y}{p}} + D_k e^{-\frac{k\pi y}{p}}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(E_k e^{\frac{k\pi x}{q}} + F_k e^{-\frac{k\pi x}{q}}\right)\sin\left(\frac{k\pi y}{q}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Reprezentarea integrală a soluţiilor

3.8 Cazul discului unitate

Se consideră problema Dirichlet pe discul de rază R. Să se găsească (x,y) astfel încât

$$\begin{cases} \Delta(u)=0 \quad \text{în interiorul} \quad \{(x,y)|x^2+y^2<R^2\} \\ u(x,u)|_{c^2+y^2=R^2} = u_0(x,y), \ u_0 \text{ a real function.} \end{cases}$$

Argumentele funcţiei limită u_0 vor fi τ = unghiul, sau numărul complex $\xi = R\cdot e^{ir}$ sau mai simplu (x,y) cu $x^2+y^2=R^2$. După cum ştim, reprezentând $x=\rho\cos(\theta)$, $y=\rho\sin(\theta)$ soluţia este dată de formula

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta))\rho^n \tag{11}$$

unde

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u_0(\tau)\cos(n\tau)d\tau, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u_0(\tau)\sin(n\tau)d\tau.$$

Înlocuind aceste formule în (11) obţinem

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}(\cos n\theta\cdot\cos n\tau+\sin n\theta\cdot\sin n\tau)\right)u_0(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\theta-\tau)\right)u_0(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

Pentru a calcula suma (12) fie $z=\rho e^{i\theta}$, $\xi=Re^{i\tau}$. Atunci $\left|\dfrac{z}{\xi}\right|<1$ în interiorul discului $|z|<R$, şi

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\theta-\tau)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi}\right)^n\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{\xi+z}{\xi-z}\right).$$

La graniţă avem de asemenea $\xi=Re^{i\tau}$, de unde $d\xi=iR\cdot e^{i\tau}d\tau$ sau $d\tau=\dfrac{d\xi}{i\xi}$. Înlocuind acestea în (12) soluţia devine

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{Re^{i\tau}+\rho e^{i\theta}}{Re^{i\tau}-\rho e^{i\theta}}\right)u_0(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}u_0(\tau)d\tau \qquad (13) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|=R}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{\xi+z}{\xi-z}\right)u_0(\xi)\frac{d\xi}{i\xi} \\ &= \mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{1}{\xi}\cdot u_0(\xi)d\xi\right). \qquad (14) \end{aligned}$$

Formula (13) este cunoscută ca formula lui Poisson, şi (14) ca formula lui Scwarz.

3.9 Formula generală

Pentru a obţine o formulă analoagă pentru un domeniu $D\subset C$ avem nevoie de următoarea lemă:

Lema 2. *Fie $g : D_1 \to D_2$ o transformare conformă $(x, y) \xrightarrow{g} (\xi(x, y), \eta(\xi, y))$. Atunci $\tilde{u} : D_2 \to R$ este o funcţie armonică $\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = 0\right)$ dacă şi numai dacă $u = \tilde{u} \circ g : D_1 \to R$ este armonică $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right)$.*

Demonstraţie. Fie (x, y) coordonatele lui D_1 şi (ξ, η) coordonatele lui D_2. Atunci g este olomorfă. Dacă g este olomorfă atunci $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$ (Cauchy-Riemann). Atunci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

şi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Folosind condiţiile Cauchy-Riemann şi $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$ care sunt consecinţe ale ecuaţiilor Cauchy-Riemann, obţinem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\right) \cdot \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right)$$

care demonstrează că $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ este echivalent cu

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\right) = 0.$$

$\diamondsuit$

Ca o aplicaţie vom demonstra următoarea teoremă:

Teorema 3. *Fie $d : D \to D(0; R)$ o transformare conformă între D şi discul de rază R cu centrul în origine, şi fie g de clasă C^1 pe $D \cup \partial D$. Atunci soluţia problemei Dirichlet*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \textit{în interiorul lui } D \\ u|_{\partial D} = u_0, & \textit{o funcţie reală} \end{cases}$$

este dată de

$$u(z) = Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g(t)+g(z)}{g(t)-g(z)}\cdot\frac{g'(t)}{g(t)}u_0(t)dt\right]$$

unde $z = x + iy$ este coordonata complexă din interiorul lui D şi t este coordonata complexă pe ∂D.

