CAPITOLUL 10
ECUAȚII DIFERENȚIALE

BREVIAR TEORETIC

Ecuații diferențiale de ordinul I

- Forma implicită: $F(x, y, y') = 0, \quad F : D \subset R^3 \to R, \ x \in I \subseteq R$, funcția necunoscută fiind $y = y(x)$, derivabilă, cu derivata $y' = y'(x)$.
- Forma explicită: $y' = f(x, y)$

A rezolva o ecuație diferențială presupune a determina o funcție $y = \varphi(x), \ \varphi : I \to R$, astfel încât $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$; în aceste condiții, spunem că funcția $y = \varphi(x, C), \ C \in R$ este *soluția generală* a ecuației.

Pentru o anumită valoare a lui C, funcția $y = \varphi(x)$ se numeşte *soluție particulară* a ecuației.

- *Problema lui Cauchy* pentru ecuația $F(x, y, y') = 0$ constă în determinarea unei soluții particulare a ecuației, care verifică condiția inițială $y(x_0) = y_0, \ x_0 \in I, \ y_0 \in R$.

I. ECUAȚII DIFERENȚIALE CU VARIABILE SEPARABILE

Forma generală este:

$y' = f(x) \cdot g(y), \quad f : (a,b) \to R, \quad g : (c,d) \to R; \quad f, g$ continue şi $g(y) \neq 0, \ \forall y \in (c,d)$.

II. ECUAȚII DIFERENȚIALE OMOGENE

Forma generală este: $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$, $g:(a,b) \to R$ continuă.

Această ecuație se rezolvă astfel:

Se face înlocuirea $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx,\ y' = z'x + z$ şi se obține o ecuație diferențială cu variabile separabile.

III. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL I

Forma generală este:

$y' = P(x)y + Q(x), \quad P,Q:(a,b) \to R$ continue.

Această ecuație se rezolvă în doi paşi :

$i)$ se determină soluția ecuației omogene ataşate: $y' = P(x)y$, care este o ecuație diferențială cu variabile separabile;

$ii)$ se aplică metoda variației constantelor.

IV. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE TIP BERNOULLI

Forma generală este:

$y' = P(x)y + Q(x)y^{\alpha}, \alpha \in R \setminus \{0,1\}, \quad P,Q:(a,b) \to R$ continue.

Această ecuație se rezolvă în doi paşi:

1) se împarte ecuația prin y^{α} şi rezultă:

$$\frac{1}{y^{\alpha}}y' + \frac{1}{y^{\alpha-1}}P(x) + Q(x) = 0.$$

2) se notează $y^{1-\alpha} = z \Rightarrow (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z'$ şi după înlocuire se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul I.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale:
$y'=\frac{xy}{x^2+1}$ şi soluția particulară care trece prin punctul $(0,1)$.

Rezolvare:
Observăm că aceasta este o ecuație diferențială cu variabile separabile.
Se separă variabilele şi rezultă: $\frac{y'}{y}=\frac{x}{x^2+1}$.
Integrând în raport cu x, obținem:
$$\int\frac{1}{y}y'\,dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx+c, c\in R\Rightarrow \ln|y|=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln C,\ C>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln|y|=\ln\left(C\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow |y|=C\sqrt{x^2+1}\Rightarrow y=\pm C\sqrt{x^2+1},$$
sau $y=K\sqrt{x^2+1}, K\in R$.
Soluția generală sub *formă explicită* a ecuației diferențiale este:
$y=y(x,K)=K\sqrt{x^2+1},\quad K\in R^*$.
Înlocuind $x=0$ şi $y=1$ în soluția generală se obține $K=1$, deci soluția particulară a ecuației diferențiale este: $y=y(x)=\sqrt{x^2+1}$.

2. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale:
$y'(y+1)(x+1)=x(y+1)-x$.

Rezolvare:
Ecuația se mai poate scrie sub forma:
$y'(y+1)(x+1)=xy\Leftrightarrow\frac{y+1}{y}y'=\frac{x}{x+1}$, care este o ecuație cu variabile separabile. Integrăm în raport cu x şi obținem:

$$\int \frac{y+1}{y} y' dx = \int \frac{x}{x+1} dx + c,\ c \in R \Rightarrow y + \ln|y| = x - \ln|x+1| + \ln C$$

$$\Rightarrow \ln|y(x+1)| = x - y + \ln C,\ C > 0 \Rightarrow \ln \frac{|y(x+1)|}{C} = x - y \Rightarrow$$

$$|y(x+1)| = Ce^{x-y},\ C > 0 \Rightarrow y(x+1) = \pm Ce^{x-y},\ C > 0.$$

Rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale sub *formă implicită* este: $y(x+1) = Ke^{x-y},\quad K \in R^*$.