Demonstraţie. Fie $z = x+iy$ coordonata complexă în D şi $w = \xi+i\eta$ coordonata complexă pe disc. Fie $\tilde{u} = u \circ g^{-1}$. Atunci $u(z) = \grave{u}(w)$, unde $w = g(z)$ (vezi imaginea)

Fig. ?? Corespondenţa dintre domenii

Conform lemei precedente $\Delta u(z) = 0$ este echivalent cu $\Delta\tilde{u}(w) = 0$. Pe graniţă $|s| = R$, $\tilde{u}_0(s) \stackrel{def}{=} \grave{u}(s) = u(t) = u_0(t)$, unde $t \in \partial D$, $s = g(t)$. Acum putem scrie

$\diamondsuit$

Exemplul 6. Funcţia $g(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ transformă conform semiplanul superior în discul unitate. Prin urmare soluţia problemei Dirichlet pe semiplanul superior este dată de:

$$\begin{aligned}
u(z) &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g(\xi)+g(z)g'(\xi)}{g(\xi)-g(z)g(\xi)}u_0(\xi)d\xi\right] = \\
&= \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\dfrac{\xi-i}{\xi+i}+\dfrac{z-i}{z+i}\left(\dfrac{\xi-i}{\xi+i}\right)'}{\dfrac{\xi-i}{\xi+i}+\dfrac{z-i}{z+i}\dfrac{\xi-i}{\xi+i}}u_0(\xi)d\xi \\
&= \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi z-1}{(\xi-z)(\xi^2+1)}u_0(\xi)d\xi = \\
&= \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi-z}u_0(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

deoarece

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\frac{\xi z+1}{(\xi-z)(\xi^2+1)} = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}$$

când $\xi \in R$ and $z = x + yi$. În final soluţia problemei Dirichlet pe semiplanul superior este dată de:

$$u(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_0(\zeta)}{\xi-z}d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}u_0(\xi)d\xi. \qquad (15)$$

Exemplul 7. Rezolvaţi

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{for} \quad \mathrm{Im} z > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Conform exemplului precedent

$$\begin{aligned} u(z) &= \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - z} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} d\xi \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i} 1\pi i \left(\mathrm{Re}\, s\left(\frac{1}{\xi - z} \cdot \frac{1}{1+\xi^2},\ \xi = z\right) + \right.\right. \\ &+ \left.\left. \mathrm{Re}\, s\left(\frac{1}{\xi - z} \cdot \frac{1}{1+\xi^2},\ \xi = i\right)\right)\right] \\ &= 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{(i-z)\cdot 2i}\right] \\ &= 2\left(\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2+4x^2y^2} + \frac{y-1}{2(x^2+(y-1)^2)}\right). \end{aligned}$$

Exemplul 8. Fie D un domeniu simplu conex cu graniţe C^1 pe porţiuni. Fie g o transformare conformă de la D la semiplanul superior. Atunci soluţia problemei Dirichlet pe D cu valorile la limită u_0 pe ∂D este

$$u(z) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int_{\partial D} \frac{1}{g(\xi) - g(z)} g' * \xi) u_0(\xi) d\xi.$$

Pentru a vedea acest lucru, se repetă demonstraţia de la formula [...] folosind formula 15 în locul formulei Schvarz-Villat 14.

Exemplul 9. Să se rezolve problema Dirichlet $\Delta u = 0$ pentru

$$(x,y) \in D = \{(x,y) \in R^2,\ x > 0,\ y > 0\}$$

astfel încât $u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $u(0,y) = \dfrac{1}{1+y^2}$. Vom utiliza formula exemplului precedent. Funcţia $z \to g(z) = z^2$ este o transformare conformă de la D la semiplanul superior. Atunci

$$u(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\left(\int_{\xi=\infty\cdot i}^{0}\frac{1}{\xi^2-z^2}2\xi\frac{1}{1-\xi^2}d\xi + \int_0^\infty \frac{1}{\xi^2-z^2}2\xi\frac{1}{1+\xi^2}d\xi\right)\right]$$

$$= \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\left[-\frac{2\ln z}{z^2-1}+\frac{i\pi - 2\ln z}{z^2+1}\right], \quad \text{where } z = x+yi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\begin{array}{l} -2(\arctan(y/x))\dfrac{x^2-y^2-1}{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}+ \\ +2(\ln(x^2+y^2))x\dfrac{y}{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2} \\ +(\pi - 2\arctan(y/x))\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}+ \\ +2(\ln(x^2+y^2))x\dfrac{y}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} \end{array}\right)$$

Funcţii Green

3.10 Identităţi Green

Fie $u, v : D \to C$ unde D este un domeniu în R^2 sau R^3 cu graniţe pe porţiuni C^1 astfel încât integrala peste ∂D să aibă sens. Amintim că

$$\text{grad }(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial u}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}, \quad dV = dx\,dy\,dz$$

este elementul de volum din $D \subset R^3$ şi $d\sigma$ este elementul de arie pe ∂D. Dacă $\vec{v} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}$ atunci prin definiţie $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{v}} = \dfrac{\partial u}{\partial x}p + \dfrac{\partial u}{\partial y}q + \dfrac{\partial u}{\partial z}r$. Avem următoarele identităţi Green:

Teorema 4. *Fie $D \subset R^3$ cu graniţe pe porţiuni C^1 şi $u, v \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$. Atunci*

$$\iiint_D \text{grad }(u)\cdot\text{grad }(v)dV + \iiint_D v\cdot\Delta(u)dV = \iint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}d\sigma \tag{16}$$

$$\iiint_D (u)\cdot\Delta(v)dV - \iiint_D v\cdot\Delta(u) = \iint_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}d\sigma - \iint_D v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}d\sigma \tag{17}$$

$\bar{n}$ fiind vectorul unitate normal exterior pentru ∂D şi Δ operatorul Laplace.

Demonstraţie.

$$\iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx\, dy\, dz = \iiint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\, dy\, dz.$$

Se scriu două relaţii analoage cu $\dfrac{\partial}{\partial y}$ respectiv $\dfrac{\partial}{\partial z}$ în loc de $\dfrac{\partial}{\partial x}$ şi se adună aceste trei ecuaţii. Rezultă

$$\iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz + \iiint_D v\Delta(u) dx\, dy\, dz$$
$$= \iiint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) dx\, dy\, dz$$
$$\stackrel{Gauss-Ostrogradski}{=} \iint_D v\frac{\partial u}{\partial x} dy\, dz + v\frac{\partial u}{\partial y} dz\, dx + v\frac{\partial u}{\partial z} dx\, dy$$
$$= \iint_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + v\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) d\sigma = \iint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} d\sigma.$$

Aici α, β, γ sunt unghiurile dintre normala exterioară $\bar{n}$ şi axele Ox, Oy, Oz. Ecuaţia 16 este demonstrată. Pentru a demonstra a doua ecuaţie Green se scrie din nou prima cu u şi v interschimbate şi apoi se scad aceste relaţii.

$\diamondsuit$

Observaţia 1. Dacă $D \subset R^2$ atunci identităţile Green arată în felul următor:

i). $\displaystyle\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy + \iint_D v\Delta(u) dx\, dy = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds$

ii). $\displaystyle\iint_D u\Delta(v) dx\, dy - \iint_D v\Delta(u) dx\, dy = \int_D \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds - \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} ds$

unde ds este elementul liniar de-a lungul lui ∂D. Demonstraţia foloseşte formula Riemann-Green în locul formulei Gauss-Ostrogradski.

Corolarul 5. Dacă $\Delta(u) = 0$ pe D atunci $\displaystyle\iint_D \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} d\sigma = 0.$

Demonstraţie. Se foloseşte prima ecuaţie Green cu $v = 1$

$\diamondsuit$

Corolarul 6. Dacă $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{n})$, $\Delta(u) = 0$ în interiorul lui D şi $u|_{\partial D} = 0$ atunci $u = 0$.

Demonstraţie. Prima identitate Green cu $v = u$ ne oferă

$$\iiint_D \mathrm{grad}(u)^2 dx\, dy\, dz = 0.$$

Prin urmare $\mathrm{grad}(u) = 0$ ceea ce înseamnă că $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ de unde $u = \mathrm{const}$. Condiţiile la limită implică $u = 0$.

Corolarul 7. *Există cel puţin o soluţie $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ pentru problema Dirichlet $\Delta(u) = 0$.*

Demonstraţie. Dacă u_1 şi u_2 sunt două asemenea soluţii atunci $u = u_1 - u_2$ este identic cu zero conform corolarului precedent.

3.11 Formula celor trei potenţiale

Formula pe care o vom demonstra în această secţiune reprezintă un pas decisiv în exprimarea funcţiilor armonice prin integrale. Vom folosi $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z'\bar{k}$, $dV_r = dx\, dy\, dz$, $dV_{r'} = dx'dy'dz'$, $d\sigma_r$ şi $d\sigma_{r'}$ elementul de arie la r şi r' pe suprafaţă. Pentru puncte pe planul xOy se folosesc $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$, $\bar{r}' = x'\bar{i} + y'\bar{j}$. Distanţa dintre $\bar{r}$ şi $\bar{r}'$ este $|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ pentru $\bar{r}, \bar{r}' \in R^3$ respectiv $|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ pentru $\bar{r}, \bar{r}' \in R^2$. Se foloseşte $\Delta_{\bar{r}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ şi analog pentru $\Delta_{\bar{r}'}$. Pentru operatorul Laplace în doua dimensiuni $\Delta_{\bar{r}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ şi expresia analoagă pentru $\Delta_{\bar{r}'}$. Lungimea vectorului $\bar{r}$ este $r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Prin calcul direct se verifică

$$\Delta_{\bar{r}'}\left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\right) = \Delta_{\bar{r}'}\left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\right) = 0, \quad \text{pentru} \quad \bar{r}, \bar{r}' \in R^3$$

şi

$$\Delta_r\left(\ln \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\right) = \Delta_{\bar{r}'}\left(\ln \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|}\right) = 0, \quad \text{pentru} \quad \bar{r}, \bar{r}' \in R^2.$$

Acum putem demonstra următoarea formulă.