3. Să se integreze următoarea ecuație diferențială:
$x^2 + 2y^2 = xyy'$.

Rezolvare:
Ecuația se mai poate scrie sub următoarea formă echivalentă:

$$y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}.$$

Aceasta este o ecuație diferențială omogenă. Folosim substituția:

$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx,\ y' = z'x + z$ și se obține ecuația:

$$z + xz' = \frac{x^2 + 2z^2x^2}{zx^2} \Rightarrow z + xz' = \frac{1+2z^2}{z} \Rightarrow$$

$$z'x = \frac{1+z^2}{z} \Rightarrow \frac{z}{z^2+1} z' = \frac{1}{x}$$

Integrăm această ecuație cu variabile separabile:

$$\int \frac{z}{z^2+1} z' dx = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln|x| + \ln C, C > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{1+z^2} = C|x|$. Revenind la substituția $z = \frac{y}{x}$, avem:

$\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = C|x|$. Rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale este: $\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2, C>0$.

4. Să se rezolve următoarea ecuație diferențială:
$y'\cos x - 2y\sin x = \cos x$ şi să se determine soluția particulară care trece prin punctul $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$.

Rezolvare:
Împărțim ecuația prin $\cos x \neq 0$ şi obținem:

$y' = 2ytgx - 1 \quad (1), \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$, care este o ecuație diferențială liniară de ordinul I.

i) Rezolvăm ecuația omogenă ataşată:

$$y' = 2ytgx \Leftrightarrow \frac{1}{y}y' = 2tgx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}y'dx = \int 2tgxdx + c,\ c \in R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -2\ln|\cos x| + \ln K,\ K>0 \Rightarrow \ln\frac{|y|}{K} = \ln\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|y|}{K} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow |y| = \frac{K}{\cos^2 x}, K>0 \Rightarrow y = \frac{\pm K}{\cos^2 x},\ K>0,$$

sau $y = \frac{C}{\cos^2 x}, \quad C \in R^*$.

ii) Aplicăm metoda variației constantelor şi rezultă:

$$y = \frac{C(x)}{\cos^2 x} \Rightarrow y' = \frac{C'(x)\cos^2 x + 2\sin x\cos x C(x)}{\cos^4 x} =$$

$$\frac{C'(x)\cos x + 2\sin x C(x)}{\cos^3 x}.$$

Înlocuim y şi y' în ecuaţia (1) şi obţinem:

$$\frac{C'(x)\cos x + 2\sin x C(x)}{\cos^3 x} = 2\frac{C(x)}{\cos^2 x} tgx + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{C'(x)}{\cos^2 x} - 1 = 0 \Rightarrow C'(x) = \cos^2 x \Rightarrow C(x) = \int \cos^2 x dx =$$

$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx + C_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1$; soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este:

$$y = y(x, C_1) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x},\ C_1 \in R.$$

Punând condiţia ca $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, obţinem:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + C_1\right) \cdot 2 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Rezultă soluţia particulară: $y = y(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

5. Să se integreze următoarea ecuaţie diferenţială**:**

$$y' + y \cdot ctgx + y^3 = 0, x \neq k\pi, k \in Z.$$

Rezolvare:

Se observă că aceasta este o ecuaţie diferenţială de tip Bernoulli, cu $\alpha = 3$.

1) Împărţim ecuaţia prin y^3 şi rezultă: $\frac{1}{y^3}y' + \frac{1}{y^2}ctgx + 1 = 0$. (1)

2) Notăm $y^{1-3} = z \Leftrightarrow y^{-2} = z \Rightarrow -\frac{2y'}{y^3} = z' \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2}$.

Prin înlocuire în (1) obţinem:

$-\frac{z'}{2} + z \cdot ctgx + 1 = 0 \Leftrightarrow z' = 2z \cdot ctgx + 2$ (2), care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul I.