Teorema 8. *Fie $D \subset R^3$ cu graniţă pe porţiuni C^1 şi $u \in C^2(D) \cap C^2(\bar{D})$. Atunci*

$$u(r) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \Delta_{\bar{r}'}(\bar{r}') dV_{\bar{r}'} -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \left(\frac{1}{\bar{r} - \bar{r}'} \right) u(\bar{r}') d\sigma_{\bar{r}'} \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \frac{\partial u}{\partial n_{\bar{r}'}} d\sigma_{\bar{r}'}.$$

Observaţia 2. Cele trei integrale de mai sus sunt numite potenţial volumic, potenţial dublu layer, respectiv potenţial simplu layer.

Demonstraţie. Fie $B\varepsilon$ o bilă mică de rază ε centrată la $\bar{r}$ inclusă complet pe D ($\bar{B}\varepsilon \subset D$). Fie $D\varepsilon = D - \bar{B}\varepsilon$. Se aplică cea de-a doua identitate Green pentru $u(\bar{r}')$ şi $v(\bar{r}') = \dfrac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$ în $D\varepsilon$. Deoarece $\Delta_{\bar{r}'} \left(\dfrac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = 0$ obţinem

$$- \iiint_{D\varepsilon} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \Delta_{\bar{r}'} u \cdot dV_{\bar{r}'} =$$

$$= \iint_{\partial D\varepsilon} u \cdot \frac{\partial}{\partial n_{\bar{r}'}} \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) d\sigma_{\bar{r}'} - \iint_{\partial D\varepsilon} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \frac{\partial u}{\partial n_{\bar{r}'}} d\sigma_{\bar{r}'}.$$

Graniţa lui $D\varepsilon$ împarte $\partial D\varepsilon = \partial D \cup (-\partial B\varepsilon)$ şi obţinem

$$- \iiint_{D\varepsilon} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \Delta_{\bar{r}'} \cdot dV_{\bar{r}'} = \iint_{\partial D} u \cdot \frac{\partial u}{\partial n_{\bar{r}'}} \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) d\sigma_{\bar{r}'}$$

$$- \iint_{\partial B\varepsilon} u \cdot \frac{\partial u}{\partial n_{\bar{r}'}} \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) d\sigma_{\bar{r}'} - \iint_{\partial D} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \frac{\partial u}{\partial n_{\bar{r}'}} d\sigma_{\bar{r}'} +$$

$$+ \iint_{\partial B\varepsilon} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \frac{\partial u}{\partial n_{\bar{r}'}} d\sigma_{\bar{r}'}.$$

Trecem la limita $\varepsilon \to 0$ examinând cu grijă comportamentul acestor cinci integrale.

Capitolul 4

Calcule Variaţionale

4.1 Probleme introductive

1. Să se găsească o curbă ce uneşte două puncte A şi B şi este situată deasupra axei x astfel încât aria suprefeţei de revoluţie ce se formează prin rotirea acestei crube în jurul axei x, să fie minimă. Aria este

$$I = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} y\sqrt{1+y'^2}dx.$$

2. Într-un plan vertical xy, un punct $A(x_A, y_A)$ se uneşte cu un punct $B(x_B, y_B)$ astfel încât $x_B > x_A$, $y_A > y_B$ printr-o curbă pentru care timpul care îi trebuie unei particule să ajungă din A în B fără frecare, de-a lungul curbei sub influenţa gravitaţiei, este cât mai scurt posibil.

Fig.

Viteză în (x, y) este $V = \sqrt{2g(y_A - y) + V_0^2}$, unde V_0 este viteza iniţială. Timpul de cădere este

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \frac{ds}{v} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{\alpha - y}}dx,$$

unde $\alpha = y_A + \dfrac{V_0^2}{2g}$.

4.2 Ecuaţia lui Euler

Ambele probleme arată necesitatea de a afla o funcţie $y(x)$ care delimitează integrala $I[y] = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y')dx$ unde $y(x_A)$ şi $y(x_B)$ sunt prescrise. Pentru a afla acest lucru avem nevoie de o lemă.

Lema 1. Dacă o funcţie $f(x)$ care este continuă pe $[x_A, x_B]$ satisface relaţia $\int_{x_A}^{x_B} f(x)\eta(x)dx = 0$ unde $\eta(x)$ este orice funcţie astfel încât $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$ şi η' este continuă pe $[x_A, x_B]$ atunci $f(x) \equiv 0$ în $[x_A, x_B]$.

Demonstraţie. Se presupune contrarul şi anume că $f(x) \neq 0$ la $x = x_0$, $x_A < x_0 < x_B$. Atunci există un vecin $x_0 \in I$ în care $f(x)$ nu este egal cu 0 (de exemplu $f(x) > 0$).

Fie

$$\eta(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{dacă} \quad x_A \leq x < x_1 \\ (x - x_1)^2(x - x_2)^2 & \text{dacă} \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{dacă} \quad x_2 < x \leq x_B \end{array} \right\}$$

unde $I = (x_1, x_2)$.

Funcţia $\eta(x)$ este clar continuă şi diferenţiabilă şi $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$ în timp ce

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)\eta(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)dx > 0$$

cât timp $f(x) > 0$ în (x_1, x_2). Prin urmare avem o contradicţie care demonstrează lema.

Acum putem demonstra.

Teorema 1. *Fie $F : D \to \mathbf{R}$, $D \times \mathbf{R}^3$ o funcţie de clasă C^2 şi $y : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^2 astfel încât $(x, y(x), y'(x)) \in D$ pentru orice $x \in [x_A, x_B]$, $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$. Atunci*

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x, y(x), y'(x))dx$$

este minimă (sau maximă) dintre funcţiile de clasă C^2, cu $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$ implică $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ (ecuaţia Euler).

Demonstraţie. Fie $y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$, $\eta \in C^2([x_A, x_B[)$. Atunci

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_A}^{x_B} f(x, y\varepsilon(x), y\varepsilon'(x))dx|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Deci

$$\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,y')\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y')\eta'\right]dx = 0$$

de unde

$$\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta|_{x_B}^{x_A} = 0$$

şi

$$\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]x\eta(x)dx = 0.$$

Din moment ce egalitatea este valabilă pentru orice η, atunci conform lemei 1 avem $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$. Ecuaţia diferenţială a lui Euler este o ecuaţie diferenţială de gradul doi

$$y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

care în general nu poate fi integrată explicit. Totuşi, în cazuri speciale ecuaţia poate fi rezolvată prin cuadraturi.

I) $F = F(x, y')$. Pentru acastă problemă $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ pentru ca $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ de unde $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = c$ (constant) care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întai.

II) $F = F(y, y')$. Atunci diferenţierea directă oferă:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\\ &= y'\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = 0,\end{aligned}$$

ceea ce implică $F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} = c$.

III) $F = F(x, y)$ atunci ecuaţia Euler nu este o ecuaţie diferenţială.

Exemplul 1. $I[y] = \displaystyle\int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x} dx$.

Soluţie. $F(x, y, y') = \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{x}$ nu depinde explicit de y. So $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = c$ (constant).

$$\frac{y'}{x\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

$$y' = \pm\frac{cx}{\sqrt{1 - c^2x^2}}$$

$$y' = \pm\frac{\sqrt{1 - c^2x^2}}{2c} + d.$$

Exemplul 2. $I[y] = 2\pi \displaystyle\int_{x_A}^{x_B} y\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{d} x$.

Soluţie. $F(x, y, y') = F(y, y') = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}$ nu depinde de x. Deci $F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} = c$, sau $y\sqrt{1 + y'^2} - y\dfrac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$, de unde $\dfrac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$ şi $y' = \pm\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{c^2}}$.

Exemplul 3. $i[y] = \displaystyle\int_1^2 (xy'^2 - y)dx$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$.

Soluţie. Ecuaţia lui Euler este $2xy'' + 2y' + 1 = 0$, sau $2(xy')' = -1$ de unde $xy' = -\dfrac{1}{2}x + c\ln|x| + d$. De la $y(1) = 0$ şi $y(2) = 1 \Rightarrow c = \dfrac{3}{2\ln 2}$, $d = \dfrac{1}{2}$.

4.3 Ecuaţia lui Euler cu mai multe funcţii

Fie $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$ o funcţie de $2n+1$ variabile ce au a doua derivată continuă. Problema variaţională cere să determinăm dintre toate sistemele de funcţii continue şi diferenţiabile $y_i(x) : [x_A, x_B] \to R$ prescrise pentru x_A şi x_B, acele funcţii pentru care

$$I[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_A}^{x_B} F(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))dx$$

staţionară. În multe cazuri, valoarea staţionară va fi un maxim sau un minim. Dacă pentru $1 \leq i \leq n$ considerăm familia de funcţii $y_{i\varepsilon}(x) = y_i(x) + \varepsilon\eta_i(x)$, $y_{j\varepsilon}(x) = y_j(x)$ atunci ca şi pentru ecuaţia Euler $\dfrac{d}{d\varepsilon}[Iy_{1\varepsilon}, \ldots, y_{n\varepsilon}] = 0$, oferă

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0.$$

Acesta este un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul doi pentru cele n funcţii $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

Exemplu. Să se găsească $y_1(x)$, $y_2(x)$ care face

$$I[y_1, y_2] = \int_{x_A}^{x_B} [2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2]dx$$

staţionară.