$i)$ Rezolvăm ecuația omogenă atașată:

$$z' = 2z \cdot ctgx \Leftrightarrow \frac{1}{z}z' = 2ctgx \Rightarrow \int \frac{1}{z}z'\,dx = 2\int ctgx\,dx + c,\ c \in R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|z| = 2\ln|\sin x| + \ln C,\ C > 0 \Rightarrow$$

$$\ln\frac{|z|}{C} = \ln\sin^2 x \Rightarrow |z| = C\sin^2 x,\quad C > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \pm C\sin^2 x,\ C > 0 \Rightarrow z = K\sin^2 x,\ \ K \in R^*.$$

$ii)$ Aplicăm metoda variației constantelor:

$$z = K(x)\sin^2 x \Rightarrow z' = K'(x)\sin^2 x + 2\sin x\cos xK(x).$$

Înlocuind în (2), obținem:

$$K'(x)\sin^2 x + 2\sin x\cos xK(x) = 2K(x)\sin^2 x \cdot ctgx + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K'(x)\sin^2 x = 2 \Rightarrow K'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} \Rightarrow K(x) = 2\int\frac{1}{\sin^2 x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K(x) = -2ctgx + C_1.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale liniare de ordinul I este:

$$z = K(x)\sin^2 x = \left(-2ctgx + C_1\right)\sin^2 x = -2\sin x\cos x + C_1\sin^2 x$$

sau $z = -\sin 2x + C_1\sin^2 x,\ C_1 \in R$.

Revenind la substituția $z = \frac{1}{y^2}$, obținem soluția generală a ecuației Bernoulli: $y^2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{-\sin 2x + C_1\sin^2 x},\ \ C_1 \in R$.

PROBLEME PROPUSE

Să se determine soluția generală pentru următoarele ecuații diferențiale şi soluția particulară care trece prin punctul indicat:

1. $y'=\dfrac{x(2y-1)}{(x^2+1)}$, (1,1).

R: $y(x,C)=C\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2},\ C\in R;\ y(x)=\frac{1}{4}\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}$.

2. $2yy'=(3x+2)(y^2+4)$, $\left(2,\sqrt{e^2-4}\right)$.

R: $\frac{1}{2}\ln\left(y^2+4\right)=\frac{3}{4}x^2+x+C,\ C\in R;\ C=-4$.

3. $(3x-4)y^2y'+(y^2+1)=0$, (1,0).

R: $y-arctgy=-\frac{1}{3}\ln|3x-4|+C,\ C\in R;\ C=0$.

4. $e^{x+y}y'-(2x-1)e^{x^2}=0$, (0,1).

R: $y(x,C)=\ln\left(e^{x(x-1)}+C\right),\ C\in R;\ C=e-1$.

5. $y'\cos x+\sin x\sin^2 y=0$, $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$;

6. $2x^2yy'=y^2+1$, (1,5).

Să se determine soluția generală a următoarelor ecuații diferențiale:

7. $x^2+2y^2=xyy'$ **R:** a) $y^2(x,C)=Cx^4-x^2,\ C\in R$

8. $x^2(2y'+1)+y^2=0$ **R:** $x=Ce^{\frac{2x}{x+y}},\ C\in R$;

9. $y'=\dfrac{3x+4y}{4x+3y}$ **R:** $x+y=C(y-x)^7,\ C\in R$.

Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale și să se afle soluția particulară care trece prin punctul indicat:

10. $y'+4x^3y=x^3$, $(0,1)$; **R:** $y(x,C)=\frac{1}{4}\frac{e^{x^4}+4C}{e^{x^4}}$, $C\in R$; $C=\frac{3}{4}$.

11. $y'\cos x-2y\sin x=\cos x$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$.

12. $y'+3y=6xe^{-x}$, $(0,3)$;

R: $y(x,C)=\frac{(6x-3)e^{-x}+2Ce^{-3x}}{2}$, $C\in R$; $C=\frac{9}{2}$.

13. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$, $(0,1)$;

R: $y(x,C)=\left(x^2+C\right)e^{-x^2}$, $C\in R$; $C=1$.

Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

14. $6y^2y'+xy^3=2x$; **R:** $y(x,C)=\sqrt[3]{e^{-\frac{1}{4}x^2}+2}$, $C\in R$.

15. $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$; **R:** $x=Ce^{\frac{2\sqrt{y}}{x^2}}$, $C\in R$.

16. $y'+xy-y^2x=0$; **R:** $y(x,C)=\frac{1}{Ce^{\frac{1}{2}x^2}+1}$, $C\in R$.

17. $xy'+2y=x^5y^3e^x$; **R:** $y^2(x,C)=\frac{1}{x^4\left(C-2e^x\right)}$, $C\in R$.