Soluţie. $\dfrac{\partial F}{\partial y_1} = 2y_2 - 4y_1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y_2} = 2y_1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y_1'} = 2y_1'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y_2'} = -2y_2'$.

Ecuaţiile Euler sunt

$$\begin{cases} 2y_2 - 4y_1'' = 0 \\ 2y_1 + 2y_2'' = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y_2 - 2y_1 = y_1'' \\ y_1 = -y_2''. \end{cases}$$

Plecînd de la aceasta rezultă $y_1^{(IV)} + 2y_1'' + y_1 = 0$, $y_1 = e^{\lambda x}$, $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ sau $y_1(x) = (c_1x + c_2)\cos x + (c_3x + c_4)\sin x$ şi $y_2(x) = 2y_1(x) + y_1''(x)$.

4.4 Integrale ce implică derivate superioare

Teorema 2. *Fie* $I[y] = \displaystyle\int_{x_B}^{x_A} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})dx$ *unde* F *este o funcţie de clasă* C^{n+1} *şi* $y : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ *este o funcţie de clasă* C^{2n}. *Dacă* $I[y]$ *staţionar, dintre toate funcţiile de clasă* C^{2n} *cu valori prescrise pentru* $y, y;, \ldots, y^{(n-1)}$ *la* x_A *şi* x_B, *atunci*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0$$

(Ecuaţia Euler-Poisson).

Demonstraţie. i) $\int_{x_B}^{x_A} f(x)\eta^{(k)}(x)dx = (-1)^k \int_{x_B}^{x_A} f^{(k)}(x)\eta(x)dx$ dacă $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}(x)$ sunt 0 în x_A şi x_B. Acest lucru poate fi demonstrat uşor integrând prin părţi.

ii) Fie $y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ cu $\eta : [x_A, x_B] \to \mathbf{R}$ este de clasă C^n şi $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$ dispar la x_A şi x_B. Atunci

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[y\varepsilon]|_{\varepsilon=0} = \int_{x_B}^{x_A} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)}\right] dx$$

$$= \int_{x_B}^{x_A} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)\right] \eta dx.$$

iii) Dacă în lema 1 (în demonstraţie) luăm $\eta(x) = (x - x_1)^{2n}(x - x_2)^{2n}$, observăm că lema este validă dacă η este de clasă C^n şi η dispare la x_A şi x_B împreună cu derivatele sale de ordinul $n - 1$. De aici

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0.$$

Exemplu. Să se găsească $y(x)$ dacă $I[y] = \int_{x_B}^{x_A} [2xy + (y''')^2]dx$ este staţionară.

Soluţie. $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y'''} = 2y'''$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right) = 2y^{(IV)}$ şi ecuaţia Euler-Poisson oferă $2x - 2y^{(IV)} = 0$, de unde

$$y(x) = \frac{x^7}{7!} + c_1x^6 + c_2x^5 + c_3x^4 + c_4x^3 + c_5x^2 + c_6x + c_7.$$

4.5 Integrale ce implică mai multe variabile independente

Metoda de mai sus pentru determinarea condiţiilor necesare pentru o valoare extremă pot fi aplicate când integrala este una multiplă. Avem nevoie de următoarele:

Lema 2. *Fie D o zonă delimitată de o curbă pe porţiuni, ∂D dacă $f : D \to \mathbf{R}$ este continuă şi $\iint_D f(x,y)\eta(x,y)dxdy = 0$ pentru orice*

$\eta : D \to \mathbf{R}$ care este de clasă C^2 şi $\eta = 0$ pe ∂D cu toate derivatele sale, atunci $f \equiv 0$ pe D.

Demonstraţie. Se presupune că $f \neq 0$ astfel încât $f(x_0, y_0) \neq 0$, $(x_0, y_0) \in D$, $(x, y) \notin D$. Atunci există $r > 0$ astfel încât $B_r = B((x_0, y_0), r) \subset D$ şi $F(x, y)$ are acelaşi semn pe B_r ca $f(x_0, y_0$.

Fie

$$\eta(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} e^{-\frac{1}{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}, & (x,y) \in B_r \\ 0, & (x,y) \notin B_r \end{array} \right\}$$

η C^∞ şi 0 ?? B_r. Atunci

$$\iint_D f(x,y)\eta(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)\eta(x,y)dxdy \neq 0,$$

având acelaşi semn ca $f(x_0, y_0$.

Se poate demonstra următoarea teoremă.

Teorema 3. *Fie $(x, y, u, x_x, u_y) : D \to \mathbf{R}$, $G \subset \mathbf{R}^5$ de clasă C^2 şi $u : d \to \mathbf{R}$ astfel încât $\left(x, y, u(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \in G$ pentru $(x, y) \in D$. Se presupune că $I[u] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy$ este staţionară. Atunci*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial_y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0.$$

Demonstraţie. Fie $u\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon\eta(x, y)$ cu η ca în lema 2. Dacă $I[u]$ este staţionară, atunci $\dfrac{d}{d\varepsilon} I[u\varepsilon]|_{\varepsilon=0} = 0$, deci

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] = 0.$$

Prin urmare

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\eta\right) - \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\eta\right) - \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\eta\right] dxdy = 0$$

de unde

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right]\eta dxdy +$$

$$+\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\eta\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\eta\right)\right] dxdy = 0.$$

Prin formula Riemann-Green a doua integrală devine $\iint_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial u_x}\eta dy - \frac{\partial F}{\partial y}\eta dx$ care dispare din cauza lui η. Prima integrală este 0 pentru fiecare η, din lema 2, şi astfel se demonstrează teorema.

Exemplu. Să se găsească ecuaţia pentru $u(x,y)$ dacă $I[u] = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + xyu)dxdy$ este staţionară.

Soluţie. $F(x,y,u,u_x,u_y) = u_x^2 + u_y^2 + xyu$, $\frac{\partial F}{Sdu} = xy$, $\frac{\partial F}{\partial u_x} = 2u_x$, $\frac{\partial F}{\partial u_y} = 2u_y$, $\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) = 2u_{xx}$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 2u_{yy}$ şi ecuaţia cerută devine $xy - 2u_{xx} - 2u_{yy} = 0$ sau $\Delta u = \frac{xy}{2}$ unde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

4.6 Probleme isoperimetrice

Să trecem la problema delimitării $I[y] = \int_{x_B}^{x_A} F(x,y,y')dx$, $y(x_A)$ şi $y(x_B)$ prescrise, astfel încât $\int_{x_B}^{x_A} G(x,y,y')dx = k =$ constant.

Dacă $y(x)$ este ?? pentru funcţia, atunci

$$I(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \int_{x_B}^{x_A} F(x, y(x) + \varepsilon_1\eta_1(x) + \varepsilon_2\eta_2(x), y' + \varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_2\eta_2')dx$$

este

$$g(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \int_{x_B}^{x_A} G(x, y(x) + \varepsilon_1\eta_1(x) + \varepsilon_2\eta_2(x), y' + \varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_2\eta_2')dx = k,$$

la $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\eta_1(x_A) = \eta_1(x_B) = 0$, $\eta_2(x_A) = \eta_2(x_B) = 0$.

Prin urmare, prin metoda multiplicatorilor lui Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \varepsilon_1} = 0 \\ noa\dfrac{\partial H}{\partial \varepsilon_2} = 0 \end{cases}$$

$g(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = k$, când $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ unde

$$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = F(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda g(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Fie

$$\phi(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y').$$

Acest lucru oferă

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i}\int_{x_B}^{x_A}\left[\begin{array}{l} F(x, y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2, y'+\varepsilon_1\eta_1'+\varepsilon_2\eta_2') \\ +\lambda G(x, y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2, y'+\varepsilon_1\eta_1'+\varepsilon_2\eta_2') \end{array}\right] dx$$

ca în cazul ecuaţiei lui Euler

$$\int_{x_B}^{x_A}\left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'}\right)\right]\eta_i dx = 0.$$

Cât timp $\eta_{i(x)}$ sunt funcţii diferenţiabile arbitrare, din lema 1 rezultă $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y'}\right) = 0$. Aceasta este condiţia necesară ce trebuie satisfacută de funcţia de delimitare $y(x)$.

Observăm că $\dfrac{\partial H}{\partial \varepsilon_1} = 0$ şi $\dfrac{\partial H}{\partial \varepsilon_2} = 0$ oferă aceleaşi condiţii, şi $g(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = k$ când $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ este $\displaystyle\int_{x_B}^{x_A} G(x, y, y')dx = k$.

Exemplu. Să se determine forma unei curbe de lungime dată L, pentru care $I = \displaystyle\int_{x_B}^{x_A} y dx$ este maximă şi $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$.

Soluţie. $I[y] = \displaystyle\int_{x_B}^{x_A} y dx$??, ?? $\displaystyle\int_{x_B}^{x_A}\sqrt{1+y'^2}dx = L$. Atunci $\phi(x, y, y') = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}$ pentru care $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y'}\right)$ este ecuaţia corespondentă.

Cât timp ϕ nu implică explicit x, rezultă $\phi - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} = c_1$ sau $y - c_1 = -\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$.

Dacă introducem $\dfrac{dy}{dt} = \tan t$ atunci $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \cos t$ şi $y - c_1 = -\lambda \cos t$ sau $y = c_1 - \lambda \cos t$. Astfel $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{x}dy\dfrac{dy}{dy} = \dfrac{1}{\tan t}\lambda \sin t = \lambda \cos t$ şi $x = c_2 + \lambda \sin t$.Reprezentarea parametrică a extremelor este

$$\begin{cases} x = c_2 + \lambda \sin t \\ y = c_1 - \lambda \cos t \end{cases}$$

sau implicit $(x-c_2)^2 + (y-c_1)^2 = \lambda^2$ (??), c_1, c_2 şi λ sunt determinate de $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$, $\int_{x_B}^{x_A} \sqrt{1+y'^2}dx = L$.

Mai general, dacă dorim să delimităm integrala

$$I = \int_{x_B}^{x_A} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx$$

cu valori prescrise pentru y_i la $x = x_A$ şi $x = x_B$ supusă celor N condiţii impuse

$$\int_{x_B}^{x_A} G_j(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx = k_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Atunci

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

unde

$$\phi(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = F + \lambda_1 G_1 + \ldots + \lambda_N G_n.$$

Afirmaţia poate fi dovedită luând variaţiile

$$y_i(x) : y_i(x) + \varepsilon_i \eta_i(x) + \sum_{k=1}^{N} t_k \bar{\eta}_k(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Atunci

$$f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, t_1, \ldots, t_n) = \int_{x_B}^{x_A} G(x, y_1 + \varepsilon_1\eta_1 + \sum t_k \bar{\eta}_k, \ldots)dx$$

trebuie sa fie staţionară cu condiţia

$$g_j(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, t_1, \ldots, t_n) = \int_{x_B}^{x_A} G(x, y_1 + \varepsilon_1 \eta_1 + \sum t_j \bar{\eta}_k, \ldots) dx = k_j.$$

După metoda multiplicatorilor lui Lagrange

$$f\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, t_1, \ldots, t_N) = \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_N g)n + f$$

trebuie să satisfacă (λ_i = constants) $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_i}\right|_0 = 0$ şi $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_k}\right|_0 = 0$ unde $|_0$ înseamnă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = t_1 = t_2 = \ldots = t_N = 0$. Cât despre ecuaţia lui Euler, $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_i}\right|_0 = 0$ oferă ecuaţia $\dfrac{\partial \phi}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y_i'}\right) = 0$ mulţumită $\eta_i(x_A) = \eta_i(x_B) = 0$. Ecuaţiile $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_k}\right|_0 = 0$ sunt consecinţe ale $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_i} = 0$.

Exemplu. să se găsească curba plană închisă de lungime dată care delimitează aria maximă.

Soluţie. Fie $t \to (x(t), y(t))$ curba $t_0 \le t \le t_1$, $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$. Aria delimitată de curbă este $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$ şi constrângerea $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt = L$. Sau în notaţiile afirmaţiei de mai sus

$$I[y_1, y_2] = \frac{1}{2}\int_{x_B}^{x_A} (y_1 y_2' - y_2 y_1') dx, \quad \int_{x_B}^{x_A} (y_1'^2 + y_2'^2) dx = L.$$

Atunci

$$\phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = \frac{1}{2}(y_1 y_2' - y_2 y_1') + \lambda(y_1'^2 + y_2'^2)$$

şi sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y_1'}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y_2} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y_2'}\right) = 0 \end{cases}$$

devine

$$\begin{cases} \dfrac{y_2'}{2} - \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{y_2}{2} + \dfrac{\lambda y_1'}{\sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}}\right) = 0 \\ -\dfrac{y_1'}{2} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_1}{2} + \dfrac{\lambda y_2'}{\sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}}\right) = 0. \end{cases}$$

Dacă x este ales ca lungimea arcului dintr-un punct fix P de pe curbă, atunci $y_1'^2 + y_2'^2 = 1$ pentru ca

$$\begin{cases} y_2' = \lambda y_1'' \\ y_1' + \lambda y_2'' = 0 \end{cases}$$

care are soluţia

$$\begin{cases} y_1 = a \sin\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) + b \cos\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) + c_1 \\ y_2 = a \cos\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) - b \sin\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) + c_2 \end{cases}$$

sau

$$(y_1 - c_1)^2 + (y_2 - c_2)^2 = \lambda^2.$$

Curba cerută este un cerc.